

---

# LE THÉORÈME DE TURRITTIN $p$ -ADIQUE

*par*

Gilles CHRISTOL

---

## Introduction

Le but de ce texte est d'exposer, aussi complètement que possible, les outils de la théorie des équations différentielles  $p$ -adiques en vue de comprendre la démonstration du théorème de Turrittin  $p$ -adique donnée dans [38]. On connaît deux autres démonstrations ([1] et [34]) de ce théorème qui est aussi parfois appelé “conjecture de Crew” ou “théorème de monodromie  $p$ -adique”. Ces trois démonstrations sont de natures assez différentes : la démonstration présentée ici est presque exclusivement différentielle et constitue ainsi l'un des aboutissements de la théorie des équations différentielles  $p$ -adiques. La démonstration de [1] est aussi basée fondamentalement sur la théorie des équations différentielles  $p$ -adiques mais est de nature galoisienne. La démonstration de [34] quant à elle exploite l'aspect  $\varphi$ -module (structure de Frobenius forte dans la terminologie utilisée ici).

Cette présentation globale est destinée d'abord à éviter au lecteur la consultation de nombreux articles avec des notations non homogènes, voire contradictoires. Elle veut aussi donner de la cohérence à l'ensemble de la théorie en énonçant les résultats intermédiaires sous la forme précise où ils seront utilisés dans la suite. Enfin elle apporte quelques améliorations et simplifications.

La plupart des résultats exposés ont été publiés par ailleurs. L'essentiel vient bien évidemment de [38] et de ses “préliminaires” [14], [15] et [16], mais on trouvera aussi des démonstrations de résultats “classiques” comme ceux de [36] ou plus particuliers mais très utiles comme ceux de [19]. L'utilisation du critère de Mittag Leffler topologique [29] évite d'avoir à introduire tous le formalisme de la géométrie analytique rigide. Il permet ainsi d'étendre aux couronnes ouvertes des résultats connus uniquement pour les couronnes fermées. Ce texte reprend plusieurs thèmes déjà présents dans [17] en donnant les démonstrations qui étaient absentes de ce cours.

---

*Classification mathématique par sujets (2000).* — 12H25,14F30.

*Mots clefs.* —  $p$ -adic coefficients.

En trois occasions : décomposition des matrices en facteurs singuliers, suppression des singularités apparentes et existence d’une structure de Frobenius, ce texte contient des démonstrations nouvelles. Les simplifications et clarifications qu’elles apportent par rapport aux démonstrations publiées respectivement dans [9] et [13] permettent une amélioration notable des résultats. En particulier, les restrictions techniques sur l’existence d’un antécédent de Frobenius sont supprimées et on obtient le meilleur résultat possible.

Même s’ils restent vrais dans un cadre plus général, les résultats ne sont démontrés que dans le cas ultramétrique ceci afin d’éviter la pathologie liée à l’existence de séries divergentes dont le terme général tend vers zéro.

En fait, le texte présente trois théories explicitant la structure des équations différentielles linéaires ordinaires dans trois contextes différents.

Dans la première, les coefficients sont dans un corps de séries formelles de caractéristique nulle. Ses résultats principaux sont les théorèmes de Fuchs (cas régulier) et Turrittin “classique” (cas irrégulier). La démonstration présentée est essentiellement due à Robba [43]. Elle repose sur un lemme de Hensel pour les opérateurs différentiels. Sa présence à un but didactique : elle met en effet en jeu un mécanisme qui sera repris dans la démonstration du théorème de Turrittin  $p$ -adique mais hors de toutes les difficultés techniques qui peuvent alors le masquer.

Dans la deuxième, les coefficients sont dans le corps des éléments analytiques dans le disque générique. Les résultats sont essentiellement dus à Dwork et Robba [22]. Dans un certain sens, le théorème de décomposition suivant les pentes, qui représente une étape essentielle dans la démonstration du théorème de Turrittin  $p$ -adique, est une version “en famille” de cette théorie.

Dans la troisième, les coefficients sont dans l’anneau de Robba. Ses résultats sont étonnamment proches de ceux de la théorie formelle. Toutefois, les démonstrations sont beaucoup plus sophistiquées. La difficulté fondamentale est que, contrairement à ce qui se passe dans le cas formel, le rayon de convergence des solutions d’une équation différentielle ne se lit pas directement sur les coefficients de l’équation. On surmonte cette difficulté grâce à l’existence d’une structure de Frobenius (faible). Déjà dans le cas régulier, cela empêche de donner une définition simple des exposants et contraint à utiliser un processus analytique compliqué pour les définir. Cette difficulté est intrinsèque et due fondamentalement à l’existence de nombres de Liouville (trop bien approchés par les entiers). Pour des raisons analogues, le cas irrégulier n’est pas complètement accessible : les équations différentielles de pente à dénominateur divisible par  $p$  sont irréductibles par Frobenius. Pour obtenir le théorème final, on doit avoir recours à une astuce (due à Mebkhout) qui, malheureusement, oblige à se limiter au cas des équations différentielles ayant une structure de Frobenius (forte).

Le Plessis Paté le 14/6/2007

## Table des matières

Introduction.....	1
<b>Chapitre I. Éléments analytiques.....</b>	<b>5</b>
1. Le corps des constantes.....	5
1.1. Corps ultramétriques.....	5
1.2. Espaces vectoriels topologiques.....	9
1.3. Différentes notions de compacité.....	12
1.4. Limites banachiques.....	19
2. Fonctions analytiques dans une couronne.....	21
2.1. Polygone de Newton et polygone de valuation.....	21
2.2. Un lemme de Hensel général.....	25
2.3. Lemme de Hensel pour les polynômes.....	27
2.4. Fonctions analytiques dans une couronne fermée.....	28
3. Éléments analytiques.....	32
3.1. Éléments analytiques dans le disque générique.....	32
3.2. Fonctions analytiques bornées et éléments analytiques.....	34
3.3. Fonctions analytiques dans le disque générique.....	36
<b>Chapitre II. Fonctions analytiques.....</b>	<b>38</b>
4. Fonctions analytiques dans une couronne quelconque.....	38
4.1. Propriétés topologiques des anneaux $\mathcal{A}(I)$ .....	38
4.2. Théorème de Mittag-Leffler.....	40
4.3. Faisceautisation.....	45
4.4. Théorème de Lazard.....	48
4.5. Faisceaux cohérents.....	51
4.6. Structure algébrique des anneaux $\mathcal{A}(I)$ .....	56
4.7. Cas d'un corps non sphériquement complet.....	57
4.8. Démonstration originale du théorème de Lazard.....	60
5. Fonctions surconvergentes.....	63
5.1. Les anneaux $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}^\dagger$ .....	63
5.2. L'anneau $\mathcal{R}$ : propriétés algébriques.....	63
5.3. L'anneau $\mathcal{R}$ : propriétés topologiques.....	64
<b>Chapitre III. Modules différentiels.....</b>	<b>68</b>
6. Théorie algébrique.....	68
6.1. Anneaux différentiels.....	68
6.2. Modules différentiels.....	70
6.3. Matrices de dérivation.....	71
6.4. Homomorphismes intérieurs.....	72
6.5. Bases cycliques.....	72
6.6. Noyau et conoyau.....	73
6.7. Solutions.....	75
6.8. Indice.....	77

6.9. Images directes et inverses.....	78
7. Modules différentiels sur un anneau valué.....	79
7.1. Normes sur $A\langle D \rangle$ .....	79
7.2. Topologie quotient.....	82
7.3. Lemme de Hensel pour les polynômes différentiels.....	83
8. Rayon de convergence.....	86
8.1. Définition.....	87
8.2. Solutions au voisinage du point générique.....	89
8.3. Majoration de la dérivation dans une base cyclique.....	92
9. $\mathcal{R}$ -modules différentiels solubles.....	93
9.1. La catégorie MLC ( $\mathcal{A}(I)$ ).....	93
9.2. Fonction rayon de convergence.....	94
9.3. Plus grande pente d'un module différentiel soluble.....	94
<b>Chapitre IV. La théorie formelle.....</b>	<b>96</b>
10. Modules différentiels singuliers-réguliers.....	96
11. Le polygone de Newton d'un polynôme différentiel.....	99
12. Décomposition suivant les pentes.....	100
13. Le théorème de Turrittin.....	102
<b>Chapitre V. La théorie de Dwork-Robba.....</b>	<b>104</b>
14. Décompositions liées au rayon de convergence.....	104
15. Foncteur "solutions dans le disque générique".....	109
<b>Chapitre VI. Modules différentiels de Robba.....</b>	<b>112</b>
16. L'ensemble des exposants.....	113
17. Exposant d'un module différentiel de Robba.....	116
17.1. Modules différentiels de Robba.....	116
17.2. Cas d'une couronne fermée.....	116
17.3. Cas général.....	124
17.4. Propriétés des exposants.....	125
18. Structure des modules différentiels de Robba.....	125
<b>Chapitre VII. Décomposition suivant les pentes.....</b>	<b>128</b>
19. Théorèmes de Birkhoff $p$ -adiques.....	129
19.1. Théorèmes de Birkhoff algébriques.....	129
19.2. Théorème de Birkhoff analytique.....	136
19.3. Variantes.....	144
19.4. Applications aux modules différentiels.....	146
20. Frobenius.....	149
20.1. Foncteur de Frobenius.....	149
20.2. L'opérateur $\psi$ de Dwork.....	151
20.3. Frobenius et rayon de convergence.....	154
20.4. Unicité de l'antécédent.....	155
20.5. Existence de l'antécédent.....	156

21. La catégorie $\text{MLCF}(\mathcal{R})$ .....	160
22. Le théorème de non séparabilité.....	161
22.1. Topologies.....	161
22.2. Énoncé du théorème.....	164
22.3. Notations générales.....	164
22.4. De la base $\mathcal{B}$ à la base $\varphi^h(\mathcal{B})$ .....	164
22.5. De la base $\varphi^h(\mathcal{B})$ à la base $\mathcal{G}$ .....	167
22.6. Minoration uniforme.....	168
23. Pentas d'un module différentiel.....	170
23.1. Le théorème de décomposition.....	170
23.2. Fonctorialité.....	172
23.3. Images inverses.....	174
23.4. Polygone de Newton.....	174
<b>Chapitre VIII. Le théorème de Turrittin <math>p</math>-adique</b> .....	176
24. Modules différentiels complètement irréductibles .....	176
25. Exponentielles de Robba.....	178
25.1. Vecteurs de Witt.....	178
25.2. Exponentielle d'Artin-Hasse.....	182
25.3. Vecteurs de Witt finis.....	183
25.4. Equations différentielles d'ordre un.....	186
<b>Chapitre IX. Annexes</b> .....	188
Index des notations.....	188
Index terminologique.....	189
Références.....	192

## CHAPITRE I ÉLÉMENTS ANALYTIQUES

Nous introduisons dans ce chapitre les anneaux de fonctions (en une variable) qui vont intervenir dans ce livre. Puisqu'il s'agit d'anneaux de fonctions analytiques, le corps dans lequel se trouvent leurs coefficients (de Taylor) joue un rôle important. En particulier, quand on considère ces anneaux comme des anneaux différentiels pour la dérivation par rapport à la variable, ce corps est le corps des constantes.

### 1. Le corps des constantes

**1.1. Corps ultramétriques.** — Un corps  $K$  est dit valué s'il est muni d'une *valeur absolue non-archimédienne* c'est-à-dire d'une application  $|\cdot|$  de  $K$  dans  $[0, \infty[$  vérifiant

$$|x| = 0 \Rightarrow x = 0 \quad , \quad |xy| = |x| |y| \quad , \quad |x + y| \leq \max \{ |x|, |y| \}.$$

Nous n'excluons pas le cas de la valeur absolue triviale ( $|x| = 0$  pour  $x \neq 0$ ). Pour chaque nombre  $\rho$  de l'intervalle  $]0, 1[$ , on peut aussi considérer la *valuation* définie par

$$v(x) \stackrel{\text{déf}}{=} -\log_{1/\rho}(x) = \log(x)/\log(\rho).$$

Dans certaines situations l'utilisation de la valuation est plus naturelle et simplifie les formules. Toutefois le passage de la valeur absolue à la valuation n'est pas toujours facile en particulier parce qu'elle renverse les inégalités. Pour garder une certaine unité dans ce livre nous n'utiliserons les valuations que de manière exceptionnelle. Ceci nous conduira, par exemple, à tracer systématiquement les graphes des fonctions en coordonnées logarithmiques. On note

- $\mathcal{O}_K = \{x \in K; |x| \leq 1\}$  l'anneau de valuation de  $K$ ,
- $\mathcal{P}_K = \{x \in K; |x| < 1\}$  son idéal maximal,
- $k = \mathcal{O}_K/\mathcal{P}_K$  son corps des restes,
- $p$  sa caractéristique résiduelle, c'est-à-dire la caractéristique du corps  $k$ .
- $|K^*| = \{|a|; a \in K^*\}$  son groupe des valeurs absolues. Ce groupe (multiplicatif) est naturellement isomorphe au groupe (additif)  $v(K^*) = \{v(a); a \in K^*\}$  des valuations de  $K$ .

Soit  $K$  un corps valué. Pour  $a$  dans  $K$  et  $r > 0$ , on pose

$$D_K(a, r) \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in K; |x - a| < r\}, \quad D_K(a, r^+) \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in K; |x - a| \leq r\}.$$

Si aucune confusion n'est à craindre, on écrira  $D(a, r)$  (resp.  $D(a, r^+)$ ) pour  $D_K(a, r)$  (resp.  $D_K(a, r^+)$ ). Le corps  $K$  est munit de la *topologie définie par la valeur absolue* c'est-à-dire celle pour laquelle les disques  $D(a, r)$  forment une base de voisinage du point  $a$ . La famille  $\{D(a, r^+)\}_{r>0}$  est alors aussi une base de voisinage de  $a$ .

Lorsque le corps valué  $K$  est complet, sa valeur absolue se prolonge de manière unique à sa clôture algébrique  $K^{\text{alg}}$  faisant de ce dernier un corps valué non complet mais dont la complétion  $\widehat{K}^{\text{alg}}$  est algébriquement close (et complète). Il résultera du lemme 2.14 que  $|K^{\text{alg}*}| = \sqrt{|K^*|} = \{|a|^{1/n}; a \in K, n \in \mathbb{N}\}$ .

**Exemple 1.1.** — On notera  $\mathbb{Q}_p$  le complété de  $\mathbb{Q}$  pour la valeur absolue  $p$ -adique (en général normalisée par  $|p| = 1/p$ ),  $\mathbb{Z}_p$  son anneau de valuation (complété de  $\mathbb{Z}$  pour la valeur absolue  $p$ -adique) et  $\mathbb{C}_p$  le complété de la clôture algébrique de  $\mathbb{Q}_p$ .

Dans ce livre,  $K$  sera un corps valué et complet de caractéristique nulle,

on notera  $p$  la caractéristique de son corps résiduel.

En particulier, si  $p \neq 0$ , le corps  $K$  contient un sous corps valué isomorphe à  $\mathbb{Q}_p$ .

**Lemme 1.2.** — Soit  $K$  un corps valué et soit  $\sigma : K \rightarrow K$  un endomorphisme (de corps) qui est continu pour la topologie définie par la valeur absolue. S'il existe un élément  $u$  de  $K$  tel que  $0 < |u| < 1$  et  $\sigma(u) = u$ . Alors  $\sigma$  est une isométrie.

*Preuve.* — L'endomorphisme  $\sigma$  étant continu. Pour  $a$  dans  $K$ , on a :

$$|a| < 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(a^n) = 0 \implies |\sigma(a)| < 1.$$

On en déduit que, pour  $a$  et  $b$  dans  $K$ ,

$$|a| < |b| \implies \left| \frac{a}{b} \right| < 1 \implies \left| \sigma\left(\frac{a}{b}\right) \right| < 1 \implies |\sigma(a)| < |\sigma(b)|.$$

Par ailleurs, pour  $a$  dans  $K^*$ , il existe un entier  $n$  tel que  $|u|^{n-1} < |a| < |u|^{n+1}$ . On a alors  $|u|^{n-1} = |\sigma(u)|^{n-1} < |\sigma(a)| < |\sigma(u)|^{n+1} = |u|^{n+1}$ . On en déduit que

$$|u|^{-2} = \frac{|u|^{n-1}}{|u|^{n+1}} < \frac{|\sigma(a)|}{|a|} < \frac{|u|^{n+1}}{|u|^{n-1}} = |u|^2.$$

Cet encadrement étant valable pour tout nombre de  $K^*$ , il est aussi valable pour  $a^s$  pour  $s$  entier. Il vient donc

$$|u|^{-2} < \left| \frac{\sigma(a)}{a} \right|^s < |u|^2$$

c'est-à-dire  $|u|^{-2/s} < \left| \frac{\sigma(a)}{a} \right| < |u|^{2/s}$ . Il suffit alors de faire tendre  $s$  vers l'infini pour obtenir  $|\sigma(a)| = |a|$ .  $\square$

Si la valeur absolue de  $K$  est triviale, tout endomorphisme injectif de  $K$  est évidemment une isométrie. Lorsque la valeur absolue de  $K$  est non triviale, ce n'est plus le cas comme le montre l'exercice 1.3. une hypothèse du genre "la valeur absolue restreinte au sous-corps des invariants de  $\sigma$  n'est pas triviale" (qui est celle du lemme 1.2) est indispensable

**Exercice 1.3.** — Soit  $k$  un corps. On choisit un nombre  $\rho$  de l'intervalle  $]0, 1[$  et on munit le corps  $K = k((x))$  de la valeur absolue associée à la valuation " $x$ -adique"

$$\left| \sum_{s=d}^{\infty} \alpha_s x^s \right| = \rho^d \quad \text{si} \quad \alpha_d \neq 0$$

Vérifier que l'application  $\sigma : f(x) \mapsto f(x^2)$  est un endomorphisme injectif de  $K$  mais pas une isométrie.

**Corollaire 1.4.** — Si le corps valué  $K$  contient le corps  $\mathbb{Q}_p$  comme sous corps valué. Tout endomorphisme (de corps) de  $K$  qui est continu pour la topologie définie par la valeur absolue est une isométrie.

*Preuve.* — Pour tout endomorphisme  $\sigma$  de  $K$  et tout entier  $n$ , on a  $\sigma(n) = n$ . Comme  $K \supset \mathbb{Q}_p$ , on a  $0 < |p| < 1$  et l'élément  $u = p$  satisfait l'hypothèse du lemme 1.2.  $\square$

**Définition 1.5.** — On définit le nombre  $\omega$  par la formule :

$$\omega = \begin{cases} |p|^{1/(p-1)} < 1 & \text{si } p \neq 0 \\ 1 & \text{si } p = 0 \end{cases}$$

Le corollaire 1.7 montre que  $\omega$  est le rayon de convergence de la fonction exponentielle. C'est l'une des raisons pour laquelle ce nombre va intervenir dans les calculs. Sa définition introduit aussi une différence fondamentale entre le cas de la caractéristique résiduelle nulle et celui de la caractéristique résiduelle non nulle.

**Lemme 1.6.** — Pour  $p > 0$ ,  $s \geq 1$  et la normalisation  $|p| = p^{-1}$ , on a

$$\omega^{s-1} \leq |s!| \leq \omega^s (s+1)$$

avec égalité respectivement pour  $s = p^h$  et  $s = p^h - 1$ .

*Preuve.* — On utilise la valuation normalisée par  $v(p) = 1$  de telle sorte que

$$|x| = |p|^{v(x)} = p^{-v(x)} \quad v(x) = -\log_p(|x|).$$

On note  $[x]$  la partie entière de  $x$  et on écrit l'entier  $s$  dans la base  $p$  :  $s = \sum_{i=0}^h s_i p^i$  avec  $0 \leq s_i \leq p-1$  et  $h = \lfloor \log_p(s) \rfloor$ . Il vient :

$$\begin{aligned} v(s!) &= \sum_{j=1}^{\infty} [s p^{-j}] = \sum_{j=1}^h \sum_{i=j}^h s_i p^{i-j} = \sum_{i=1}^h s_i \sum_{j=1}^i p^{i-j} \\ &= \sum_{i=1}^h s_i \frac{p^i - 1}{p-1} = \frac{1}{p-1} \left( s - \sum_{i=0}^h s_i \right). \end{aligned}$$

D'une part, comme  $s \geq 1$ , on a  $1 \leq \sum_{i=0}^h s_i$ , avec égalité pour  $s = p^h$ .

D'autre part, on va montrer que

$$(1) \quad \frac{1}{p-1} \sum_{i=0}^h s_i \leq \sum_{i=0}^h \log_p(s_i + 1) \leq \log_p(s+1).$$

avec égalité pour  $s = p^{h+1} - 1$ . L'encadrement du lemme s'en déduit facilement.

Pour la première majoration de (1), on remarque que, pour  $0 \leq s \leq p-1$ , on a  $s \leq (p-1) \log_p(s+1)$ , car la fonction  $s \mapsto \log_p(s+1)$  est concave sur l'intervalle  $[0, p-1]$  et prend les valeurs 0 et 1 aux extrémités de cet intervalle.

Pour la deuxième majoration de (1) on fait une récurrence sur  $h$ .

Pour  $h = 0$ , on a  $s = s_0$  et le résultat est évident.

Pour  $h > 0$ , on pose  $\tilde{s} = \sum_{i=0}^{h-1} s_i p^i \leq p^h - 1$ . L'hypothèse de récurrence donne :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^h \log_p(s_i + 1) &\leq \log_p(\tilde{s} + 1) + \log_p(s_h + 1) = \log_p((\tilde{s} + 1)s_h + \tilde{s} + 1) \\ &\leq \log_p(p^h s_h + \tilde{s} + 1) = \log_p(s + 1). \end{aligned} \quad \square$$

**Corollaire 1.7.** — On a  $\omega = \lim |s!|^{1/s}$ .

*Preuve.* — C'est évident si  $p = 0$  car alors  $|s!| = 1$  pour tout entier  $s \neq 0$ .

Si  $p > 0$ , c'est une conséquence facile du lemme 1.6. □

**Définition 1.8.** — On dit que le corps  $K$  est à *valuation discrète* si le groupe  $|K^*|$  est un sous-groupe discret de  $\mathbb{R}^*$ . Dans ce cas, on appelle *uniformisante* du corps  $K$  tout nombre  $\varpi$  de l'anneau de valuation  $\mathcal{O}_K$  dont la valeur absolue  $|\varpi|$  engendre le groupe  $|K^*|$ , autrement dit tel que  $|\varpi| < 1$  et  $|K^*| = |\varpi|^{\mathbb{Z}}$ .

**Définition 1.9.** — On dit que le corps  $K$  est *sphériquement complet* si, dans  $K$ , toute suite de disques  $D_n = D_K(\alpha_n, r_n) = \{x \in K; |x - \alpha_n| \leq r_n\}$  emboîtés (c'est-à-dire tels que  $D_{n+1} \subset D_n$ ) a une intersection non vide.

**Remarque 1.10.** — On dit que le corps  $K$  est *maximalement complet* s'il n'a pas d'*extension immédiate* c'est-à-dire de corps le contenant strictement mais ayant le même corps des restes et le même ensemble de valeurs absolues. On montre qu'un corps est maximalement complet si et seulement s'il est sphériquement complet [32].

Selon les situations, nous devons supposer que le corps  $K$  a certaines propriétés. Malheureusement, celles-ci sont incompatibles. Par exemple, si le corps  $K$  est algébriquement clos, il n'est pas à valuation discrète. On peut le supposer sphériquement complet et algébriquement clos, mais il est alors vraiment très gros ce qui entraîne aussi des difficultés. On arrive à contourner tous ces problèmes, mais il faudra soigneusement préciser les hypothèses faites dans chaque théorème et éviter qu'elles ne soient contradictoires.

**Exercice 1.11.** — Montrer qu'un corps à valuation discrète est sphériquement complet si et seulement s'il est complet [on montrera que les suites de disques emboîtés sont soit constantes soit ont une intersection réduite à un point].

**Exercice 1.12.** — Montrer que le corps  $\mathbb{C}_p$ , complété de la clôture algébrique de  $\mathbb{Q}_p$ , n'est pas sphériquement complet [en utilisant la dénombrabilité de l'ensemble des nombres algébriques sur  $\mathbb{Q}$  et le fait que ces nombres sont denses dans  $\mathbb{C}_p$ , on montrera que l'ensemble des disques de rayon  $r > 0$  donné est dénombrable contrairement à l'ensemble des intersections des suites de disques emboîtés dont le rayon tend vers  $r$ ].

**1.2. Espaces vectoriels topologiques.** — Un  $K$ -espace vectoriel  $E$  est dit topologique s'il est muni d'une topologie pour la quelle les applications  $(x, y) \mapsto x + y$  et  $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$  (respectivement de  $E \times E$  et  $K \times E$  dans  $E$ ) sont continues.

**Définitions 1.13.** — Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel topologique.

- Une partie  $V$  de  $E$  est dite *absorbante* si  $E = \bigcup_{\lambda \in K} \lambda V$ . Par exemple, tout voisinage  $V$  de 0 dans un espace vectoriel topologique est une partie absorbante (l'application  $\lambda \mapsto \lambda x$  est continue).
- Une partie  $B$  de  $E$  est dite *bornée* si, pour tout voisinage  $V$  de 0, il existe un nombre  $\lambda$  du corps  $K$  tel que  $B$  soit contenue dans  $\lambda V$ .
- Le *dual* (fort)  $E'$  de  $E$  est le  $K$ -espace vectoriel des formes linéaires continues sur  $E$  muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de  $E$ . Autrement dit, une base de voisinages de 0 dans  $E'$  est formée par les sous-ensembles *polaires*  $B^o = \{T \in E' ; (\forall x \in B) |T(x)| \leq 1\}$  des parties bornées  $B$  de  $E$ .

Dans le cadre ultramétrique, supposer le corps  $K$  localement compact (c'est-à-dire à valuation discrète et avec un corps des restes fini) est une restriction souvent trop contraignante. La démonstration "classique" du théorème 1.14 n'est donc pas suffisante. Celle, plus générale, donnée ici se trouve dans [30] page 50. Le cas des espaces normés est aussi traité dans [2] page 19 (réédition [3]) ou dans [11] page 3.

**Théorème 1.14.** — *Le corps  $K$  étant supposé complet, tout  $K$ -espace vectoriel  $E$  topologique séparé de dimension finie  $n$  est homéomorphe à  $K^n$  muni de la topologie produit. En particulier, toutes les normes définies sur  $E$  sont équivalentes.*

*Preuve.* — On choisit une base  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  de  $E$  et on montre que la bijection canonique  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \sum \lambda_i \mathbf{e}_i$  de  $K^n$  dans  $E$  est un homéomorphisme. Par définition d'un espace vectoriel topologique, cette application est continue. Il reste à montrer que son application réciproque est continue ce que l'on va faire par récurrence sur la dimension  $n$ .

Pour  $n = 1$ ,  $\varepsilon > 0$  étant donné, il faut trouver un voisinage  $V$  de 0 dans  $E$  tel que l'on ait  $|\lambda| < \varepsilon$  dès que  $\lambda \mathbf{e}_1$  appartient à  $V$ .

*Construction de  $V$  :* l'espace  $E$  étant séparé, il existe un voisinage  $V_1$  de 0 qui ne contient pas  $\mathbf{e}_1$ . Par continuité de l'application  $(\mu, x) \mapsto \mu x$ , il existe  $\alpha > 0$  et un voisinage  $W$  de 0 tels que  $\mu x$  appartient à  $V_1$  dès que  $|\mu| < \alpha$  et  $x$  appartient à  $W$ . Choisissons un nombre  $c$  du corps  $K$  tel que  $0 < |c| < \alpha\varepsilon$  et posons  $V = cW$ . C'est un voisinage de 0 comme image réciproque de  $W$  par l'application  $x \mapsto \frac{1}{c}x$ .

*$V$  convient :* soit  $\lambda \mathbf{e}_1$  dans  $V$ . Par définition de  $V$ ,  $\frac{\lambda}{c} \mathbf{e}_1$  appartient à  $W$ . Si  $|\lambda| \geq \varepsilon$ , on aurait  $|c| < \alpha\varepsilon \leq \alpha|\lambda|$  et donc  $\mathbf{e}_1 = \frac{c}{\lambda} (\frac{\lambda}{c} \mathbf{e}_1)$  appartiendrait à  $V_1$  ce qui n'est pas.

Pour  $n > 1$ , on montre que les formes linéaires  $\ell_i : \sum \lambda_j \mathbf{e}_j \mapsto \lambda_i$  sont continues ce qui, d'après la définition de la topologie produit, suffit pour conclure.

Le noyau  $\bigoplus_{j \neq i} K \mathbf{e}_j$  de  $\ell_i$  est un espace vectoriel de dimension  $n - 1$ . Muni de la topologie induite, il est séparé donc homeomorphe à  $K^{n-1}$  d'après l'hypothèse de récurrence. En particulier, il est complet donc c'est un fermé de  $E$ . Il en résulte que  $K \mathbf{e}_i = E / \ker(\ell_i)$  muni de la topologie quotient est séparé. Comme c'est un espace vectoriel de dimension 1, l'application  $\lambda_i \mathbf{e}_i \mapsto \lambda_i$  est continue. Mais, par définition de la topologie quotient, l'application  $\sum \lambda_j \mathbf{e}_j \mapsto \lambda_i \mathbf{e}_i$  est continue. Donc l'application  $\ell_i$  est continue comme composée de deux applications continues.

Le cas des espaces normés se déduit du cas général.  $\square$

**Remarque 1.15.** — L'hypothèse de complétude est indispensable dans le théorème 1.14. Supposons en effet le corps  $K$  non complet. Soit  $\widehat{K}$  son complété et soit  $e$  un élément de  $\widehat{K}$  qui n'appartient pas à  $K$ . Le  $K$ -espace vectoriel engendré par  $\{1, e\}$  dans  $\widehat{K}$  est algébriquement isomorphe à  $K^2$ . La topologie induite par celle de  $\widehat{K}$  et celle donnée par cet isomorphisme sont différentes : si  $(\lambda_n)$  est une suite de  $K$  qui tend vers  $e$  dans  $\widehat{K}$ , la suite  $(\lambda_n - e)$  tend vers 0 pour la topologie de  $\widehat{K}$  mais diverge pour celle de  $K^2$ .

Une *semi-norme* ultramétrique sur un  $K$ -espace vectoriel  $E$  est une application de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  telle que

- pour  $x$  dans  $E$  et  $\lambda$  dans  $K$  :  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ,
- pour  $x$  et  $y$  dans  $E$  :  $\|x + y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|)$ .

Une *norme* sur  $E$  est une semi-norme telle que  $\|x\| = 0$  implique  $x = 0$ .

Deux normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  sont dites équivalentes si elles définissent la même topologie c'est-à-dire s'il existe  $m > 0$  et  $M$  tel que  $m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1$  pour tout  $x$  de  $E$ .

**Définition 1.16.** — Un  $K$ -espace *localement convexe* est un  $K$ -espace vectoriel muni d'une topologie définie par une famille  $\{\|\cdot\|_i\}_{i \in I}$  de semi-normes, c'est-à-dire pour laquelle les intersections finies  $\{x \in E; (\forall i \in J) \|x\|_i < \varepsilon\}_{\varepsilon > 0, J \subset I, J \text{ fini}}$  forment un système fondamental de voisinages de 0.

Lorsque la famille de semi-normes est réduite à un élément qui est une norme, on dit que l'espace est *normé*.

Un espace localement convexe est clairement un espace vectoriel topologique. Ceux que nous aurons à considérer seront de l'un des types suivants

- *espace de Banach* c'est-à-dire espace normé complet,
- *espace de Fréchet* c'est-à-dire espace métrique complet,
- espace localement convexe séparé complet.

Pour préciser ces notions, rappelons rapidement les bases de la théorie des filtres.

**Définitions 1.17.** — Soit  $(X_i)_{i \in I}$  une famille non vide de parties d'un espace topologique  $E$ . On dit que la famille

1. est *emboîtée* si, pour  $i$  et  $j$  dans  $I$ , on a soit  $X_i \subset X_j$  soit  $X_j \subset X_i$ ,
2. a des *intersections finies non vides* si, pour  $J$  partie finie de  $I$ ,  $\bigcap_{i \in J} X_i \neq \emptyset$ ,
3. est une *base de filtre* si les  $X_i$  sont non vides et si toute intersection  $X_i \cap X_j$  contient un élément de la famille.
4. est un *filtre* si c'est une base de filtre et si toute partie qui contient l'un des  $X_i$  est elle-même dans la famille.

- Une famille emboîtée de parties non vides a des intersections finies non vides.
- Si la famille  $(X_i)_{i \in I}$  a des intersections non vides, la famille formée par ces intersections est une base de filtre. En particulier une famille emboîtée est une base de filtre.
- Si la famille  $(X_i)_{i \in I}$  est une base de filtre, alors la famille formée par les parties  $X$  de  $E$  qui contiennent l'un des  $X_i$  est un filtre.
- Par exemple l'ensemble  $\mathcal{V}(x)$  des voisinages d'un point  $x$  de  $E$  est un filtre.

Un filtre  $(X_i)$  est dit *plus fin* que le filtre  $(Y_j)$  si chaque  $X_i$  est l'un des  $Y_j$  (cette relation d'ordre n'est autre que l'inclusion dans l'ensemble  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ ).

- Les filtres maximum pour cette relation d'ordre sont appelés *ultrafiltres*.
- On dit qu'un filtre *converge* vers  $x$  s'il est plus fin que le filtre  $\mathcal{V}(x)$ .
- On dit que le point  $x$  est *adhérent* à un filtre  $(X_i)$  s'il existe un filtre plus fin à la fois que  $(X_i)$  et que  $\mathcal{V}(x)$ .
- Si l'espace est séparé les filtres  $\mathcal{V}(x)$  sont des ultrafiltres.

**Définition 1.18.** — Un filtre  $(X_i)_{i \in I}$  sur un espace localement convexe  $E$  est dit *de Cauchy* si pour toute semi-norme  $\|\cdot\|$  de la famille définissant la topologie de  $E$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un indice  $i$  tel que  $\|x - y\| < \varepsilon$  pour  $x$  et  $y$  dans  $X_i$ . L'espace  $E$  est dit *complet* (resp *séquentiellement complet*) si tout filtre de Cauchy (resp. toute suite de Cauchy) converge.

**Exemple 1.19.** — Le filtre  $\mathcal{V}(x)$  est de Cauchy car il contient les  $\{y; \|y - x\| < \varepsilon\}$ .

**Remarque 1.20.** — Un espace localement convexe dont la topologie est séparée et peut être définie par une famille dénombrable de semi-normes  $\|\cdot\|_n$  est métrisable. On peut en effet le munir de la distance  $d(x, y) = \sum 2^{-n} \min\{1, \|x - y\|_n\}$ . Un espace métrique est complet si et seulement s'il est séquentiellement complet. C'est alors, par définition un *espace de Fréchet*.

**Définitions 1.21.** — Soit  $U$  une partie d'un  $K$  espace vectoriel (ou plus généralement d'un  $\mathcal{O}_K$ -module)  $E$ . On dit que

- $U$  est *absolument convexe* si c'est un sous- $\mathcal{O}_K$ -module de  $E$  c'est-à-dire si, pour  $x$  et  $y$  dans  $U$  et  $\lambda$  et  $\mu$  dans  $\mathcal{O}_K$ ,  $\lambda x + \mu y$  appartient à  $U$ ,
- $U$  est *convexe* si c'est un translaté d'une partie absolument convexe c'est-à-dire si, pour  $x_i$  dans  $U$  et  $\lambda_i$  dans  $\mathcal{O}_K$  vérifiant  $\sum_{i=1}^s \lambda_i = 1$ , on a  $\sum_{i=1}^s \lambda_i x_i$  dans  $U$ .

**Exercice 1.22.** — On suppose que  $p > 2$ . Vérifier que  $U$  est convexe si, pour  $x$  et  $y$  dans  $U$  et  $\lambda$  et  $\mu$  dans  $\mathcal{O}_K$  tels que  $\lambda + \mu = 1$ , on a  $\lambda x + \mu y$  dans  $U$ .

Vérifier que les combinaisons linéaires de deux éléments ne suffisent pas assurer la convexité dans le cas  $p = 2$  mais que l'on peut alors se limiter à des combinaisons linéaires de trois éléments.

**Remarque 1.23.** — A une partie absolument convexe et absorbante  $V$  d'un  $K$  espace vectoriel  $E$ , on associe la semi-norme  $\mathfrak{p}_V$  définie par

$$\mathfrak{p}_V(x) = \inf\{|\lambda|; \lambda \in K, x \in \lambda V\}.$$

Inversement, à une semi-norme  $\mathfrak{p}$  on peut associer les parties

$$V_{\mathfrak{p}}^- = \{x \in E; \mathfrak{p}(x) < 1\} \quad \text{et} \quad V_{\mathfrak{p}}^+ = \{x \in E; \mathfrak{p}(x) \leq 1\}$$

qui sont absolument convexes et absorbantes. Quand le corps  $K$  est à valuation discrète, l'application  $\mathfrak{p} \mapsto V_{\mathfrak{p}}^+$  est une bijection de l'ensemble des semi-normes à valeurs dans  $|K|$  dans l'ensemble des parties absolument convexes et absorbantes.

Lorsque  $K$  n'est pas à valuation discrète, on a seulement  $V_{\mathfrak{p}_V}^- \subset V \subset V_{\mathfrak{p}_V}^+$ . Dans tous les cas, on constate que la topologie de  $E$  est localement convexe si et seulement si elle possède un système fondamental de voisinages de 0 formé de parties absolument convexes (a priori fermées si on considère les  $V^+$ , ouvertes si on considère les  $V^-$  mais en fait ouvertes et fermées dans les deux cas) ce qui justifie la terminologie.

**Définition 1.24.** — Un espace localement convexe  $E$  est dit *tonnelé* si toute partie fermée, absolument convexe et absorbante de  $E$  est un voisinage de zéro.

Le théorème de Baire montre que tout espace de Fréchet est tonnelé.

**1.3. Différentes notions de compacité.** — En général, le corps  $K$  n'est pas localement compact. La notion de compact n'est donc pas adaptée pour l'étude des  $K$ -espaces vectoriels localement convexes. Toutefois, on a introduit plusieurs analogues de la compacité. Dans ce paragraphe, nous définissons les trois plus importantes et nous étudions leurs relations.

**1.3.1.  $\mathcal{O}_K$ -module linéairement compact.** — La première notion est définie par une variante algébrique de la propriété de Borel-Lebesgue dans laquelle les convexes remplacent les fermés (mais la réunion de deux convexes n'est pas un convexe !).

**Définition 1.25.** — Un  $\mathcal{O}_K$ -module  $U$  est dit *linéairement compact* si toute famille de *parties convexes* de  $U$  dont les intersections finies sont non vides a une intersection non vide.

Tout sous-module (resp. module quotient) d'un  $\mathcal{O}_K$ -module linéairement compact est évidemment linéairement compact.

**Proposition 1.26.** — *Un espace vectoriel  $F$  de dimension finie sur un corps  $K$  sphériquement complet est linéairement compact.*

*Preuve.* — On fait une démonstration par récurrence sur la dimension de  $F$ .

Si  $F$  est de dimension 1, les parties convexes de  $F$  sont des disques. Comme  $K$  est ultramétrique, deux disques ayant une intersection non vide sont emboîtés. Une famille de parties convexes de  $K$  est donc une famille emboîtée de disques. Seule une infinité dénombrable de ces disques sont distincts et leur intersection est non vide car le corps  $K$  est sphériquement complet.

Si  $F$  est de dimension  $n$ , on le décompose en somme directe  $G \oplus H$  avec  $G$  et  $H$  de dimension non nulle. Soit  $(X_i)$  une famille de convexe ayant des intersections finies non vides. L'image d'un convexe par une application linéaire étant un convexe, si on note  $p$  la projection de  $F$  sur  $H$ , la famille  $(p(X_i))$  a des intersections finies non vides donc, d'après l'hypothèse de récurrence, une intersection qui contient au moins un point  $x$ . Maintenant, la famille de convexe  $(p^{-1}(x) \cap X_i)$  est contenue dans l'espace affine  $p^{-1}(x)$ , isomorphe à  $G$ , et a des intersections finies non vides. Elle a donc une intersection non vide d'après l'hypothèse de récurrence. Ceci permet de conclure car  $\bigcap X_i \supset \bigcap (p^{-1}(x) \cap X_i) \neq \emptyset$ .  $\square$

Le lemme suivant n'est évidemment intéressant que pour les modules de torsion.

**Lemme 1.27.** — *Dans un  $\mathcal{O}_K$ -module,  $\lambda x = 0$  et  $x \neq 0$  implique  $|\lambda| < 1$ .*

*Preuve.* — Si  $|\lambda| = 1$ ,  $\lambda$  est inversible dans  $\mathcal{O}_K$  et  $\lambda x = 0$  implique  $x = \frac{1}{\lambda} \lambda x = 0$ .  $\square$

On peut donner une sorte de réciproque de la proposition 1.26.

**Proposition 1.28.** — *Un  $\mathcal{O}_K$ -module  $U$  linéairement compact contient un sous-module  $M$  de type fini tel que, pour tout  $x \neq 0$  de  $U$ ,  $\mathcal{O}_K x \cap M \neq \{0\}$  (on dit alors que  $U$  est une extension essentielle de  $M$ ).*

*Preuve.* — Supposons, a contrario, que, pour tout sous-module  $M$  de type fini de  $U$ , il existe un élément  $x_M$  non nul de  $U$  tel que  $\mathcal{O}_K x_M \cap M = \{0\}$ . On pourrait alors construire par récurrence, une suite  $(x_m)$  d'éléments *non nuls* de  $U$  en posant

$$M_0 = \{0\}, \quad x_m = x_{M_m} \quad \text{avec} \quad M_m = \mathcal{O}_K x_0 + \cdots + \mathcal{O}_K x_{m-1}.$$

Par construction on aurait  $\mathcal{O}_K x_m \cap M_m = \{0\}$  c'est-à-dire

$$x_m \neq 0 \quad \text{et} \quad \left( \lambda_i \in \mathcal{O}_K; \sum_{i=0}^m \lambda_i x_i = 0 \right) \Rightarrow \lambda_m x_m = 0.$$

Par récurrence descendante, on obtiendrait

$$(2) \quad \left( \lambda_i \in \mathcal{O}_K; \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i = 0 \right) \Rightarrow (\forall i) \quad \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow (\forall i) \quad |\lambda_i| < 1.$$

Or cette implication n'est pas toujours vraie. En effet, notons  $X_n$  le plus petit convexe de  $U$  qui contient les  $x_m$  pour  $m \geq n$  : c'est l'ensemble des sommes  $\sum_{m \geq n} \lambda_m x_m$

avec  $\lambda_m$  dans  $\mathcal{O}_K$  presque tous nuls et  $\sum \lambda_m = 1$ . La famille  $(X_n)$  est emboîtée. L'intersection des  $X_n$  contient donc au moins un point  $x$ .

Comme  $x$  appartient à  $X_0$ , on a  $x = \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i$  avec  $\lambda_i$  dans  $\mathcal{O}_K$  et  $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ . Mais comme  $x$  appartient à  $X_{n+1}$ , on peut aussi trouver des  $\lambda_i$  dans  $\mathcal{O}_K$  tels que  $x = \sum_{i=n+1}^N (-\lambda_i) x_i$  (et  $\sum_{i=n+1}^N (-\lambda_i) = 1$ ). On en conclut que  $\sum_{i=0}^N \lambda_i x_i = 0$ . Mais on a évidemment  $\max |\lambda_i| = 1$  ce qui contredit l'implication (2).  $\square$

**Corollaire 1.29.** — *Soit  $K$  un corps sphériquement complet et  $E$  un  $K$ -espace vectoriel. Une partie absolument convexe de  $E$  (c'est-à-dire un sous  $\mathcal{O}_K$ -module) est linéairement compacte si et seulement si elle est contenue dans un sous-espace vectoriel de dimension finie.*

Soit  $C$  un  $\mathcal{O}_K$ -module contenu dans un  $K$ -espace vectoriel  $A$ . Il n'est pas difficile de prolonger une application  $\mathcal{O}_K$ -linéaire (morphisme de  $\mathcal{O}_K$ -module) de  $C$  dans un  $K$ -espace vectoriel  $B$  (de dimension finie) en une application  $K$ -linéaire de  $A$  dans  $B$ . La proposition suivante généralise cette situation à des modules éventuellement de torsion.

**Proposition 1.30.** — *Soit  $A$  et  $B$  deux  $\mathcal{O}_K$ -modules,  $C$  un sous-module de  $A$  et  $f$  une application  $\mathcal{O}_K$ -linéaire de  $C$  dans  $B$ . On suppose que  $B$  est linéairement compact et qu'il existe  $\lambda$  dans  $\mathcal{O}_K$  tel que*

1.  $\lambda x = 0$  pour tout élément  $x$  de  $A$ ,
2. pour  $z$  dans  $B$  et  $\mu$  dans  $\mathcal{O}_K$  tel que  $|\lambda| < |\mu|$  et  $\frac{\lambda}{\mu} z = 0$ , il existe  $y$  dans  $B$  tel que  $\mu y = z$  (si  $\lambda = 0$  on dit que  $B$  est divisible).

Alors  $f$  se prolonge (en général de manière non unique) en une application  $\mathcal{O}_K$ -linéaire  $\tilde{f}$  de  $A$  dans  $B$ .

*Preuve.* — Considérons l'ensemble des couples  $(Q, \tilde{f})$  formés d'un sous-module  $Q$  de  $A$  contenant  $C$  et d'une application  $\mathcal{O}_K$ -linéaire  $\tilde{f}$  de  $Q$  dans  $B$  prolongeant  $f$ . C'est un ensemble inductif pour la relation d'ordre "prolongement" :  $(Q, \tilde{f}) \leq (R, \tilde{g})$  si  $Q$  est un sous-module de  $R$  et  $\tilde{f}$  est la restriction de  $\tilde{g}$  à  $Q$ . Notons  $(Q, \tilde{f})$  un élément maximal. Supposons qu'il existe  $x$  dans  $A$  mais pas dans  $Q$ . L'ensemble  $I_x$  des scalaires  $\mu$  de  $\mathcal{O}_K$  tels que  $\mu x$  appartienne à  $Q$  est un idéal de  $\mathcal{O}_K$  (éventuellement réduit à 0.). Pour  $\mu$  dans  $I_x$ , on considère l'ensemble

$$D_\mu = \left\{ y \in B ; \mu y = f(\mu x) \right\}.$$

On vérifie facilement que  $D_\mu$  est convexe. C'est aussi une partie non vide de  $B$  :

- pour  $|\mu| \leq |\lambda|$ , on a  $\mu x = 0$  donc  $f(\mu x) = 0 = \mu \cdot 0$  et  $0 \in D_\mu$ ,
- pour  $|\mu| > |\lambda|$ , posant  $z = f(\mu x)$ , on a  $\frac{\lambda}{\mu} z = f(\lambda x) = 0$ . D'après l'hypothèse 2, il existe  $y$  dans  $B$  tel que  $\mu y = z$  donc dans  $D_\mu$ .

Pour  $|\mu| \geq |\mu'|$ , la  $\mathcal{O}_K$ -linéarité de  $f$  montre que  $D_\mu \subset D_{\mu'}$ . Donc la famille  $(D_\mu)_{\mu \in I_x}$  est emboîtée. Comme  $B$  est linéairement compact, on peut choisir un élément  $y$  dans l'intersection des  $D_\mu$ . Par construction, on a  $\mu y = f(\mu x)$  dès que  $\mu x$

appartient à  $Q$ . On définit alors une application  $\mathcal{O}_K$ -linéaire  $\tilde{g}$  de  $Q + \mathcal{O}_K x$  dans  $B$  en posant, pour  $\mu$  dans  $\mathcal{O}_K$ ,

$$\tilde{g}(z + \mu x) = \tilde{f}(z) + \mu y.$$

C'est un prolongement de  $\tilde{f}$  ce qui contredit la maximalité de  $\tilde{f}$ . Donc  $Q = A$ .  $\square$

*1.3.2. Parties  $c$ -compactes.* — La proposition 1.28 et son corollaire montrent qu'un produit infini de modules linéairement compacts n'est pas linéairement compact. Nous devons introduire une notion plus topologique pour obtenir la stabilité par produit quelconque. Nous nous limiterons à des  $\mathcal{O}_K$ -modules sans torsion, c'est-à-dire à des parties absolument convexes d'un espace localement convexe.

**Définition 1.31.** — Une partie  $U$  d'un  $K$ -espace localement convexe  $E$  est dite  *$c$ -compacte* si elle est absolument convexe et si toute famille de parties de  $U$  convexes et fermées (pour la topologie induite), dont les intersections finies sont non vides, a une intersection non vide.

**Remarque 1.32.** — Soit  $U$  une partie  $c$ -compacte d'un espace localement convexe  $E$ , et soit  $V$  un ouvert absolument convexe de  $E$ . Alors le quotient  $U/V$  est un  $\mathcal{O}_K$ -module linéairement compact. En effet, par construction, il est muni de la topologie discrète. En particulier, ses parties convexes sont fermées et leurs relèvements dans  $U$  sont des parties convexes et fermées de  $U$ .

**Exercice 1.33.** — Une conséquence de la remarque précédente est que  $V \cap U$  est un ensemble fermé. Montrer directement qu'un ouvert absolument convexe est fermé.

Les définitions étant voisines, il n'est pas étonnant que les parties  $c$ -compactes aient des propriétés analogues à celles des compacts.

**Proposition 1.34.** — Soit  $E$  un espace localement convexe.

1. toute partie  $V$  absolument convexe contenue et fermée dans une partie  $c$ -compacte  $U$  de  $E$  est  $c$ -compacte.

Si  $E$  est séparé,

2. toute partie  $c$ -compacte de  $E$  est fermée,
3. toute intersection (resp. réunion finie) de parties  $c$ -compactes est  $c$ -compacte.

*Preuve.* — 1.– Les fermés convexes de  $V$  sont des fermés convexes de  $U$ .

2.– Soit  $x$  un point adhérent à  $U$ . La famille  $\{V \cap U\}$  indexée par les voisinages fermés  $V$  de  $x$  a des intersections finies non vides. Par définition de la topologie induite, c'est une famille de fermés. Comme  $U$  est  $c$ -compacte, elle a une intersection non vide. L'espace localement convexe  $E$  étant séparé, l'intersection des voisinages (fermés)  $V$  de  $x$  est réduite à  $\{x\}$ . Donc  $x$  appartient à  $U$ .

3.– Soit  $U_i$  une famille de parties  $c$ -compactes, donc fermées d'après 2. Leur intersection est fermée et contenue dans l'une d'entre elles, donc  $c$ -compacte d'après 1.

Soit  $U_1, \dots, U_n$  des parties  $c$ -compactes et soit  $F_i$  une famille de parties convexes fermées contenues dans leur union et ayant des intersections non vides. Si, pour tout  $1 \leq j \leq n$  il existait une intersection finie  $G_j$  de parties  $F_i$  telle que  $U_j \cap G_j = \emptyset$ , alors  $F = \cap G_j$  aurait une intersection vide avec chacun des  $U_j$  donc serait vide, ce qui n'est

pas. Donc il existe un indice  $j$  tel que les (fermés)  $U_j \cap F_i$  aient des intersections finies non vides et donc une intersection non vide car  $U_j$  est  $c$ -compacte. L'intersection des  $F_i$  n'est donc pas vide.  $\square$

**Définitions 1.35.** — Soit  $(X_i)_{i \in I}$  une famille non vide de parties d'un espace localement convexe  $E$ . On dit que la famille est

1. une *base de filtre convexe* si c'est une base de filtre et si les  $X_i$  sont convexes,
  2. un *filtre convexe* si c'est un filtre engendré par une base de filtre convexe,
  3. un filtre convexe *maximal* s'il n'existe pas de filtre convexe strictement plus fin.
- Si la famille de convexes  $(X_i)_{i \in I}$  a des intersections non vides, alors la famille formée par ces intersections est une base de filtre convexe.
  - La base de filtre convexe engendrant un filtre convexe n'est pas unique.
  - La famille  $\mathcal{V}(x)$  des voisinages d'un point  $x$  est un filtre convexe.
  - Un filtre convexe maximal possède un point adhérent si et seulement s'il converge. Si l'espace  $E$  est séparé, il est alors de la forme  $\mathcal{V}(x)$ .

**Proposition 1.36.** — *Une partie absolument convexe  $U$  d'un espace localement convexe séparé est  $c$ -compacte si et seulement si tout filtre convexe maximal sur  $U$  converge.*

*Preuve.* — Supposons que  $U$  est  $c$ -compacte. Soit  $(X_i)_{i \in I}$  une famille de convexes contenus dans  $U$  formant la base d'un filtre convexe maximal  $\mathcal{F}$ . La famille  $(\overline{X_i})_{i \in I}$  des adhérences forme une famille de fermés convexes ayant des intersections finies non vides. L'intersection des  $\overline{X_i}$  est donc non vide et tout point de cette intersection est un point adhérent de  $\mathcal{F}$ . Ce filtre convexe étant maximal, il converge.

Supposons que tout filtre convexe maximal sur  $U$  converge. Soit  $(X_i)_{i \in I}$  une famille de convexes fermés contenus dans  $U$  ayant des intersections finies non vides. La famille de ces intersections est la base d'un filtre convexe  $\mathcal{F}$ . D'après le lemme de Zorn, il existe un filtre convexe maximal plus fin que  $\mathcal{F}$ . Ce dernier est de la forme  $\mathcal{V}(x)$  et  $x$  appartient à tous ses éléments. En particulier  $x$  appartient aux  $X_i$ .  $\square$

**Proposition 1.37.** — *Soient  $\{E_i\}_I$  une famille d'espaces localement convexes et, pour chaque indice  $i$  soit  $U_i$  une partie  $c$ -compacte de  $E_i$ . L'espace  $E = \prod_{i \in I} E_i$  est localement convexe et la partie  $U = \prod_{i \in I} U_i$  est une partie  $c$ -compacte de  $E$ .*

*Preuve.* — Notons  $p_i$  la projection canonique  $E \rightarrow E_i$  et, pour chaque indice  $i$ , choisissons une famille  $(p_{i,j})_{j \in J_i}$  de semi-normes sur  $E_i$  qui définissent la topologie. On vérifie facilement que les semi-normes  $(p_{i,j} \circ p_i)_{j \in J_i, i \in I}$  définissent la *topologie produit* c'est-à-dire la moins fine rendant les projections  $p_i$  continues.

Chacune des parties  $U_i$  étant absolument convexe, il en est de même de la partie  $U$ . Soit  $\mathcal{F}$  un filtre convexe maximal sur  $U$ . Pour chaque indice  $i$ , la famille  $p_i(\mathcal{F})$  engendre un filtre convexe maximal sur  $U_i$ . Puisque  $U_i$  est  $c$ -compacte, ce filtre converge vers un point  $x_i$  et on constate que le filtre  $\mathcal{F}$  converge vers le point  $\prod x_i$ .  $\square$

**Exercice 1.38 (suites  $c$ -extraites [16]-1.3).** — Soit  $(x_n)$  une suite d'un  $K$ -espace vectoriel  $E$ . On dit que la suite  $(y_n)$  est  $c$ -extraite de la suite  $(x_n)$  si, pour tout  $n$ ,  $y_n$  appartient au plus petit convexe  $U_n$  contenant les  $x_i$  pour  $i \geq n$ .

1. Vérifier que  $y_n = \sum_{i=1}^N \lambda_{i,n} x_i$  pour des  $\lambda_{i,n}$  dans  $\mathcal{O}_K$  tels que  $\sum_{i=1}^N \lambda_{i,n} = 1$ . En déduire qu'une suite extraite (au sens ordinaire) est  $c$ -extraite.
2. Montrer qu'une suite  $c$ -extraite d'une suite  $c$ -extraite est  $c$ -extraite.
3. On suppose que  $E$  est muni d'une topologie localement compacte et que la suite  $(x_n)$  est contenue dans une partie  $U$   $c$ -compacte et bornée de  $E$ . Montrer qu'il existe une suite  $(y_n)$   $c$ -extraite de la suite  $(x_n)$  qui est convergente [considérer les fermés  $\overline{U}_n$ ].
4. On suppose que  $E = K$  et que  $K$  est sphériquement complet et on considère une suite bornée  $(x_n)$  de  $K$ . Montrer que l'ensemble des limites des suites convergentes  $c$ -extraites de  $(x_n)$  forment un disque non vide. En déduire que "lim"  $x_n$  (voir corollaire 1.45) est la limite d'une suite  $c$ -extraite de  $(x_n)$ .

*1.3.3. Parties compactoïdes.* — La notion de partie  $c$ -compacte est très utile mais rarement facile à vérifier. Nous introduisons la notion de partie compactoïde qui est, en général, plus directement accessible. En fait, le théorème 1.41 dit que ces deux notions sont très voisines. Ce résultat fondamental est apparu pour la première fois dans [31]. D'autres démonstrations ont été proposées ([48] proposition 2.2, [39] théorème 2.3.22,...) mais elles sont difficiles à se procurer. La démonstration que nous en donnons reprend les idées suggérées dans [31] mais en les explicitant. Elles sont beaucoup plus naturelles que ce qu'une première lecture peut laisser croire.

**Définition 1.39.** — Une partie  $U$  d'un  $K$ -espace localement convexe  $E$  est dite *compactoïde* si, pour tout voisinage  $V$  de 0, il existe un  $\mathcal{O}_K$ -module de type fini  $G$  tel que  $U$  soit contenue dans  $G + V$ .

**Lemme 1.40.** — Soit  $E$  un espace localement convexe séparé et soit  $\mathcal{V}$  un système fondamental de voisinages de 0 dans  $E$  formé d'ouverts absolument convexes (voir remarque 1.23). Chaque quotient  $E/V$  étant muni de la topologie discrète, on munit le produit  $\mathcal{E} = \prod_{V \in \mathcal{V}} E/V$  de la topologie (localement convexe) produit. L'application  $f : E \rightarrow \mathcal{E}$ , construite à partir des projections  $E \rightarrow E/V$ , est un homéomorphisme de  $E$  avec une partie de  $\mathcal{E}$ .

*Preuve.* — L'application  $f$  est linéaire par construction.

Soit  $x \neq 0$  dans  $E$ . L'espace  $E$  étant séparé, il existe, dans  $\mathcal{V}$ , un voisinage  $V$  qui ne contient pas  $x$ . Le point  $x$  a donc une image non nulle dans  $E/V$  et  $f(x) \neq 0$ . L'application  $f$  est injective et réalise un isomorphisme de  $E$  sur une partie de  $\mathcal{E}$ .

Les projections  $E \rightarrow E/V$  sont continues et l'application  $f$  est continue par définition de la topologie produit. Notons  $p_V$  la projection  $\mathcal{E} \rightarrow E/V$ . Pour  $V$  dans  $\mathcal{V}$  l'ensemble  $U_V = \{(x) \in \mathcal{E} ; p_V(x) = 0\}$  est un ouvert de  $\mathcal{E}$ . Donc  $f(V) = U_V \cap f(E)$  est un voisinage de 0 de  $f(E)$  pour la topologie induite. L'application  $f$  est ouverte.  $\square$

**Théorème 1.41.** — Si le corps  $K$  est sphériquement complet, une partie  $U$  d'un  $K$ -espace localement convexe  $E$  séparé et complet est  $c$ -compacte et bornée si et seulement si elle est absolument convexe, compactoïde et fermée.

*Preuve.* — Soit  $U$  une partie de  $E$  absolument convexe, compactoïde et fermée.

La partie  $U$  est bornée : si  $V$  est un voisinage de 0, alors, par définition, il existe des

point  $x_1, \dots, x_n$  de  $E$  tels que tout point de  $U$  soit de la forme  $x = \sum \mu_i x_i + y$  avec  $|\mu_i| \leq 1$  et  $y$  dans  $V$ . Comme  $V$  est absorbante, il existe, dans  $K$ , un nombre  $\lambda$  tel que  $x_i$  soit contenu dans  $\lambda_i V$ . On constate que  $U \subset \lambda V$  pour  $|\lambda| \geq \max\{1, |\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$ . Autrement dit,  $U$  est une partie bornée.

*La partie  $U$  est c-compacte* : Reprenons les notations du lemme 1.40. Comme  $E$  est complet, l'image  $f(E)$  est un fermé de  $\mathcal{E}$  (c'est le point clef de la démonstration). Mais l'image  $f(U)$  est un fermé de  $f(E)$  donc un fermé de  $\mathcal{E}$ . Par ailleurs, pour chaque  $V$ , il existe un  $\mathcal{O}_K$ -module de type fini  $G_V$  tel que  $U \subset G_V + V$ . Autrement dit,  $f(U)$  est contenue dans  $\prod_{V \in \mathcal{V}} G_V/V$ . Il résulte de la proposition 1.26 que les  $\mathcal{O}_K$ -modules  $G_V/V$  sont linéairement compacts c'est-à-dire c-compacts pour la topologie discrète. D'après la proposition 1.37,  $\prod_{V \in \mathcal{V}} G_V/V$  est c-compacte pour la topologie de  $\mathcal{E}$ . La partie  $f(U)$  est donc c-compacte car fermée dans une partie c-compacte (proposition 1.34-1). Il en est de même de  $U$ .

Réciproquement, soit  $U$  une partie de  $E$  c-compacte et bornée.

*La partie  $U$  est fermée* d'après la proposition 1.34-2.

*La partie  $U$  est compactoïde* : soit  $V$  un voisinage de zéro dans  $E$ . On peut supposer que  $V$  est absolument convexe et ouvert (voir remarque 1.23).

Puisque  $U$  est c-compacte, le  $\mathcal{O}_K$ -module  $U/V$ , muni de la topologie discrète, est linéairement compact. D'après la proposition 1.28, il existe un sous-module  $M$  de type fini dont  $U/V$  est une extension essentielle. Soit  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$  un système de générateurs du module  $M$ , soit  $x_1, \dots, x_n$  des relèvements des  $x_i$  dans  $U$  et soit  $F$  le  $K$ -espace vectoriel (de dimension finie) qu'ils engendrent. Les  $\mathcal{O}_K$ -modules  $F/V$  et  $U/V$  sont des sous-modules de  $E/V$  qui contiennent  $M$  <sup>(1)</sup>.

D'après la proposition 1.26, l'espace vectoriel de dimension finie  $F$  est linéairement compact. Il en est donc de même du  $\mathcal{O}_K$ -module  $F/V$ . Par ailleurs, ce module est divisible : pour tout  $x$  de  $F/V$  et tout  $\mu \neq 0$  de  $\mathcal{O}_K$ , il existe  $y$  dans  $F/V$  tel que  $\mu y = x$ . On peut donc appliquer la proposition 1.30 avec  $A = U/V$ ,  $B = F/V$ ,  $C = M$  et  $f$  l'application identité. On en déduit qu'il existe un homomorphisme de  $U/V$  dans  $F/V$  qui est l'identité sur  $M$ . Le noyau de  $f$  est un sous- $\mathcal{O}_K$ -module de  $U/V$  dont l'intersection avec  $M$  est réduite à 0. Comme  $U/V$  est une extension essentielle de  $M$  (proposition 1.30), ce noyau est réduit à 0 et  $f$  est une injection.

Comme  $U$  est une partie bornée, il existe  $\lambda$  dans  $\mathcal{O}_K$  tel que  $\lambda U$  soit contenu dans  $V$ . On a alors  $\lambda \bar{x} = 0$  pour tout  $\bar{x}$  dans  $U/V$  et donc  $\lambda \bar{y} = 0$  pour tout  $\bar{y}$  dans  $f(U/V)$  et en particulier  $\lambda \bar{x}_i = 0$ .

Notons  $W$  le  $\mathcal{O}_K$ -module engendré par les  $y_i = \lambda^{-1} x_i$  et considérons les  $\mathcal{O}_K$ -modules  $A = W/V \subset F/V$ ,  $B = (\lambda^{-2}U)/(V \cap U) \supset U/V$  <sup>(2)</sup>,  $C = f(U/V)$  et l'application  $f^{-1}$  de  $C$  dans  $U/V \subset B$ . Comme  $U$  est c-compacte, il en est de même de  $\lambda^{-2}U$  et donc  $B$  est linéairement compact. Pour  $\bar{x}$  dans  $W/V$ , on a, par construction,  $\lambda \bar{x}$  dans  $M$  et  $\lambda^2 \bar{x} = 0$ . Soit maintenant  $\mu$  dans  $\mathcal{O}_K$ , tel que  $|\lambda^2| < |\mu|$ , et  $\bar{z}$  dans  $B$  tel que  $\frac{\lambda^2}{\mu} \bar{z} = 0$ .

<sup>(1)</sup>Dans la terminologie de [31]  $F/V$  est une "enveloppe injective" de  $M$ .

<sup>(2)</sup> $U$  et  $V$  sont des parties absolument convexes donc  $U \cap V$  est un  $\mathcal{O}_K$ -module.

Si nous choisissons un relèvement  $z$  de  $\bar{z}$  dans  $\lambda^{-2}U$ , cela signifie que  $\frac{\lambda^2}{\mu}z$  appartient à  $V \cap U$  donc, en particulier, à  $U$ . Alors  $y = \frac{1}{\mu}z$  appartient à  $\lambda^{-2}U$  et  $\mu\bar{y} = \bar{z}$ .

On peut donc appliquer la proposition 1.30 et on obtient une application  $g$  de  $W/V$  dans  $(\lambda^{-2}U)/(V \cap U)$  dont la restriction à  $f(U/V)$  est  $f^{-1}$ . On constate, maintenant, d'une part que  $U/V$  est contenu dans l'image  $g(W/V)$  et d'autre part que le module  $g(W/V)$  est de type fini car engendré par les  $g(\bar{y}_i)$ . Autrement dit, le module  $U$  est contenu dans  $G + V$  où  $G$  est le  $\mathcal{O}_K$ -module de type fini engendré par des relèvements des  $g(\bar{y}_i)$ .  $\square$

**Remarque 1.42.** — Un sous- $\mathcal{O}_K$ -module de type fini d'un espace localement convexe  $E$  est évidemment contenu dans un sous- $K$ -espace vectoriel de dimension finie et il est facile de voir que c'est une partie bornée. Inversement, une partie bornée d'un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie, disons de base  $\{e_1, \dots, e_n\}$ , est contenue dans le  $\mathcal{O}_K$ -module engendré par les  $\lambda e_i$  pour  $\lambda$  assez grand. Toutefois, lorsque le corps  $K$  n'est pas de valuation discrète, il existe des  $\mathcal{O}_K$ -modules contenus et bornés dans un espace vectoriel de dimension finie qui ne sont pas de type fini. La boule unité "ouverte" de  $K$  en est un exemple et c'est essentiellement le seul : on peut montrer que tout  $\mathcal{O}_K$ -module contenu et borné dans un espace vectoriel de dimension finie est une somme finie de  $\mathcal{O}_K$ -modules de rang un (qui sont donc isomorphes à un disque "ouvert" ou "fermé" de  $K$ ). On ne sait pas si on peut choisir ces modules en somme directe.

**Exercice 1.43.** — On suppose le corps  $K$  sphériquement complet, on note  $E$  le  $K$  espace vectoriel des suites de  $K$  qui tendent vers 0. On munit  $E$  de la norme  $\|u\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |u_i|$  et on note  $E_0$  le sous espace vectoriel des suites n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls. Pour chaque  $n \geq 0$ , on considère les parties

$$D = \left\{ u = (u_0, u_1, \dots) \in E; |u_i| \leq |p|^i \text{ pour } 0 \leq i \right\}.$$

$$D_n = \left\{ u = (u_0, u_1, \dots) \in E_0; u_i = p^i \text{ pour } 0 \leq i < n \right\}.$$

1. Montrer que  $D$  est une partie absolument convexe, bornée, compactoïde (utiliser la base de voisinage  $V_\varepsilon = \{u; \|u\| < \varepsilon\}$ ) et fermée.
2. Montrer que les  $D_n \cap D$  sont des parties convexes de  $D$  formant une famille emboîtée dont l'intersection est vide.
3. En déduire que  $D$  est  $c$ -compacte mais pas linéairement compacte.

**1.4. Limites banachiques.** — La plupart des résultats de la théorie des espaces vectoriels topologiques "classique", c'est-à-dire sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , restent valides dans le cas ultramétrique. C'est le cas pour le théorème de Baire, déjà rencontré, et ses conséquences : théorème de la borne uniforme, de l'application ouverte et de l'inverse continu. Il y a cependant une exception importante : le théorème de Hahn-Banach n'est vrai que si le corps  $K$  est sphériquement complet. C'est l'une des raisons qui imposent de travailler avec un corps sphériquement complet.

**Théorème 1.44 (Hahn-Banach).** — Soit  $K$  un corps sphériquement complet, soit  $V$  un  $K$ -espace de Banach et soit  $U$  un sous-espace vectoriel de  $V$ . Toute forme linéaire  $f$  définie et continue sur  $U$  se prolonge en une forme linéaire  $\tilde{f}$  définie et continue sur  $V$  telle que  $\|\tilde{f}\| \leq \|f\|$ .

*Preuve.* — La démonstration se fait par récurrence transfinie comme dans le cas classique. La difficulté est de prolonger la forme linéaire  $f$  à un élément  $x$  de  $V - U$ . Pour cela, il est nécessaire (et suffisant) de trouver un élément  $\tilde{f}(x)$  dans  $K$  tel que :

$$|\tilde{f}(x - y)| \stackrel{\text{déf}}{=} |\tilde{f}(x) - f(y)| \leq \|f\| \|x - y\|$$

pour tout élément  $y$  de  $U$ . Posons

$$D_y = D(f(y), \|f\| \|x - y\|^+) = \{X \in K; |X - f(y)| \leq \|f\| \|x - y\|\},$$

on cherche un élément  $\tilde{f}(x)$  qui appartienne à l'intersection  $\bigcap_{y \in U} D_y$ . Il faut donc montrer que cette intersection est non vide.

Soit  $y$  et  $z$  deux éléments de  $U$  et supposons que  $\|x - z\| \leq \|x - y\|$ . Alors

$$|f(z) - f(y)| \leq \|f\| \|z - y\| \leq \|f\| \max(\|z - x\|, \|x - y\|) = \|f\| \|x - y\|$$

et  $f(z)$  appartient à  $D_y$ . Donc  $D_z \subset D_y$ . La famille  $\{D_y\}_{y \in U}$  est emboîtée. Comme le corps  $K$  est sphériquement complet, elle a une intersection non vide [si on choisit une suite  $y_n$  dans  $U$  telle que la suite  $\|x - y\|_n$  soit décroissante et tende vers  $\inf_{y \in U} \|x - y\|$ , alors on constate que  $\bigcap_{y \in U} D_y = \bigcap_n D_{y_n}$ ].  $\square$

Une conséquence du théorème de Hahn-Banach nous sera particulièrement utile.

**Corollaire 1.45 ([47]).** — A toute suite bornée  $(u_n)$  d'un corps  $K$  sphériquement complet, on peut associer une limite banachique, notée "lim"  $u_n$  ou " $\lim_{n \rightarrow \infty}$ "  $u_n$  s'il peut y avoir confusion, qui a les propriétés suivantes :

1. si la suite  $(u_n)$  est convergente alors "lim"  $u_n = \lim u_n$ ,
2. si les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont bornées et si  $\lambda$  est dans  $K$ , alors  
"lim"  $(\lambda u_n + v_n) = \lambda$  "lim"  $u_n +$  "lim"  $v_n$ ,
3. si la suite  $(u_n)$  est bornée, alors | "lim"  $u_n | \leq \limsup |u_n|$ .

*Preuve.* — Le  $K$ -espace vectoriel des suites bornées de  $K$  est un espace de Banach si on le munit de la norme  $\|(u_n)\| = \sup |u_n|$ . L'application linéaire lim, définie sur le sous-espace vectoriel des suites convergentes, est continue et de norme 1. On peut appliquer le théorème de Hahn Banach pour la prolonger. La propriété 1) est vraie par construction. La propriété 2) exprime la linéarité du prolongement. A priori le fait que l'application prolongée soit de norme 1 se traduit par la propriété | "lim"  $u_n | \leq \sup |u_n|$ . Considérons les suites bornées  $v_N$  définies par  $v_{N,n} = u_n$  pour  $n < N$  et  $v_{N,n} = 0$  pour  $n \geq N$ . On trouve " $\lim_{n \rightarrow \infty}$ "  $v_{N,n} = \lim_{n \rightarrow \infty} v_{N,n} = 0$  d'où | "lim"  $u_n | = |$  "lim"  $(u_n - v_{N,n}) | \leq \sup_{N \leq n} |u_n|$ . Comme cette majoration a lieu pour tout entier  $N$ , la propriété 3) est démontrée.  $\square$

**Remarque 1.46.** — La limite banachique n'est pas unique. Elle n'est en fait unique que pour les suites convergentes. Nous allons cependant faire le choix d'un prolongement qui sera fixé une fois pour toutes.

## 2. Fonctions analytiques dans une couronne

**2.1. Polygone de Newton et polygone de valuation.** — Nous allons travailler avec les intervalles  $I$  contenus strictement dans  $[0, \infty]$ . Nous les munirons de la topologie induite. En particulier  $I$  sera dit fermé s'il est de la forme  $[\alpha, \beta]$ . Pour les propriétés qui vont nous occuper, les intervalles ouverts (de la forme  $] \alpha, \beta[$ ,  $[0, \beta[$  ou  $] \alpha, \infty[$ ) et semi-ouverts ( $[\alpha, \beta[$ ,  $] \alpha, \beta]$ ) se comportent de la même manière. Nous dirons donc parfois abusivement "ouvert" pour "non fermé".

A tout intervalle  $I$  contenu dans  $[0, \infty]$ , on associe la *couronne*

$$\mathcal{C}(I) = \{x; |x| \in I\}.$$

Plus précisément,  $\mathcal{C}(I)$  est le sous-*espace analytique* de la droite projective sur  $K$  dont les points à valeur dans un surcorps valué  $\Omega$  de  $K$  sont les nombres  $x$  de  $\Omega \cup \{\infty\}$  tels que  $|x|$  appartienne à  $I$ . On notera  $\mathcal{C}_\Omega(I) = \{x \in \Omega; |x| \in I\}$  l'ensemble des points de  $\mathcal{C}(I)$  à valeur dans  $\Omega$ . Les points de  $\mathcal{C}_{K^{\text{alg}}}(I)$  seront appelés *points géométriques* de  $\mathcal{C}(I)$ .

Puisque le corps  $K$  est complet, il résultera du corollaire 2.22 que tout conjugué  $x^\sigma$  sur  $K$  du point géométrique  $x$  de  $\mathcal{C}(I)$  vérifie  $|x^\sigma| = |x|$  et est donc aussi un point géométrique de la couronne  $\mathcal{C}(I)$ . L'ensemble des *points fermés* de  $\mathcal{C}(I)$  est l'ensemble des points géométriques de  $\mathcal{C}(I)$  à conjugaison près. A un point fermé de  $\mathcal{C}(I)$  est donc associé, de manière unique, le polynôme unitaire irréductible de  $K[x]$  dont les racines sont les points géométriques qu'il contient. Plus précisément, le lemme 2.14 montre qu'il y a bijection entre les points fermés de  $\mathcal{C}(I)$  et les polynômes de  $K[x]$  qui sont irréductibles, unitaires et  $\rho$ -extrémaux avec  $\rho$  dans  $I$ .

Les anneaux de fonctions analytiques dans un disque ou une couronne sont fondamentaux dans ce livre. Nous commençons par donner celles qui correspondent à un disque ou une couronne centrée en 0. Le cas des disques non centrés en 0 sera abordé dans le paragraphe 3.3

**Définition 2.1.** — Soit  $I$  un intervalle contenu dans  $[0, \infty]$ , on note  $\mathcal{A}(I)$  l'ensemble des fonctions analytiques à coefficients dans  $K$  qui convergent dans la couronne  $\mathcal{C}(I)$

$$\mathcal{A}(I) = \left\{ \sum_{s \in \mathbb{Z}} a_s x^s; a_s \in K, (\forall \rho \in I) \lim_{s \rightarrow \pm\infty} |a_s| \rho^s = 0 \right\}.$$

Lorsque 0 appartient à  $I$ , la couronne est un disque et on a

$$\begin{aligned} \mathcal{A}([0, \rho]) &= \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} a_s x^s; a_s \in K, \lim_{s \rightarrow \infty} |a_s| \rho^s = 0 \right\} \\ \mathcal{A}([0, \rho[) &= \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} a_s x^s; a_s \in K, (\forall r < \rho) \lim_{s \rightarrow \infty} |a_s| r^s = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Nous laissons au lecteur le soin d'écrire les définitions correspondantes dans le cas où  $\infty$  appartient à  $I$ . Remarquons juste que  $f$  appartient à  $\mathcal{A}((\rho, \infty])$  si et seulement si  $f(1/x)$  appartient à  $\mathcal{A}([0, 1/\rho])$ .

En fonction du contexte, nous utiliserons des notations plus précises ou simplifiées.

**Notations 2.2.** —

1. S'il y a besoin de préciser le corps  $K$ , on écrira  $\mathcal{A}_K(I)$  au lieu de  $\mathcal{A}(I)$ ,
2. on écrira  $\mathcal{A}([\rho])$  pour  $\mathcal{A}([\rho, \rho])$ ,
3. on écrira parfois  $\mathcal{A}$  pour  $\mathcal{A}([0, 1])$ ,

Si la fonction  $\sum_{s \in \mathbb{Z}} a_s x^s$  appartient à  $\mathcal{A}(I)$  et si  $\rho$  appartient à l'intervalle  $I \cap ]0, \infty[$ , par définition on a  $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} |a_s| \rho^s = 0$  et l'application  $s \mapsto |a_s| \rho^s$  est bornée. Plus précisément elle est identiquement nulle ou bien a un maximum qu'elle atteint en un nombre fini d'indices  $s$ . Ceci justifie les définitions suivantes.

**Définitions 2.3.** — Soit  $\rho$  un nombre de  $I \cap ]0, \infty[$

1. On définit la  $\rho$ -norme de Gauss sur l'anneau  $\mathcal{A}(I)$  par :

$$\left| \sum_{s \in \mathbb{Z}} a_s x^s \right|_{\rho} = \max_{s \in \mathbb{Z}} |a_s| \rho^s.$$

2. Si  $f(x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} a_s x^s$  est une fonction non nulle de  $\mathcal{A}(I)$  on notera  $n_{\rho}(f)$  (resp.  $N_{\rho}(f)$ ) le plus petit (resp. le plus grand) entier  $s$  rendant le nombre  $|a_s| \rho^s$  maximum (c'est à dire égal à  $|f|_{\rho}$ ). En particulier on a  $n_{\rho}(f) \leq N_{\rho}(f)$ .

Contrairement à son nom, la  $\rho$ -norme de Gauss est en fait une valeur absolue.

**Lemme 2.4.** — Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions non nulles de  $\mathcal{A}(I)$ . On a

$$|fg|_{\rho} = |f|_{\rho} |g|_{\rho} \quad , \quad N_{\rho}(fg) = N_{\rho}(f) + N_{\rho}(g) \quad \text{et} \quad n_{\rho}(fg) = n_{\rho}(f) + n_{\rho}(g).$$

*Preuve.* — Posons  $f = \sum a_s x^s$ ,  $g = \sum b_s x^s$  et  $fg = \sum c_s x^s$ . On constate que

$$|fg|_{\rho} = \max_{s \in \mathbb{Z}} |c_s| \rho^s \leq \max_{i, j \in \mathbb{Z}} |a_i b_j| \rho^{i+j} = |f|_{\rho} |g|_{\rho}.$$

Maintenant, par définition, pour  $i$  (resp.  $j$ ), on a

$$|a_i| \rho^i \leq a_{N_{\rho}(f)} \rho^{N_{\rho}(f)} = |f|_{\rho} \quad (\text{resp.} \quad |b_j| \rho^j \leq b_{N_{\rho}(g)} \rho^{N_{\rho}(g)} = |g|_{\rho} ),$$

et, pour  $i > N_{\rho}(f)$  (resp.  $j > N_{\rho}(g)$ ), on a

$$|a_i| \rho^i < a_{N_{\rho}(f)} \rho^{N_{\rho}(f)} \quad (\text{resp.} \quad |b_j| \rho^j < b_{N_{\rho}(g)} \rho^{N_{\rho}(g)}),$$

si bien que, dans la somme

$$|c_{N_{\rho}(f)+N_{\rho}(g)}| = \left| \sum_{i+j=N_{\rho}(f)+N_{\rho}(g)} a_i b_j \right| \leq \rho^{-N_{\rho}(f)-N_{\rho}(g)} \max_{i+j=N_{\rho}(f)+N_{\rho}(g)} |a_i| \rho^i |b_j| \rho^j$$

le terme  $a_{N_{\rho}(f)} b_{N_{\rho}(g)}$  a une valeur absolue strictement supérieure à celle des autres termes. On en déduit que

$$|fg|_{\rho} \geq |c_{N_{\rho}(f)+N_{\rho}(g)}| \rho^{N_{\rho}(f)+N_{\rho}(g)} = |a_{N_{\rho}(f)} b_{N_{\rho}(g)}| \rho^{N_{\rho}(f)+N_{\rho}(g)} = |f|_{\rho} |g|_{\rho}.$$

En particulier, on a  $|fg|_\rho = |c_{N_\rho(f)+N_\rho(g)}| \rho^{N_\rho(f)+N_\rho(g)}$ .

Pour  $s > N_\rho(f) + N_\rho(g)$ , un calcul analogue montre que  $|c_s| \rho^s < |f|_\rho |g|_\rho$ . Donc  $N_\rho(fg) = N_\rho(f) + N_\rho(g)$ .

On montrerait de même que  $|fg|_\rho = |c_{n_\rho(f)+n_\rho(g)}| \rho^{n_\rho(f)+n_\rho(g)}$  et que, pour  $s < n_\rho(f) + n_\rho(g)$ , on a  $|c_s| \rho^s < |f|_\rho |g|_\rho$  ce qui achève la démonstration du lemme.  $\square$

**Définition 2.5.** — On note  $\mathcal{F}(I)$  le corps des quotients de l'anneau  $\mathcal{A}(I)$ . Ses éléments sont appelés *fonctions méromorphes* dans la couronne  $\mathcal{C}(I)$ .

**Corollaire 2.6.** — La  $\rho$ -norme de Gauss est une valeur absolue ultramétrique sur l'anneau  $\mathcal{A}(I)$  et se prolonge en une valeur absolue du corps  $\mathcal{F}(I)$ .

*Preuve.* — On vient de voir que  $|fg|_\rho = |f|_\rho |g|_\rho$ . Il suffit donc de vérifier que  $|f|_\rho = 0$  implique  $f = 0$  et que  $|f+g|_\rho \leq \max(|f|_\rho, |g|_\rho)$  ce qui est immédiat.

La formule  $|f/g|_\rho = |f|_\rho / |g|_\rho$  permet maintenant de prolonger la  $\rho$ -norme de Gauss au corps  $\mathcal{F}(I)$ .  $\square$

**Définition 2.7.** — On dit qu'une fonction  $f$  a *logarithmiquement* une propriété sur l'intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}^+$  si la fonction  $g(x) = \log(f(e^x))$  a cette propriété sur l'intervalle  $\log(I)$ . Remarquons que, dans ces conditions, le graphe de  $g$  est le graphe de  $f$  en coordonnées logarithmiques.

**Exercice 2.8.** — Soit  $f = \sum_{s \in \mathbb{Z}} a_s x^s$  une fonction de  $\mathcal{A}(I)$ . Pour chaque entier  $s$  on pose  $I_s = \{\rho \in I; |f|_\rho = |a_s| \rho^s\}$ .

1. Montrer que  $I = \bigcup I_s$  et que  $I_s$  est un intervalle (éventuellement vide) fermé dans  $I$ .
2. Montrer que la fonction  $\rho \mapsto |f|_\rho$  est logarithmiquement affine par morceaux, logarithmiquement de pente entière sur chaque morceau, et logarithmiquement convexe sur  $I$ .

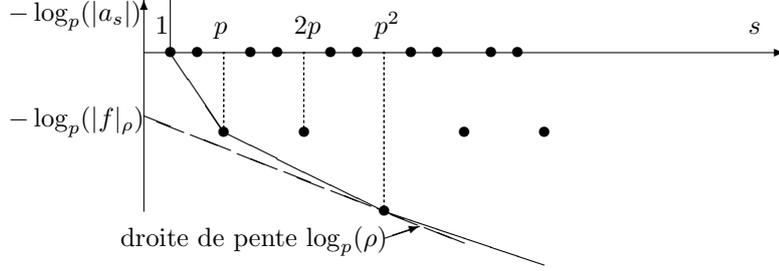
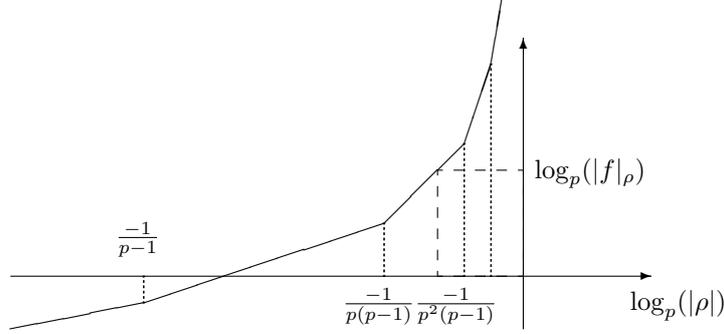
**Définition 2.9.** — Soit  $f = \sum_{s \in \mathbb{Z}} a_s x^s$  une fonction de  $\mathcal{A}(I)$ . On appelle *polygone de Newton* de la fonction  $f$  l'enveloppe convexe de l'ensemble des points  $(s, -\log(|a_s|))$  auxquels on ajoute éventuellement le point  $(0, \infty)$ .

On vérifie facilement que l'ordonnée du point d'intersection de la droite de pente  $\log(\rho)$  s'appuyant sur le polygone de Newton de la fonction  $f$  a une ordonnée égale à  $-\log(|f|_\rho) = \min_{s \in \mathbb{Z}} \{-\log(|a_s|) - s \log(\rho)\}$ .

**Définition 2.10.** — Soit  $f = \sum_{s \in \mathbb{Z}} a_s x^s$  une fonction de  $\mathcal{A}(I)$ . On appelle *polygone de valuation* de la fonction  $f$  le graphe, en coordonnées logarithmiques, de la fonction  $\rho \mapsto |f|_\rho$ .

**Exemple 2.11.** — On considère la fonction  $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \dots$  et on prend  $p = 3$ . On obtient les graphes des figures 1 et 2.

On remarquera que chaque coté fini du polygone de valuation (figure 2) a une hauteur égale à 1, en effet, le coté infini a une pente égale à 1 et le  $n$ -ème coté fini a une pente égale à  $p^n$  et se projette sur l'intervalle  $\left] \frac{-1}{p^{n-1}(p-1)}, \frac{-1}{p^n(p-1)} \right[$ .

FIGURE 1. Polygone de Newton de la fonction  $\log(1+x)$ .FIGURE 2. Polygone de valuation de la fonction  $\log(1+x)$ .

**Lemme 2.12.** — Soit  $P = \sum_{i=0}^d a_i x^i$  un polynôme de  $K[x]$  tel que  $a_0 a_d \neq 0$ . Les valeurs absolues des racines de  $P$  appartiennent à l'intervalle  $[\alpha, \beta]$  si et seulement si  $|a_i| \leq \min \{|a_0| \alpha^{-i}, |a_d| \beta^{d-i}\}$  pour  $0 \leq i \leq d$  (resp.  $|a_i| \leq |a_d| \beta^{d-i}$  si  $\alpha = 0$ ).

*Preuve.* — Supposons que  $|a_i| \leq \min \{|a_0| \alpha^{-i}, |a_d| \beta^{d-i}\}$  pour  $0 \leq i \leq d$  et soit  $\zeta$  un nombre de la clôture algébrique  $K^{\text{alg}}$ .

- Si  $\alpha > 0$  et  $|\zeta| < \alpha$ , alors  $|a_i \zeta^i| < |a_0|$  pour  $i > 0$  et  $|P(\zeta)| = |a_0| \neq 0$
- Si  $|\zeta| > \beta > 0$ , alors  $|a_i \zeta^i| < |a_d \zeta^d|$  pour  $i < d$  et  $|P(\zeta)| = |a_d \zeta^d| \neq 0$ .

Donc les racines de  $P$  ont des valeurs absolues comprises dans l'intervalle  $[\alpha, \beta]$ .

Inversement, si les racines  $\{\zeta_1 \dots \zeta_d\}$  de  $P$  (avec répétition des racines multiples) ont des valeurs absolues dans l'intervalle  $[\alpha, \beta]$ , on trouve  $|a_0| = |a_d| \prod_j |\zeta_j|$  et

- $|a_i| = |a_d| \left| \sum_{j_1 < \dots < j_{d-i}} \prod_{k=1}^{d-i} \zeta_{j_k} \right| \leq |a_d| \beta^{d-i}$ ,
- $|a_i| = |a_0| \left| \sum_{j_1 < \dots < j_{d-i}} \prod_{j \neq j_k} \zeta_j^{-1} \right| \leq |a_0| \alpha^{-i}$ . □

**Définition 2.13.** — Un polynôme  $P$  de  $K[x]$  tel que  $n_\rho(P) = 0$  et  $N_\rho(P) = \deg(P)$  est dit  $\rho$ -extrémal. Autrement dit, le polynôme  $P$  est  $\rho$ -extrémal si, et seulement

si son polygone de Newton a un seul coté (non vertical) et si ce coté est de pente (logarithmique)  $\ln_p(\rho)$ .

**Lemme 2.14.** — *Un polynôme  $P$  de  $K[x]$  est  $\rho$ -extrémal si et seulement si toutes ses racines (dans le corps  $K^{alg}$ ) sont de valeur absolue  $\rho$ .*

*Preuve.* — C'est une traduction immédiate du lemme 2.12 dans le cas  $\alpha = \beta = \rho$ .  $\square$

**Lemme 2.15 (division par un polynôme).** — *Soit  $f$  une fonction de  $\mathcal{A}(I)$  et soit  $P$  un polynôme non constant de  $K[x]$  dont toutes les racines ont une valeur absolue contenue dans  $I$ . Il existe, de manière unique, une fonction  $g$  de  $\mathcal{A}(I)$  et un polynôme  $R$  de  $K[x]$  tels que :  $f = gP + R$  et  $\deg(R) < \deg(P)$ .*

*Si les racines de  $P$  ont une valeur absolue contenue dans l'intervalle  $[\alpha, \beta] \subset I$  avec  $\alpha \leq \beta$ , on a,  $|R|_\alpha \leq |R|_\beta \leq \max\{|f|_\alpha, |f|_\beta\}$ . En particulier, si  $P$  est  $\rho$ -extrémal, on a  $\alpha \leq \rho \leq \beta$ ,  $|R|_\rho \leq |f|_\rho$  et  $|g|_\rho \leq |f|_\rho |P|_\rho^{-1}$ .*

*Preuve.* — Pour l'unicité, on remarque que la relation  $gP + R = 0$  impose au polynôme  $R$  d'avoir au moins  $\deg(P)$  racines (distinctes ou confondues) parmi les points géométriques de la couronne  $\mathcal{C}(I)$  ce qui est impossible pour un polynôme non nul de degré strictement inférieur à  $\deg(P)$ .

Pour montrer l'existence, on fait une division suivant les puissances croissantes pour les indices positifs et une division suivant les puissances décroissantes pour les indices négatifs. L'une des deux opérations est sans objet si  $0$  ou  $\infty$  appartient à  $I$  et nous laissons au lecteur le soin d'adapter la suite de la démonstration à ces deux cas. Plus précisément, posons  $P = \sum_{i=0}^d a_i x^i$  et notons  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ) la plus petite (resp. plus grande) des valeurs absolues des racines du polynôme  $P$ . D'après le lemme 2.12, on a  $|a_i| \leq \min\{|a_0| \alpha^{-i}, |a_d| \beta^{d-i}\}$  pour  $0 \leq i \leq d$  et il vient :

$$\begin{aligned} \text{pour } s \leq 0 \quad x^s &= \frac{x^s}{a_0} P(x) - \sum_{i=1}^d \frac{a_i}{a_0} x^{i+s} & \text{avec } \left| - \sum_{i=1}^d \frac{a_i}{a_0} x^{i+s} \right|_\alpha &\leq \alpha^s = |x^s|_\alpha \\ \text{pour } s \geq d \quad x^s &= \frac{x^{s-d}}{a_d} P(x) - \sum_{i=0}^{d-1} \frac{a_i}{a_d} x^{i-d+s} & \text{avec } \left| - \sum_{i=0}^{d-1} \frac{a_i}{a_d} x^{i-d+s} \right|_\beta &\leq \beta^s = |x^s|_\beta \end{aligned}$$

ce qui montre le résultat, par récurrence, pour  $f = x^s$ . Le cas général s'obtient en décomposant  $f$  en somme de monômes car, par hypothèse,  $\alpha$  et  $\beta$  appartiennent à  $I$ .

On a  $|R|_\alpha \leq |f|_\alpha$  (resp.  $|R|_\beta \leq |f|_\beta$ ) si  $f = \sum_{s < 0} a_s x^s$  (resp.  $f = \sum_{s \geq d} a_s x^s$ ). Le résultat annoncé s'en déduit si on remarque que  $|R|_\alpha \leq |R|_\beta$ . Le cas d'un polynôme  $\rho$ -extrémal est celui où  $\alpha = \beta = \rho$ .  $\square$

**2.2. Un lemme de Hensel général.** — Le lemme de Hensel "classique" (corollaire 2.19) donne des conditions pour qu'une racine approchée d'un polynôme à coefficients dans un corps valué  $K$  se relève en une racine exacte. En élargissant très légèrement ce point de vue, on voit qu'il s'agit en fait de relever une factorisation approchée dans l'anneau  $K[X]$  en une factorisation exacte (corollaire 2.18). En remplaçant les polynômes par des séries entières, on obtient un lemme de Hensel qui s'apparente au théorème de préparation de Weierstrass (proposition 2.24). Ces résultats restent vrais

dans le cas (non commutatif) des polynômes différentiels lorsque la dérivation n'est pas trop grosse (propositions 7.12 et 7.13). Le lecteur attentif constatera que ce cas correspond à celui du "petit rayon de convergence" du corollaire 8.7 dans lequel le rayon de convergence générique des solutions se lit directement sur les coefficients du polynôme différentiel.

Toutes ces variantes vont se déduire d'un "lemme de Hensel général". Il restera, dans chacun des cas particuliers, à vérifier que les hypothèses sont bien satisfaites ce qui, pour l'essentiel, sera un problème de division euclidienne.

On trouvera dans la littérature des formes encore plus générales du lemme de Hensel ([40] par exemple). Dans tous les cas, la démonstration repose sur un théorème du point fixe. Le lemme de Hensel classique lui-même est une variante de la méthode de Newton, c'est-à-dire un théorème du point fixe (dans un cas où cet algorithme est particulièrement performant).

**Proposition 2.16.** — *Soit  $U$ ,  $V$  et  $W$  trois sous-groupes additifs d'un anneau  $A$  valué (c'est-à-dire muni d'une valeur absolue ultramétrique) et soient  $a, b$  et  $c$  trois éléments de  $A$ . On suppose que :*

1.  $U$  et  $V$  sont complets pour la topologie induite de celle de  $A$ ,
2.  $UV \subset W$ ,
3.  $ab - c \in W$ ,
4.  $|ab - c| < |c|$ ,
5. l'application  $\ell : U \times V \rightarrow W$ , définie par  $\ell(u, v) = av + ub$ , est une bijection,
6.  $|\ell(u, v)| = \max(|av|, |bu|)$  pour tout  $(u, v) \in U \times V$ .

Alors il existe un unique  $(x, y)$  de  $U \times V$  tel que  $|x| < |a|$ ,  $|y| < |b|$  et  $c = (a-x)(b-y)$ .

*Preuve.* — On cherche  $(x, y)$  tel que  $c - ab - xy = -ay - xb = -\ell(x, y)$ . Comme  $\ell$  est une bijection, cela est équivalent à :  $(x, y) = \ell^{-1}(ab - c + xy)$  que l'on va résoudre par une méthode de point fixe.

On munit l'ensemble  $U \times V$  de la norme  $\|(u, v)\| = \max(|av|, |bu|) = |\ell(u, v)|$  de telle sorte que  $\ell$  soit une isométrie. On considère l'application  $f : U \times V \rightarrow U \times V$  définie par  $(u, v) = \ell^{-1}(ab - c + uv)$ . Si  $\|(u, v)\| \leq |ab - c| < |c| = |a||b|$ , on a :

$$|uv| \leq \frac{|ab - c|}{|b|} \frac{|ab - c|}{|a|} < |ab - c|$$

et par suite  $\|f(u, v)\| = |\ell(f(u, v))| = |ab - c + uv| = |ab - c|$ . Par ailleurs, si  $\|(u, v)\| \leq |ab - c|$  et  $\|(s, t)\| \leq |ab - c|$ , comme l'application  $\ell$  est additive, on trouve

$$\begin{aligned} \|f(u, v) - f(s, t)\| &= |\ell(f(u, v)) - \ell(f(s, t))| = |uv - st| \\ &\leq \max(|u||v - t|, |u - s||t|) \\ &\leq \max \left[ \frac{|ab - c|}{|b|} \frac{\|(u, v) - (s, t)\|}{|a|}, \frac{\|(u, v) - (s, t)\|}{|b|} \frac{|ab - c|}{|a|} \right] \\ &\leq \|(u, v) - (s, t)\| \frac{|ab - c|}{|c|} \end{aligned}$$

Autrement dit l'application  $\ell$  est une contraction de la boule  $\|(u, v)\| \leq |ab - c|$  de l'ensemble complet  $U \times V$ . Son unique point fixe  $(x, y)$  vérifie :

$$ab - c + xy = \ell(x, y) = ay + bx$$

c'est à dire  $c = (a - x)(b - y)$ .  $\square$

**2.3. Lemme de Hensel pour les polynômes.** — Le lemme de Hensel général permet de retrouver facilement le lemme de Hensel "classique". Il donne une condition pour qu'une factorisation dans l'anneau  $k[x]$  se relève en une factorisation dans l'anneau  $K[x]$ . Les résultats de ce paragraphe seront très peu utilisés dans ce cours.

Si  $a$  est un élément du corps  $K$  tel que  $|a| \leq 1$ , on note  $\bar{a}$  son image dans le corps des restes  $k$  et si  $P = \sum a_i x^i$  est un polynôme de  $K[x]$  tel que  $|P|_1 \leq 1$ , on note  $\bar{P} = \sum \bar{a}_i x^i$  son image dans l'anneau  $k[x]$ . Précisons l'anneau quotient

$$k[x]_\rho = \{P \in K[X]; |P|_\rho \leq 1\} / \{P \in K[X]; |P|_\rho < 1\}$$

- Lorsque  $\rho$  appartient au groupe  $|K^*|$  des valeurs absolues du corps  $K$ , en choisissant un élément  $\alpha$  de  $K$  tel que  $|\alpha| = \rho$  et en posant  $P_\alpha(x) = P(\alpha x)$ , on constate que  $|P|_\rho = |P_\alpha|_1$ . Il en résulte que l'anneau quotient  $k[x]_\rho$  est alors isomorphe, via l'identification  $X = \bar{\alpha}x$  à  $k[X]_1 = k[x]$ .
- Lorsque  $\rho$  appartient au groupe  $\sqrt{|K^*|}$  des valeurs absolues du corps  $K^{\text{alg}}$ , en choisissant un entier  $d > 0$  minimum tel que  $\rho^d$  appartienne à  $|K^*|$  et en choisissant un élément  $\alpha$  de  $K$  tel que  $|\alpha| = \rho^d$ , on constate que l'anneau quotient  $k[x]_\rho$  est isomorphe à  $k[X]$  via l'identification  $X = \bar{\alpha}x^d$ .
- Finalement, lorsque  $\rho$  n'appartient pas au groupe  $\sqrt{|K^*|}$ , on constate que l'anneau quotient  $k[x]_\rho$  est isomorphe à  $k$  car, pour  $s > 0$ , l'inégalité  $|a| \leq \rho^{-s}$  implique  $|a| < \rho^{-s}$  et donc les termes de degré non nul s'annulent par passage au quotient.

Si  $P$  est un polynôme de  $K[x]$  tel que  $|P|_\rho \leq 1$ , on note  $\bar{P}^\rho$  l'image de  $P$  dans  $k[x]_\rho$ .

**Proposition 2.17.** — *Soit  $K$  un corps ultramétrique complet,  $\rho > 0$  et  $P$  un polynôme de  $K[x]$  tel que  $|P|_\rho \leq 1$ . S'il existe deux polynômes  $q$  et  $r$  de  $k[x]_\rho$ , premiers entre eux, tels que  $qr = \bar{P}^\rho$ , alors il existe deux polynômes  $Q$  et  $R$  de  $K[x]$  tels que  $P = QR$ ,  $q = \bar{Q}^\rho$ ,  $r = \bar{R}^\rho$  et  $\deg(Q) = \deg(q)$ .*

*Preuve.* — Munissons l'anneau  $K[x]$  de la valeur absolue  $|\cdot|_\rho$  et posons

- $U = \{u \in K[x]; \deg(u) < \deg(q)\}$ ,
- $V = \{v \in K[x]; \deg(v) \leq \deg(P) - \deg(q)\}$ ,
- $W = \{u \in K[x]; \deg(u) < \deg(P)\}$
- $c=P$  et  $a$  (resp.  $b$ ) un relèvement de  $q$  (resp.  $r$ ) tels que  $\deg(ab - c) < \deg(P)$

Les hypothèses 1 à 4 de la proposition 2.16 sont évidentes.

Soit  $u$  dans  $U$  et  $v$  dans  $V$ . Quitte à les multiplier par une même constante, on peut supposer que  $\max(|u|, |v|) = 1$ . On note alors  $\bar{u}$  et  $\bar{v}$  leur image (coefficient par coefficient) dans l'anneau  $k[x]$ . Les polynômes  $q$  et  $r$  étant premiers entre eux, si on avait  $q\bar{v} + r\bar{u} = 0$  le polynôme  $q$  diviserait  $u$ . Mais comme  $\deg(\bar{u}) \leq \deg u < \deg(q)$  on aurait  $\bar{u} = 0$ , et donc aussi  $\bar{v} = 0$  car  $r$  n'est pas nul, ce qui contredit l'hypothèse  $\max(|u|, |v|) = 1$ . Donc  $|av + bu| = \max(|u|, |v|)$  et l'hypothèse 2.16-6 est vérifiée.

Maintenant, on constate que l'application  $\ell$  de la proposition 2.16 est une injection. Comme  $\dim_K U + \dim_K V = \dim_K W$ , c'est en fait une bijection et l'hypothèse 2.16-6 est vérifiée.

La proposition 2.16, ayant toutes ses hypothèses satisfaites, permet de conclure.  $\square$

Dans le cas de la 1-norme de Gauss, on obtient le résultat suivant.

**Corollaire 2.18.** — Soit  $K$  un corps ultramétrique complet et  $P = \sum a_i x^i$  un polynôme de  $K[x]$  tel que  $|a_i| \leq 1$ . S'il existe deux polynômes  $q$  et  $r$  de  $k[x]$ , premiers entre eux, tels que  $qr = \sum \bar{a}_i x^i$ , alors il existe deux polynômes  $Q = \sum b_i x^i$  et  $R = \sum c_i x^i$  de  $K[x]$  tels que  $P = QR$ ,  $q = \sum \bar{b}_i x^i$ ,  $r = \sum \bar{c}_i x^i$  et  $\deg(Q) = \deg(q)$ .

**Corollaire 2.19 (lemme de Hensel classique).** — Soit  $K$  un corps ultramétrique complet, de corps des restes  $k$ , et soit  $P = \sum a_i x^i$  un polynôme de  $K[x]$  tel que  $\max |a_i| = 1$ . Si le polynôme  $\bar{P} = \sum \bar{a}_i x^i$  (image de  $P$  dans l'anneau  $k[x]$ ) a une racine simple  $\bar{\alpha}$  dans le corps  $k$ , alors le polynôme  $P$  a, dans le corps  $K$ , une racine (simple)  $\alpha$  qui relève  $\bar{\alpha}$ .

*Preuve.* — On applique le corollaire 2.18 à la décomposition  $\bar{P} = (x - \alpha)r(x)$ .  $\square$

**2.4. Fonctions analytiques dans une couronne fermée.** — Dans ce paragraphe,  $J = [\alpha, \beta]$  est un intervalle fermé contenu strictement dans  $[0, \infty]$  <sup>(3)</sup>. On munit l'anneau  $\mathcal{A}(J)$  de la topologie définie par la famille de valeurs absolues  $\{|\cdot|_\rho\}_{\rho \in J}$ . La fonction  $\rho \mapsto |\cdot|_\rho$  étant logarithmiquement convexe (voir exercice 2.8.2), cette topologie est aussi définie par la norme

$$(3) \quad \|\cdot\|_{\mathcal{C}(J)} \stackrel{\text{déf}}{=} \max_{\rho \in J} |\cdot|_\rho = \max(|\cdot|_\alpha, |\cdot|_\beta)$$

Il est facile de voir que l'anneau  $\mathcal{A}(J)$  est le complété, pour la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{C}(J)}$ , de l'anneau  $K[x, x^{-1}]$  (resp.  $K[x]$  si  $\alpha = 0$ , et  $K[x^{-1}]$  si  $\beta = \infty$ ).

Par exemple, pour  $\rho > 0$ , l'anneau  $\mathcal{A}([0, \rho])$  est le complété de l'anneau  $K[x]$  pour la valeur absolue  $|\cdot|_\rho$  et l'anneau  $\mathcal{A}([\rho])$  est le complété de l'anneau  $K[x, x^{-1}]$  (et donc aussi des anneaux  $\mathcal{A}(I)$  pour  $\rho$  dans  $I$ ) pour la valeur absolue  $|\cdot|_\rho$ .

**Remarque 2.20.** — La couronne fermée  $\mathcal{C}(J)$  est un ensemble affinoïde connexe particulier. On désigne ainsi, avec nos notations, les complémentaires dans la droite projective,  $\mathcal{C}([0, \infty])$  d'un nombre fini de disques "ouverts"  $D(a_i, r_i)$ . Les résultats que nous allons montrer pour la couronne  $\mathcal{C}(J)$  se généralisent aux ensembles affinoïdes connexes sans difficulté mais au prix d'un alourdissement des notations.

**Lemme 2.21.** — Soit  $\rho$  un nombre de l'intervalle  $]0, \infty[$  et soit  $f$  une fonction analytique de  $\mathcal{A}([\rho])$ . Il existe un polynôme  $P$   $\rho$ -extremal de  $K[x]$ , un entier  $n$  et une fonction  $g$  de  $\mathcal{A}([\rho])$  tels que  $f = x^n P(1 + g)$ ,  $|g|_\rho < 1$  et  $\deg(P) = N_\rho(f) - n_\rho(f)$ .

<sup>(3)</sup>Le cas de  $\mathcal{A}([0, \infty]) = K$  n'est pas très difficile à étudier !

*Preuve.* — Si  $n_\rho(f) = N_\rho(f) = n$ , on a  $f(x) = a_n x^n + h$  avec  $|h|_\rho < |f|_\rho$ . On en déduit que  $f$  est inversible dans l'anneau complet  $\mathcal{A}([\rho])$ . La proposition est alors vérifiée avec  $P = a_n$  et  $g = x^{-n}h/a_n$ .

Supposons maintenant que  $N_\rho(f) = n_\rho(f) + d$  avec  $d > 0$ . Posons  $n \stackrel{\text{déf}}{=} n_\rho(f)$  et appliquons la proposition 2.16 avec  $A = \mathcal{A}([\rho])$  muni de la valeur absolue  $|\cdot|_\rho$ ,

$$U = \{u \in K[x]; \deg(u) < d\}, \quad V = W = \mathcal{A}([\rho]), \quad a = \sum_{i=0}^d a_{n+i} x^i, \quad b = x^n, \quad c = f.$$

Par construction, on a  $n_\rho(a) = 0$ ,  $N_\rho(a) = d$  et  $n_\rho(b) = N_\rho(b) = n$ . Pour  $u$  dans  $U$  et  $v$  dans  $V$ , le lemme 2.4 donne :

$$N_\rho(av) - n_\rho(av) = N_\rho(v) - n_\rho(v) + d \geq d > N_\rho(u) - n_\rho(v) = N_\rho(bv) - n_\rho(bv).$$

On constate que les termes donnant la valeur de la norme de Gauss dans les deux produits  $av$  et  $bv$  ne peuvent être tous les mêmes et qu'il ne peut y avoir de compensation totale quand on fait leur somme. Il en résulte que  $|au + bv|_\rho = \max(|au|_\rho, |bv|_\rho)$ . En particulier, l'application  $\ell(u, v) = av + bv$  est une injection de  $U \times V$  dans  $W$ .

Montrons maintenant que l'application  $\ell$  est surjective. Les  $K$ -espaces vectoriels  $U \times V$  et  $W$  n'étant pas de dimension finie, nous devons travailler un peu plus que dans le cas des polynômes.

En appliquant le lemme 2.15 à la fonction  $x^{-n}w$  et au polynôme  $a$ , on obtient une décomposition  $x^{-n}w = av + u$  avec  $u$  dans  $U$  et  $v$  dans  $V$ . Autrement dit, on a  $w = a(x^n v) + u$  avec  $u$  dans  $U$  et  $x^n v$  dans  $V$ . Les hypothèses du lemme de Hensel général 2.16 sont vérifiées. Celui-ci montre qu'il existe un (unique) couple  $(u, h)$  formé d'un polynôme  $u$ , de degré  $d - 1$ , et d'une fonction analytique  $h$ , de  $\mathcal{A}([\rho])$ , vérifiant

$$(4) \quad f = (a - u)(x^n - h) \quad , \quad |u|_\rho < |a|_\rho, \quad |h|_\rho < |x^n|_\rho = \rho^n$$

Le lemme est démontré avec  $g = x^{-n}h$  et  $P = a - u = \sum_{i=0}^d \lambda_i x^i$  : comme

$$\begin{aligned} |\lambda_0| &= |a_n - u(0)| = |a_n| = |a_{n+d}| \rho^d = |\lambda_d| \rho^d = |f|_\rho \rho^{-n} \\ |\lambda_i| \rho^i &\leq \max\{|a_i| \rho^i, |u|_\rho\} \leq |f|_\rho \rho^{-n} \quad (1 \leq i < d). \end{aligned}$$

le polynôme  $P$  est en effet  $\rho$ -extrémal. □

Dans le cas particulier des polynômes, on obtient le corollaire suivant.

**Corollaire 2.22.** — Si  $P = \sum_{i=0}^d a_i x^i$  est un polynôme irréductible de  $K[x]$ , alors toutes ses racines ont la même valeur absolue  $\rho = |a_0/a_d|^d$  et il est  $\rho$ -extrémal.

**Lemme 2.23.** — Soit  $J$  un intervalle fermé,  $\rho$  un nombre de  $J \cap ]0, \infty[$ ,  $P$  un polynôme  $\rho$ -extrémal et  $f$  une fonction de  $\mathcal{A}([\rho])$  tels que  $Pf$  appartienne à  $\mathcal{A}(J)$ . Alors  $f$  appartient à  $\mathcal{A}(J)$ .

*Preuve.* — Pour  $g = \sum_{s \in \mathbb{Z}} b_s x^s$  dans  $\mathcal{A}([\alpha, \beta])$ , on pose  $g^+ = \sum_{s \geq 0} b_s x^s$ . C'est une fonction de  $\mathcal{A}([0, \beta])$  et la fonction  $g^- \stackrel{\text{déf}}{=} g - g^+ = \sum_{s < 0} b_s x^s$  appartient à  $\mathcal{A}([\alpha, \infty])$ . Définissons alors des nombres  $c_s$  de  $K$  par

$$Pg^+ - (Pg)^+ = -P(g - g^+) + (Pg - (Pg)^+) = \sum c_s x^s.$$

La première représentation montre que  $c_s = 0$  pour  $s < 0$ , la deuxième que  $c_s = 0$  pour  $s \geq \deg(P)$ . Autrement dit,  $Pg^+ - (Pg)^+$  est un polynôme de degré au plus  $\deg(P) - 1$ .

On va montrer que  $f^+$  appartient à  $\mathcal{A}([0, \rho] \cup J)$ . Si  $J \subset [0, \rho]$ , c'est évident. Sinon l'intervalle  $] \rho, \infty[ \cap J$  est non vide. Par hypothèse, le polynôme  $P$  n'a pas de racine dans la couronne  $\mathcal{C}(]0, \infty[)$ . Il existe donc une fonction  $h$  de  $\mathcal{A}(] \rho, \infty[)$  telle que  $hP = 1$  (c'est le développement de Taylor de la fraction  $1/P$  au voisinage de l'infini). Par construction, la fonction  $g = h(Pf)$  appartient à  $\mathcal{A}(] \rho, \infty[ \cap J)$  et  $Pg = Pf$  (ces deux fonctions sont définies sur la couronne  $\mathcal{C}(] \rho, \infty[ \cap J)$  mais les fonctions  $f$  et  $g$ , elles, sont a priori définies sur deux couronnes d'intersection vide !). Le calcul précédent montre que

$$Q = Pg^+ - Pf^+ = Pg^+ - (Pg)^+ - Pf^+ + (Pf)^+$$

est un polynôme de degré au plus  $\deg(P) - 1$ . Si  $Q \neq 0$ , la fraction rationnelle  $Q/P$ , a au moins un pôle et celui-ci est de valeur absolue  $\rho$  d'après le corollaire 2.14. Elle ne peut donc être égale à la fonction  $g^+ - f^+$  de  $\mathcal{A}([0, \rho])$ . Donc  $Q = 0$  et  $f^+ = g^+$  appartient à  $\mathcal{A}([0, \rho] \cup J)$ .

Selon le même principe, on montre que  $f^- = f - f^+$  appartient à  $\mathcal{A}(] \rho, \infty[ \cup J)$ .  $\square$

**Proposition 2.24 (Lemme de Hensel pour les fonctions analytiques)**

Soit  $J \subset [0, \infty[$  un intervalle fermé et soit  $f$  une fonction de  $\mathcal{A}(J)$ . Il existe un polynôme  $P$  de  $K[x]$  dont toutes les racines sont dans  $\mathcal{C}(J)$  et une fonction  $g$  inversible de  $\mathcal{A}(J)$  tels que  $f = Pg$ . Si  $J = [\alpha, \beta]$ , on a  $\deg(P) = N_\beta(f) - n_\alpha(f)$ .

*Preuve.* — D'après les lemmes 2.21 et 2.23, pour chaque nombre  $\rho$  de l'intervalle  $J$ , il existe une fonction  $g_\rho$  de  $\mathcal{A}(J)$ , un entier  $n_\rho$  et un polynôme  $P_\rho$  tels que  $f = P_\rho x^{n_\rho} (1 + g_\rho)$  et  $|g|_\rho < 1$ .

Par continuité de la norme de Gauss en  $\rho$ , la dernière majoration reste valable pour  $\rho$  dans un sous intervalle ouvert  $J_\rho$  de  $J$ . La fonction  $g_\rho$  est alors inversible dans la couronne  $\mathcal{C}(J_\rho)$  et donc n'y a aucun zéro. Comme le polynôme  $P_\rho$  ne s'annule, dans la couronne  $\mathcal{C}(J_\rho)$ , qu'en un nombre fini de fermés, il en est de même pour  $f$ . L'intervalle compact  $J$  peut être recouvert par un nombre fini d'intervalles  $J_\rho$  et on constate que la fonction  $f$  ne s'annule qu'en un nombre fini de points (fermés) dans la couronne  $\mathcal{C}(J)$  qui sont, outre éventuellement une racine d'ordre  $r$  en 0, les racines des polynômes  $P_{\rho_i}$  ( $1 \leq i \leq \nu$ ).

En appliquant successivement les lemmes 2.21 et 2.23 avec les nombres  $\rho_i$ , on trouve que  $f = Pg$  où  $P = \lambda x^r \prod_{i=1}^\nu P_{\rho_i}$  est un polynôme de  $K[x]$  ayant comme racines les zéros de  $f$  dans la couronne  $\mathcal{C}(J)$  et où  $g$  est une fonction de  $\mathcal{A}(J)$  qui ne s'annule pas dans couronne  $\mathcal{C}(J_\rho)$ .

D'après le lemme 2.21,  $g$  n'ayant pas de zéro dans la couronne  $\mathcal{C}(J)$ , on a  $n_\rho(g) = N_\rho(g)$  pour tout  $\rho$  dans  $J$ . Si  $J = [\alpha, \beta]$ , on en déduit que  $N_\beta(g) = n_\alpha(g) = n$ . En regardant le polygone de Newton de  $g$ , on constate alors que  $g = x^n b_n (1 + h)$  avec  $\|h\|_{\mathcal{C}(J)} < 1$  ce qui montre que  $g$  est inversible dans l'anneau complet  $\mathcal{A}(J)$ .  $\square$

**Corollaire 2.25.** — Si l'intervalle  $J$  est fermé, l'anneau  $\mathcal{A}(J)$  est principal et tout idéal est engendré par un polynôme dont les racines (dans une clôture algébrique du corps  $K$ ) sont dans la couronne  $\mathcal{C}(J)$ .

**Corollaire 2.26.** — Soit  $I \subset [0, \infty]$  un intervalle. Une fonction  $\frac{f}{g}$  du corps des fractions  $\mathcal{F}(I)$  de l'anneau  $\mathcal{A}(I)$  appartient à  $\mathcal{A}(I)$  si et seulement si, pour tout point géométrique  $\zeta$  de la couronne  $\mathcal{C}(I)$ , l'ordre du zéro de  $f$  en  $\zeta$  est supérieur à l'ordre du zéro de  $g$  en  $\zeta$ .

*Preuve.* — Si  $\frac{f}{g} = h$  appartient à  $\mathcal{A}(I)$  alors, pour tout point géométrique  $\zeta$  de la couronne  $\mathcal{C}(I)$ , l'ordre du zéro de  $f$  en  $\zeta$  est égal à la somme des ordres du zéro de  $h$  et de celui de  $g$  en  $\zeta$ . Il est donc supérieur à ce dernier.

D'après la proposition 2.24, pour tout intervalle fermé  $J$  contenu dans  $I$ , il existe des polynômes  $P_J, Q_J$  ayant toutes leurs racines dans la couronne  $\mathcal{C}(J)$  et des fonctions  $\tilde{f}$  et  $\tilde{g}$  inversibles dans  $\mathcal{C}(J)$  tels que  $f = P_J \tilde{f}$  et  $g = Q_J \tilde{g}$ . Une fonction inversible dans  $\mathcal{A}(J)$  n'a pas de zéro dans la couronne  $\mathcal{C}(J)$ . Si pour tout point géométrique  $\zeta$  de la couronne  $\mathcal{C}(J)$ , l'ordre du zéro de  $f$  en  $\zeta$ , donc celui de  $P_J$ , est supérieur à l'ordre du zéro de  $g$  en  $\zeta$ , donc celui de  $Q_J$ , alors  $Q_J$  divise  $P_J$  et  $\frac{f}{g} = \frac{P_J \tilde{f}}{Q_J \tilde{g}}$  appartient à  $\mathcal{A}(J)$ . Autrement dit,  $\frac{f}{g}$  appartient à la réunion des  $\mathcal{A}(J)$  c'est-à-dire à  $\mathcal{A}(I)$ .  $\square$

**Corollaire 2.27.** — Soit  $I$  un intervalle et soit  $\alpha < \beta$  des nombres de l'intérieur de  $I$ . Le nombre de zéros, comptés avec multiplicité, d'une fonction  $f$  de  $\mathcal{A}(I)$  qui sont dans la couronne  $\mathcal{C}([\alpha, \beta])$  est égal à  $d \log^+ |f|_\rho(\beta) - d \log^- |f|_\rho(\alpha)$  où  $s = d \log^+ |f|_\rho(r)$  (resp.  $d \log^- |f|_\rho(r)$ ) désigne la pente logarithmique de la fonction  $\rho \mapsto |f|_\rho$  à droite (resp. gauche) du point  $r$  ( $|f|_\rho = |f|_r (\frac{\rho}{r})^s$  pour  $\rho$  proche de et plus grand que  $r$ ).

*Preuve.* — Il s'agit juste de la traduction du corollaire 2.24 en terme de polygone de valuation en remarquant que, dans ce lemme, la fonction  $f$  et le polynôme  $P$  ont les mêmes zéros.  $\square$

**Corollaire 2.28.** — Soit  $I \subset [0, \infty]$  un intervalle. Une fonction  $f$  de l'anneau  $\mathcal{A}(I)$  est inversible si et seulement si elle n'a pas de zéro dans la couronne  $\mathcal{C}(I)$ . Dans ces conditions, il existe un nombre  $\lambda$  de  $K^*$ , un entier  $d$  et une fonction  $g$  de l'anneau  $\mathcal{A}(I)$  tels que  $f = \lambda x^d (1 + g)$  et  $|g|_\rho < 1$  pour tout  $\rho$  dans  $I$ .

*Preuve.* — Si  $f$  est inversible, elle n'a évidemment pas de zéro dans la couronne  $\mathcal{C}(I)$ . Inversement, si  $f$  n'a pas de zéros dans la couronne  $\mathcal{C}(I)$ , alors  $1/f$  appartient à  $\mathcal{A}(I)$  d'après le corollaire 2.26.

Si  $f$  n'a pas de zéro dans la couronne  $\mathcal{C}(I)$ , d'après le corollaire 2.27, pour tout  $[\alpha, \beta] \subset I$ , on a  $N_\beta(f) - n_\alpha(f) = 0$ . On constate que  $d \stackrel{\text{déf}}{=} n_\rho(f) = N_\rho(f)$  est indépendant de  $\rho$ . Le résultat se lit alors sur le polygone de Newton de  $f$ .  $\square$

Lorsque l'intervalle  $I$  contient 0 ou  $\infty$ , on a  $d = 0$ .

**Exercice 2.29.** — Soit  $f = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} a_s x^s$  dans  $\mathcal{A}([0, r[)$  et soit  $(r_n)_{n \geq 1}$  la suite croissante image par l'application  $\zeta \mapsto |\zeta|$  de l'ensemble des zéros de  $f$ .

1. A l'aide du corollaire 2.27 vérifier que la fonction  $\rho \mapsto |f|_{\rho}$  a une pente logarithmique égale à  $n$  sur l'intervalle  $]r_n, r_{n+1}[$  (si cet intervalle est non vide !).
2. En examinant les polygones de valuation puis de Newton de la fonction  $f$  (voir figure 3), montrer que  $|a_s| = \prod_{i=1}^s r_i$  pour  $s \geq 1$ .

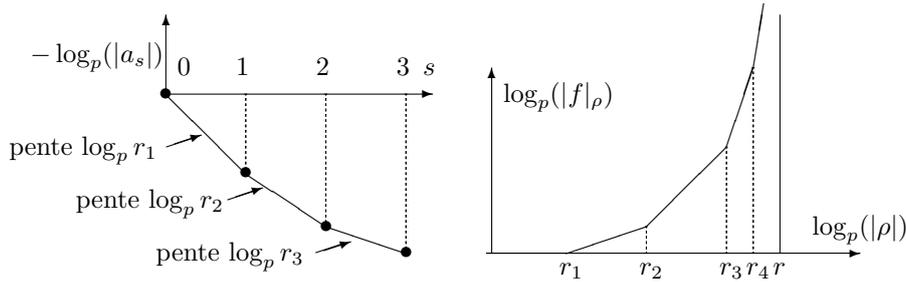


FIGURE 3. Polygones de Newton et de valuation de la fonction  $f$ .

### 3. Éléments analytiques

Les anneaux de fonctions utilisés dans ce cours contiennent presque tous l'anneau  $K[x]$ . Ce dernier est l'anneau des fonctions sur la couronne  $\mathcal{C}([0, \infty[)$  (espace affine de dimension un sur  $K$ ) ayant une singularité méromorphe à l'infini. Par définition, ses *points de Berkovich* sont les semi-normes multiplicatives définies sur  $K[x]$ . Celle-ci comprennent les points fermés

Nous construisons maintenant des corps  $E_{\rho}$  (complété du corps  $K(x)$  pour une norme de Gauss) tels que chaque fonction considérée soit contenue dans au moins l'un de ces corps (pour un anneau de fonctions donné, le nombre  $\rho$  n'est pas nécessairement le même pour toutes les fonctions qu'il contient). Ces anneaux de fonctions sont munis de la dérivation  $D = \frac{d}{dx}$  et vérifieront donc la majoration (7) de la proposition 3.4 ci-dessous pour les nombres  $\rho$  correspondants.

**3.1. Éléments analytiques dans le disque générique.** — Soit  $\rho > 0$  un nombre réel. La  $\rho$ -norme de Gauss, restreinte à l'anneau  $K[x]$  est une valeur absolue et se prolonge donc au corps  $K(x)$  par la formule  $|P/Q|_{\rho} = |P|_{\rho}/|Q|_{\rho}$ .

**Définition 3.1.** — On note  $E_{\rho}$  le (corps) complété de  $K(x)$  pour la  $\rho$ -norme de Gauss. Les éléments du corps  $E_{\rho}$  sont appelés *éléments analytiques* en précisant éventuellement “dans le *disque générique* de rayon  $\rho$ ”.

La justification de cette terminologie sera donnée au paragraphe 3.3.

**Théorème 3.2 (Mittag-Leffler).** — On suppose le corps  $K$  algébriquement clos et on choisit un système  $\bar{K}_{\rho}$  de représentants dans  $K$  de l'ensemble quotient

$$\{\alpha \in K; |\alpha| \leq \rho\} / \{\alpha \in K; |\alpha| < \rho\}.$$

Tout élément  $f$  de  $E_\rho$  s'écrit de manière unique sous la forme

$$(5) \quad f(x) = \sum_{\alpha \in \overline{K}_\rho} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\alpha,s}}{(x-\alpha)^s} + \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_{\infty,s} x^s$$

où les coefficients  $\lambda_{\alpha,s}$  appartiennent à  $K$  et tendent vers 0 sur le filtre des compléments des parties finies de  $(\overline{K}_\rho \cup \{\infty\}) \times \mathbb{N}$ . On a de plus :

$$(6) \quad |f|_\rho = \max_{\alpha \in (\overline{K}_\rho \cup \{\infty\})} |f_\alpha|_\rho \quad \text{avec} \quad |f_\alpha|_\rho = \max_{1 \leq s} |\lambda_{\alpha,s}| \rho^{-s}$$

(resp.  $|f_\infty|_\rho = \max_{0 \leq s} |\lambda_{\infty,s}| \rho^s$ )

*Preuve.* — On va démontrer que toute fraction rationnelle  $f$  de  $K(x)$  possède une décomposition (5) satisfaisant la majoration (6). Grâce à celle-ci la décomposition et la majoration se prolongeront sans difficulté aux fonctions  $f$  de la complétion  $E_\rho$  du corps  $K(x)$ . L'unicité de la décomposition résultera de la formule (6) (car elle montre que la fonction 0 n'a qu'une seule décomposition).

Etant donné une fraction rationnelle  $f$  de  $K(x)$ , on la décompose en éléments simples (dans  $K(x)$  car  $K$  est algébriquement clos) et on développe chacun des termes de cette décomposition en utilisant les formules suivantes :

- pour  $|a| \leq \rho$ ,  $\alpha$  étant l'unique élément de  $\overline{K}_\rho$  tel que  $|a - \alpha| < \rho$ , on écrit

$$\frac{1}{(x-a)^n} = \sum_{s=n}^{\infty} \binom{s-1}{n-1} \frac{(a-\alpha)^{s-n}}{(x-\alpha)^s},$$

- pour  $|a| > \rho$ , on écrit  $\frac{1}{(x-a)^n} = (-1)^n \sum_{s=0}^{\infty} \binom{s+n-1}{n-1} \frac{x^s}{a^{n+s}}$ .

On obtient ainsi une décomposition (5).

Supposons maintenant que  $f$  est non nulle et montrons la formule (6).

- Si  $\rho = 1$ , quitte à multiplier  $f$  par une constante, on peut supposer que

$$\max_{(\alpha,s) \in \overline{K}_1 \times \{1,\dots\} \cup \{\infty\} \times \{0,\dots\}} |\lambda_{\alpha,s}| = 1.$$

Par passage au corps des restes, la décomposition (5) donne une décomposition de la fraction rationnelle  $\bar{f} = \bar{P}/\bar{Q}$  en éléments simples dans le corps  $k(x)$ . Cette décomposition n'est pas nulle et on en déduit que  $\bar{f} \neq 0$  c'est-à-dire  $|f|_1 = 1$ .

- S'il existe  $\lambda$  dans  $K$  tel que  $\rho = |\lambda|$ , on se ramène au cas  $\rho = 1$  en considérant la fraction rationnelle  $g(x) = f(\lambda x)$  et en remarquant que  $\overline{K}_1 = \{\alpha/\lambda\}_{\alpha \in \overline{K}_\rho}$  est un système de représentants du corps des restes  $k$ .

- Si le nombre  $\rho$  n'est pas la norme d'un élément de  $K$ , l'ensemble  $\overline{K}_\rho$  a un seul élément (on pourrait le prendre égal à 0). Les réels  $|\lambda_{\alpha,s}| \rho^{-s}$  et  $|\lambda_{\infty,s}| \rho^s$  sont tous différents (si deux d'entre eux étaient égaux,  $\rho$  aurait une puissance dans  $|K^*|$  et donc serait dans  $|K^*|$  car  $K$  est algébriquement clos). Dans la décomposition (5) il y a donc un seul terme de valeur absolue maximale d'où la formule (6).  $\square$

**Remarque 3.3.** — Si  $K$  n'est pas algébriquement clos, tout élément analytique de  $E_\rho$  est aussi un élément analytique sur la clôture algébrique  $K^{\text{alg}}$  de  $K$  et a donc, une fois choisi l'ensemble de représentants  $\overline{K}_\rho^{\text{alg}}$ , une (unique) décomposition du type (5) avec des coefficients  $\lambda_{\alpha,s}$  dans  $K^{\text{alg}}$ . Si on choisit l'ensemble  $\overline{K}_\rho^{\text{alg}}$  stable par les automorphismes de  $K^{\text{alg}}/K$ , les coefficients  $\lambda_{\alpha,s}$  seront permutés de manière évidente par ces automorphismes.

**Proposition 3.4.** — La dérivation  $D = \frac{d}{dx}$  se prolonge au corps  $E_\rho$  de telle sorte que, pour tout élément analytique  $f$  dans le disque générique de rayon  $\rho$  et pour tout entier  $n$ , on ait :

$$(7) \quad |D^n(f)|_\rho \leq |n!| |f|_\rho \rho^{-n}.$$

*Preuve.* — On a en effet

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n!} D^n \left( \frac{1}{(x-\alpha)^s} \right) \right|_\rho &= \left| \binom{s+n-1}{n} \frac{1}{(x-\alpha)^{s+n}} \right|_\rho \\ &\leq \left| \frac{1}{(x-\alpha)^n} \right|_\rho \left| \frac{1}{(x-\alpha)^s} \right|_\rho = \rho^{-n} \left| \frac{1}{(x-\alpha)^s} \right|_\rho \end{aligned}$$

on montre de même que

$$\left| \frac{1}{n!} D^n (x^s) \right|_\rho \leq \rho^{-n} |x^s|_\rho$$

et on conclut en utilisant la décomposition de Mittag-Leffler (théorème 3.2).  $\square$

**Remarque 3.5.** — Si  $K$  est un corps de caractéristique nulle muni de la valeur absolue triviale, le théorème de Mittag-Leffler montre que :

$$E_\rho = \begin{cases} K(x) \text{ muni de la valeur absolue triviale} & \text{si } \rho = 1 \\ K((x)) \text{ muni de la valuation } x\text{-adique} & \text{si } \rho < 1 \\ K((x^{-1})) \text{ muni de la valuation } x^{-1}\text{-adique} & \text{si } \rho > 1 \end{cases}$$

Le cas de  $\rho < 1$  nous servira à étudier les équations différentielles formelles près de 0. Celui  $\rho > 1$  correspondrait aux équations différentielles formelles près de l'infini.

**3.2. Fonctions analytiques bornées et éléments analytiques.** — Si l'intervalle  $I$  n'est pas fermé, l'anneau  $\mathcal{A}(I)$  n'est plus un  $K$ -espace vectoriel normé mais seulement un espace métrique complet (Fréchet). Si on veut travailler dans un espace de Banach (normé complet), il faut se limiter à un sous-anneau de  $\mathcal{A}(I)$ . Nous donnons dans ce paragraphe deux exemples classiques et souvent utiles de tels sous-anneaux.

**Définition 3.6.** — Soit  $I$  un intervalle. On note  $\mathcal{B}(I)$  (resp  $\mathcal{B}(I, \lambda)$ ) l'ensemble des fonctions analytiques bornées (resp. bornées par  $\lambda$ ) dans la couronne  $\mathcal{C}(I)$  :

$$\mathcal{B}(I, \lambda) = \{f \in \mathcal{A}(I); (\forall \rho \in I) |f|_\rho \leq \lambda\} \quad \mathcal{B}(I) = \bigcup_{\lambda > 0} \mathcal{B}(I, \lambda).$$

L'anneau  $\mathcal{B}(I)$  est muni de la norme "sup" définie par :

$$(8) \quad \left\| \sum_{\mathbb{Z}} a_s x^s \right\|_{\mathcal{C}(I)} = \sup_{x \in \mathcal{C}(I)} \left| \sum_{s \in \mathbb{Z}} a_s x^s \right| = \sup_{\rho \in I} \left| \sum_{s \in \mathbb{Z}} a_s x^s \right|_{\rho}$$

et est complet pour cette norme.

Une fraction rationnelle appartient à  $\mathcal{A}(I)$  si et seulement si elle n'a pas de pôle dans la couronne  $\mathcal{C}(I)$ . Elle appartient alors en fait à  $\mathcal{B}(I)$ .

**Définition 3.7.** — L'anneau  $\mathcal{H}(I)$  des *éléments analytiques dans la couronne*  $\mathcal{C}(I)$  est le complété, pour la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{C}(I)}$ , définie dans la formule (8), de l'anneau des fractions rationnelles de  $K(x)$  sans pôle dans la couronne  $\mathcal{C}(I)$ .

Si l'intervalle  $J$  est fermé, on a  $\mathcal{H}(J) = \mathcal{B}(J) = \mathcal{A}(J)$ . Par contre, si l'intervalle  $I$  n'est pas fermé, les inclusions  $\mathcal{H}(I) \subset \mathcal{B}(I) \subset \mathcal{A}(I)$  sont strictes. La proposition 3.8 et l'exercice 3.10, qui se généralisent très facilement au cas de n'importe quelle couronne ouverte, précisent cette situation.

**Proposition 3.8.** — *Soit  $I$  un intervalle borné (c'est-à-dire contenu dans un intervalle  $[\alpha, \beta]$  avec  $0 < \alpha \leq \beta < \infty$ ) et soit  $f$  une fonction de  $\mathcal{A}(I)$  qui n'a qu'un nombre fini de zéros dans la couronne  $\mathcal{C}(I)$ . Alors  $f$  appartient à  $\mathcal{B}(I)$ .*

*Si le corps  $K$  est à valuation discrète et si  $I = ]\alpha, \beta[$  avec  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $|K^{alg*}| = \sqrt{|K^*|}$ , la fonction  $f$  appartient à  $\mathcal{B}(I)$  si et seulement si elle a un nombre fini de zéros dans la couronne  $\mathcal{C}(I)$ .*

*Preuve.* — Si la fonction  $f$  n'a qu'un nombre fini de zéros dans la couronne  $\mathcal{C}(I)$ , d'après le corollaire 2.27 la pente logarithmique de la fonction  $\rho \mapsto |f|_{\rho}$  est comprise entre deux valeurs  $m$  et  $M$  (finies) telles que  $M - m$  soit égal au nombre de zéros (avec multiplicité) de la fonction  $f$  dans la couronne  $\mathcal{C}(I)$ . Cette fonction est donc bornée sur l'intervalle borné  $I$ .

Si la fonction  $f = \sum_{s \in \mathbb{Z}} a_s x^s$  a un nombre infini de zéros, son polygone de Newton  $\text{New}(f)$  contient une infinité de cotés (d'après la proposition 2.24, chaque coté correspond à une factorisation de la fonction par un polynôme et ne donne qu'un nombre fini de zéros). Si  $I = ]\alpha, \beta[$ , on peut supposer que  $\text{New}(f)$  a une infinité de cotés quand  $\rho$  tend vers  $\beta$ . Puisque  $\beta$  appartient à  $\sqrt{|K^*|}$ , quitte à faire une extension finie du corps  $K$ , ce qui conserve le caractère discret de la valuation, on peut supposer que  $\beta$  appartient à  $|K^*|$  et même, quitte à faire une homothétie, que  $\beta = 1$ . Il existe une suite  $\rho_n$  strictement croissante et tendant vers  $\beta = 1$  (avec  $\rho_0 > \alpha$ ) telle que, pour  $\rho_n \leq \rho \leq \rho_{n+1}$ , on ait  $|f|_{\rho} = |a_{s(n)}| \rho^{s(n)}$ . Les entiers  $s(n)$  sont les pentes logarithmiques des cotés du polygone de valuation de  $f$ . Ils forment une suite strictement croissante, qui tend donc vers l'infini. Par ailleurs, ces cotés ayant une extrémité commune, on a

$$|f|_{\rho_{n+1}} = |a_{s(n)}| \rho_{n+1}^{s(n)} = |a_{s(n+1)}| \rho_{n+1}^{s(n+1)}.$$

Comme  $\rho_{n+1} < 1$ , on en déduit que la suite  $(|a_{s(n)}|)$  est strictement croissante. Or c'est une suite d'éléments du groupe discret  $|K^*|$ . Elle tend donc vers l'infini et

$$\lim_{\rho \rightarrow \beta=1} |f|_{\rho} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} |a_{s(n)}| \rho_n^{s(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_{s(n)}| = \infty.$$

La fonction  $f$  n'est pas bornée.  $\square$

**Remarques 3.9.** — Une fonction analytique bornée peut avoir une infinité de zéros dans son disque de convergence quand l'une des deux conditions  $K$  à valuation discrète et  $\beta$  dans  $\sqrt{|K^*|}$  n'est pas vérifiée. En voici des exemples :

**3.9-1.** — Lorsque le corps  $K$  n'est pas à valuation discrète, il existe des suites  $(a_s)$  d'éléments de  $K$  tels que la suite  $|a_s|$  soit croissante et bornée. On constate que la fonction  $\sum_{s=0}^{\infty} a_s x^s$  est bornée mais a une infinité de zéros dans la couronne  $\mathcal{C}([0, 1[)$ .

**3.9-2.** — Supposons que le corps  $K$  est à valuation discrète et soit  $\varpi$  une *uniformisante* du corps  $K$  (voir définition 1.8). Soit  $\beta = |\varpi|^\lambda$  avec  $\lambda$  irrationnel (autrement dit,  $\beta$  n'appartient pas à  $\sqrt{|K^*|} = |\varpi|^{\mathbb{Q}}$ ). Le demi plan d'équation  $y < x \log \beta$  contient une suite  $(s(n), m(n) \log |\varpi|)$  de points du réseau  $\mathbb{Z} \times \log |\varpi| \mathbb{Z}$  telle que la suite  $s(n) \log \beta - m(n) \log |\varpi| = (s(n)\lambda - m(n)) \log |\varpi|$  soit strictement décroissante et tende vers 0 (considérer, par exemple, la suite  $\frac{m(n)}{s(n)}$  donnée par le développement de  $\lambda$  en fraction continue). On constate que la fonction  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varpi^{m(n)} x^{s(n)}$  appartient à  $\mathcal{B}([0, \beta[, 1)$  et a une infinité de zéros dans la couronne  $\mathcal{C}([0, \beta[)$ .

**3.9-3.** — Dans les situations 3.9-1 (avec  $\beta = 1$ ) et 3.9-2, on a, pour tout entier  $s$ ,

$$|a_s| \beta^s < \sup (|a_s| \beta^s) = \left\| \sum a_s x^s \right\|_{\mathcal{C}(I)}.$$

Autrement dit, l'image de  $\sum a_s x^s$  dans l'anneau résiduel de  $\mathcal{B}(I)$  muni de la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{C}(I)}$  est non nulle mais n'appartient pas à  $k[[x]]$ .

**Exercice 3.10.** — Montrer qu'une fonction  $\sum_{s=0}^{\infty} a_s x^s$  est un élément analytique de  $\mathcal{H}([0, 1[)$  (c'est-à-dire est limite uniforme d'une suite de fractions rationnelles sans pôle dans le disque "ouvert"  $D(0, 1) = \mathcal{C}([0, 1[) = \{x; |x| < 1\}$ ) si et seulement si la suite  $a_s$  est bornée et *presque périodique* c'est-à-dire vérifie la propriété suivante :

$$(\forall \epsilon > 0) \quad (\exists n_\epsilon) \quad s \geq n_\epsilon \Rightarrow |a_{s+n_\epsilon} - a_s| < \epsilon.$$

### 3.3. Fonctions analytiques dans le disque générique. —

**Définition 3.11.** — Pour  $a$  dans  $K$  et  $\rho > 0$ , on note  $\mathcal{A}_a(\rho)$  l'anneau des fonctions analytiques dans le disque  $D(a, \rho)$ , à coefficients dans  $K$  :

$$\mathcal{A}_a(\rho) = \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} a_s (x-a)^s; a_s \in K, (\forall r < \rho) \lim_{s \rightarrow \infty} |a_s| r^s = 0 \right\}.$$

et  $\mathcal{B}_a(\rho)$  le sous-anneau des fonctions analytiques bornées :

$$\mathcal{B}_a(\rho) = \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} a_s (x-a)^s; a_s \in K, (\exists M) |a_s| \rho^s \leq M \right\}.$$

Lorsqu'il y aura besoin de préciser le corps  $K$ , on écrira  $\mathcal{A}_{a,K}(\rho)$  ou  $\mathcal{B}_{a,K}(\rho)$ . On a ainsi cinq notations pour le même objet, à utiliser selon le contexte :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}([0, 1[) = \mathcal{A}_K([0, 1[) = \mathcal{A}_0(1) = \mathcal{A}_{0,K}(1).$$

Un nombre réel  $\rho > 0$  étant donné, nous aurons besoin d'un corps valué complet qui contient  $K$ , dont le groupe des valeurs absolues contient  $\rho$  et dont le corps des

restes est transcendant sur celui de  $K$ . Le corps  $E_\rho$  est, presque par définition, le plus petit des corps qui satisfait ces conditions. Mais, la plupart du temps, nous voulons pouvoir faire varier le nombre  $\rho$  sans changer de corps. Par ailleurs, travailler avec un très gros corps présente peu d'inconvénients.

Nous choisissons donc, une fois pour toutes, un corps  $\Omega$  complet, algébriquement clos, dont le groupe des valeurs absolues  $|\Omega^*|$  est  $\mathbb{R}^+$  et dont le corps des restes est transcendant sur celui de  $K$ . On pourra aussi supposer que  $\Omega$  est sphériquement complet si nécessaire.

**Définition 3.12.** — Soit  $\rho > 0$  un réel et  $a$  dans  $K^{\text{alg}}$ . Un point générique (au bord du disque  $D(a, \rho)$ ) est un élément  $t_{a, \rho}$  de  $\Omega$  tel que  $|t_{a, \rho} - a| = \rho$  et tel que le disque  $D_\Omega(t_{a, \rho}, \rho)$  ne contienne pas de point de  $K^{\text{alg}}$ . Le nombre  $\rho$  s'appelle le rayon du point générique et est noté  $\rho(t)$ . C'est la distance de  $t$  à  $K^{\text{alg}}$ .

A isomorphisme continu de  $\Omega/K$  près, il n'y a qu'un seul point générique au bord du disque  $D(a, \rho)$ .

On écrira  $t_\rho$  pour  $t_{0, \rho}$  (point générique au bord du disque  $D(0, \rho)$ )

**Remarque 3.13.** — Un point de Berkovich de l'espace affine sur  $K$  est, par définition, une semi-norme multiplicative (c'est-à-dire telle que  $|fg| = |f||g|$ ) sur l'anneau  $K(x)$ .

A chaque  $t$  dans  $\Omega$  est associé le point de Berkovich  $|\cdot|_t$  définie par  $|f|_t = |f(t)|$  pour  $f$  in  $K(x)$ . Il est remarquable que tous les points de Berkovich puissent être obtenus de cette façon. Plus précisément, étant donnée une semi-norme multiplicative  $|\cdot|$ , on considère l'idéal premier  $I = \{f \in K(x); |f| = 0\}$ . La semi-norme  $|\cdot|$  est une norme sur le corps  $K(x)/I$ . Comme on a choisi  $\Omega$  suffisamment gros, il contient un sous-corps valué isomorphe à  $K(x)/I$ . On vérifie alors que  $|\cdot|_t = |\cdot|$  où  $t$  est l'image de  $x$  dans le plongement  $K(x) \rightarrow K(x)/I \rightarrow \Omega$ . En fait il y a deux possibilités :

- $I \neq \{0\}$  alors  $t$  appartient à  $K^{\text{alg}}$  et est défini à conjugaison près (point fermé).
- $I = \{0\}$  alors  $t$  est un point générique et les autres points génériques  $u$  donnant le même point de Berkovich sont contenus dans le disque "fermé"  $D_\Omega(t, \rho(t)^+)$ . Ce sont les points de ce disque qui sont "loin" de  $K^{\text{alg}}$  c'est-à-dire n'appartenant pas à une union de disques "ouverts"  $D_\Omega(a_i, \rho(t))$  centrés en des points  $a_i$  de  $K^{\text{alg}}$ . On distingue trois situations :

- $D_\Omega(t, \rho(t)^+)$  contient au moins un point de  $K^{\text{alg}}$  et  $\rho(t)$  appartient au groupe  $\sqrt{|K^*|}$ . Il y a une infinité de disques  $D_\Omega(a_i, \rho(t))$  (indexée par le corps des restes de  $K^{\text{alg}}$ ).
- $D_\Omega(t, \rho(t)^+)$  contient au moins un point de  $K^{\text{alg}}$  et  $\rho(t)$  n'appartient pas au groupe  $\sqrt{|K^*|}$ . Il y a un unique disque  $D_\Omega(a, \rho(t))$ .
- $D_\Omega(t, \rho(t)^+) \cap K^{\text{alg}} = \emptyset$ . Il n'y a pas de disque  $D_\Omega(a_i, \rho(t))$ .

Dans le dernier cas, l'intersection  $\bigcap_{r > \rho(t)} D_\Omega(t, r) \cap K^{\text{alg}}$  de disques (non vides) de  $K^{\text{alg}}$  est vide. Le corps  $K^{\text{alg}}$  n'est donc pas sphériquement complet.

**Notations 3.14.** — Pour  $0 < r \leq \rho$ , on utilisera les notations simplifiées

$$\mathcal{A}_{t_\rho}(r) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \mathcal{A}_{t_\rho, \Omega}(r) \quad , \quad \mathcal{B}_{t_\rho}(r) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \mathcal{B}_{t_\rho, \Omega}(r).$$

Ainsi la fonction  $\sum_{s=0}^{\infty} a_s(x-t_\rho)^s$  appartient à  $\mathcal{A}_{t_\rho}(r)$  (resp.  $\mathcal{B}_{t_\rho}(r)$ ) si les coefficients  $a_s$  appartiennent à  $\Omega$  et si  $\limsup_{s \rightarrow \infty} |a_s|^{1/s} \leq 1/r$  (resp. si les  $|a_s|r^s$  sont bornés).

Soit  $f$  dans  $K(x)$  et soit  $\rho > 0$ . Par définition du point générique  $t_\rho$ , la fraction rationnelle  $f$  n'a ni pôle ni zéro dans le disque  $D(t_\rho, \rho)$  (car ceux-ci sont dans  $K^{\text{alg}}$ ). La valeur absolue  $|f(x)|$  est constante dans ce disque et  $|f|_\rho = \max_{x \in D(t_\rho, \rho)} |f(x)| = |f(t_\rho)|$ . Ainsi le corps valué  $K(x)$  se plonge isométriquement dans l'anneau valué  $\mathcal{B}_{t_\rho}(\rho)$ . En passant au complété, on trouve, pour  $0 < r < \rho$ , les inclusions strictes

$$K(x) \subset E_\rho \subset \mathcal{B}_{t_\rho}(\rho) \subset \mathcal{A}_{t_\rho}(\rho) \subset \mathcal{B}_{t_\rho}(r) \subset \mathcal{A}_{t_\rho}(r).$$

Parmi les fonctions bornées dans le disque  $D(t_\rho, \rho)$ , les éléments analytiques de  $E_\rho$  sont caractérisés par une propriété de "presque périodicité" (exercice 3.10).

## CHAPITRE II FONCTIONS ANALYTIQUES

### 4. Fonctions analytiques dans une couronne quelconque

Si l'intervalle  $I$  n'est pas fermé, les structures topologique et algébrique de l'anneau  $\mathcal{A}(I)$  sont beaucoup plus subtiles. Leur topologie reste relativement facile à comprendre. Par contre, pour mettre leur structure algébrique en évidence, nous aurons besoin de plusieurs préliminaires (annulation du premier groupe de cohomologie et théorème de Lazard). Pour les démontrer nous allons introduire une théorie des faisceaux sur la couronne  $\mathcal{C}(I)$ , version simplifiée de la cohomologie rigide.

**4.1. Propriétés topologiques des anneaux  $\mathcal{A}(I)$ .** — Lorsque  $I$  n'est pas un intervalle fermé,  $\mathcal{A}(I)$  n'est pas un  $K$ -espace vectoriel normé mais seulement un espace métrique complet (Fréchet) :

La topologie de  $\mathcal{A}(I)$  est définie par les valeurs absolues  $\{|\cdot|_\rho\}_{\rho \in I}$ . En particulier, les ensembles  $U_{\rho, \varepsilon} = \{f \in \mathcal{A}(I); |f|_\rho < \varepsilon\}$  avec  $\rho$  dans  $I \cap ]0, \infty[$  et  $\varepsilon > 0$ , sont des ouverts et leurs intersections finies forment une base de voisinages de 0.

En fait, on peut définir la topologie en ne considérant qu'une famille dénombrable  $\{|\cdot|_{\rho_n}\}$  de valeurs absolues à condition de choisir une suite  $(\rho_n)$  de points de  $I$  ayant un point d'accumulation à chacune des extrémités ouvertes de  $I$ . La topologie de  $\mathcal{A}(I)$  est donc métrisable (remarque 1.20).

On vérifie qu'une suite converge (resp. est de Cauchy) dans  $\mathcal{A}(I)$  si et seulement s'il en est ainsi dans  $\mathcal{A}(J)$  pour tout intervalle fermé  $J \subset I$ . Donc  $\mathcal{A}(I)$  est complet.

**Proposition 4.1.** — *Soit  $m$  une application de  $I$  dans  $]0, \infty[$ .*

*L'ensemble  $\mathcal{B}_m \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \{f \in \mathcal{A}(I); |f|_\rho \leq m(\rho) (\forall \rho \in I)\}$  est borné dans  $\mathcal{A}(I)$ .*

*Réciproquement, toute partie bornée de  $\mathcal{A}(I)$  est contenue dans  $\mathcal{B}_m$  pour une fonction  $m$  continue, logarithmiquement convexe et ayant des pentes logarithmiques entières.*

*Preuve.* — Tout ouvert  $U$  de  $\mathcal{A}(I)$  contient une intersection finie  $\bigcap_i U_{\rho_i, \varepsilon_i}$ . Soit  $\lambda$  un nombre de  $K$  tel que  $|\lambda| < \min_i \varepsilon_i / m(\rho_i)$ . Alors  $\mathcal{B}_m \subset \lambda U$ . Donc  $\mathcal{B}_m$  est une partie bornée de  $\mathcal{A}(I)$ .

Pour  $\rho$  dans  $I$ , l'ensemble  $U_{\rho, 1}$  est un ouvert. Si  $\mathcal{B}$  est une partie bornée, il existe  $\lambda_\rho$  tel que  $\mathcal{B} \subset \lambda_\rho U_{\rho, 1} = U_{\rho, |\lambda_\rho|}$ . On constate donc que  $\mathcal{B}$  est contenue dans  $\mathcal{B}_m$  pour  $m(\rho) = |\lambda_\rho|$ .

On a évidemment  $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_{\tilde{m}}$  avec  $\tilde{m}(\rho) = \sup_{f \in \mathcal{B}} |f|_\rho$  et on sait maintenant que cette borne supérieure est finie pour tout  $\rho$  dans  $I$ . Mais comme les fonctions  $\rho \mapsto |f|_\rho$  sont continues, logarithmiquement convexes et ont des pentes logarithmiques entières. Il en est de même de la fonction  $\tilde{m}$ .  $\square$

**Proposition 4.2.** — *Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $[0, \infty[$ . Alors toute partie bornée de  $\mathcal{A}(I)$  est compactoïde dans  $\mathcal{A}(I)$ . Autrement dit,  $\mathcal{A}(I)$ , qui est tonnelé car métrisable et complet, est un espace de Montel.*

*Preuve.* — Soit  $B$  une partie bornée et  $V$  un voisinage de 0 dans  $\mathcal{A}(I)$ . D'après la proposition 4.1,  $B$  est contenue dans un  $\mathcal{B}_m$ . Par ailleurs,  $V$  contient une intersection finie  $\bigcap_i U_{\rho_i, \varepsilon_i}$ . Comme  $I$  est ouvert, il existe  $r$  et  $R$  dans  $I$  tels que  $r < \rho_i < R$  pour tout indice  $i$ . Soit  $f = \sum_{s \in \mathbb{Z}} a_s x^s$  une fonction de  $B \subset \mathcal{B}_m$ . On a

$$|a_s x^s|_{\rho_i} = |a_s x^s|_R \left(\frac{\rho_i}{R}\right)^s \leq |f|_R \left(\frac{\rho_i}{R}\right)^s \leq m(R) \left(\frac{\rho_i}{R}\right)^s.$$

On a la même majoration avec  $r$  au lieu de  $R$ . Il existe un entier relatif  $N_i$  (resp.  $n_i$ ) tel que  $m(R) \left(\frac{\rho_i}{R}\right)^s < \varepsilon_i$  (resp.  $m(r) \left(\frac{\rho_i}{r}\right)^s < \varepsilon_i$ ) pour  $s < N_i$  (resp.  $s > n_i$ ). Posons  $N = \max N_i$  (resp.  $n = \min n_i$ ). La fonction  $f - \sum_{s=n}^N a_s x^s$  appartient alors à  $V$  et  $B \subset E_V + V$  où est  $E_V$  un  $\mathcal{O}_K$ -module de rang  $N - n + 1$ , par exemple celui qui est engendré par les monômes  $\{\alpha_s x^s\}_{n \leq s \leq N}$  avec  $\alpha_s$  tel que  $|\alpha_s| \geq m(R) R^{-s}$ . Autrement dit,  $B$  satisfait la condition pour être compactoïde.  $\square$

Pour comprendre la topologie de  $\mathcal{R}$ , nous utiliserons une autre base de voisinages de 0 de  $\mathcal{A}([\alpha, 1[)$ . Les cas d'un intervalle semi-ouvert général  $[\alpha, \beta[$  ou d'un intervalle ouvert  $I = ]\alpha, \beta[$  se traitent de manière analogue. L'intérêt principal de cette famille de voisinage est décrit dans la remarque 4.3–1 ci-dessous.

Pour  $f = \sum_{s \in \mathbb{Z}} a_s x^s$ , posons  $f^+ = \sum_{s > 0} a_s x^s$  et  $f^- = \sum_{s \leq 0} a_s x^s$ . On obtient la décomposition (rappelons que  $\mathcal{A} = \mathcal{A}([0, 1[)$ )

$$(9) \quad \mathcal{A}([\alpha, 1[) = x \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}([\alpha, \infty[).$$

Comme  $|f|_\rho = \max\{|f^+|_\rho, |f^-|_\rho\}$ , la topologie sur  $\mathcal{A}([\alpha, 1[)$  est la topologie produit.

• L'espace  $\mathcal{A}([\alpha, \infty[)$  est muni de la topologie définie par la norme  $|\cdot|_\alpha$ . C'est un espace de Banach et un système fondamental de voisinages de 0 est donné par les disques "ouverts" de rayon  $\varepsilon$  :

$$D_\alpha^\infty(\varepsilon) = \left\{ f \in \mathcal{A}([\alpha, \infty[); |f|_\alpha < \varepsilon \right\} \quad (\varepsilon > 0).$$

• La topologie de l'espace  $x\mathcal{A}$  est définie par les normes  $\{|\cdot|_\rho\}_{\rho < 1}$ . C'est un espace de Fréchet (métrisable complet) et un système fondamental de voisinages de 0 est donné

par les disques “ouverts” de rayon  $\varepsilon$  pour l’une de ces normes :

$$D_\rho^0(\varepsilon) = \left\{ f \in x\mathcal{A}; |f|_\rho < \varepsilon \right\} \quad (0 \leq \rho < 1; \varepsilon > 0).$$

• Il en résulte qu’un système fondamental de voisinages de 0 dans  $\mathcal{A}([\alpha, 1[)$  est donné par les ensembles produit

$$D_\rho^0(\varepsilon_+) \oplus D_\alpha^\infty(\varepsilon_-) = \left\{ f \in \mathcal{A}([\alpha, 1[); |f^+|_\rho < \varepsilon_+, |f^-|_\alpha < \varepsilon_- \right\}$$

avec  $\rho \in [0, 1[$  et  $\varepsilon_\pm \in ]0, \infty]$  : les cas particuliers  $\varepsilon_+ = \infty$  et  $\varepsilon_- = \infty$  donnent respectivement les voisinages  $D_\rho^0(\varepsilon_+) \oplus \mathcal{A}([\alpha, \infty[)$  et  $x\mathcal{A} \oplus D_\alpha^\infty(\varepsilon_-)$ .

**Remarques 4.3.** — L’application  $\alpha \mapsto |f^-|_\alpha$  (resp.  $\rho \mapsto |f^+|_\rho$ ) est décroissante (resp. croissante). Ceci a plusieurs conséquences :

**4.3-1.** — Pour  $\alpha \leq \rho$ , on a  $\max\{|f^+|_\rho, |f^-|_\alpha\} = \max\{|f|_\rho, |f|_\alpha\} = \max_{\alpha \leq |x| \leq \rho} |f(x)|$ . En particulier,  $D_\rho^0(1) \oplus D_\alpha^\infty(1)$  n’est autre que la boule unité pour la norme de la convergence uniforme sur la couronne  $\mathcal{C}([\alpha, \rho])$ . La décomposition en somme directe permet d’introduire le voisinage  $D_\rho^0(1) \oplus D_\alpha^\infty(1)$  dans le cas où  $\rho < \alpha$ .

**4.3-2.** — Pour  $\alpha < \alpha' < 1$ , on a  $D_\alpha^\infty(\varepsilon) \subset D_{\alpha'}^\infty(\varepsilon)$ . Ceci a une conséquence importante. Soit  $\varepsilon(\alpha)$  une fonction définie sur l’intervalle  $]r, 1[$ . Posons  $\tilde{\varepsilon}(\alpha) = \sup_{\alpha \leq \rho < 1} \varepsilon(\rho)$ . Comme  $\varepsilon(\alpha) \leq \tilde{\varepsilon}(\alpha)$  on a  $D_\alpha^\infty(\varepsilon(\alpha)) \subset D_\alpha^\infty(\tilde{\varepsilon}(\alpha))$ . Inversement, si  $f$  appartient à  $D_\alpha^\infty(\tilde{\varepsilon}(\alpha))$ , il existe  $\rho$  dans  $[\alpha, 1[$  tel que  $|f|_\alpha < \varepsilon(\rho)$  et alors  $|f|_\rho \leq |f|_\alpha < \varepsilon(\rho)$ . Autrement dit, on a  $D_\alpha^\infty(\tilde{\varepsilon}(\alpha)) \subset \bigcup_{\alpha \leq \rho < 1} D_\rho^\infty(\varepsilon(\rho))$ . On a donc montré

$$\bigcup_{r \leq \alpha < 1} D_\alpha^\infty(\varepsilon(\alpha)) = \bigcup_{r \leq \alpha < 1} D_\alpha^\infty(\tilde{\varepsilon}(\alpha))$$

et on constate que, dans une telle réunion, on peut remplacer la fonction quelconque  $\varepsilon$  par la fonction décroissante  $\tilde{\varepsilon}$ .

**4.3-3.** — Pour  $\rho < \rho' < 1$ , on a  $D_\rho^0(\varepsilon) \supset D_{\rho'}^0(\varepsilon)$ .

## 4.2. Théorème de Mittag-Leffler. —

**Définition 4.4.** — Soit  $\mathfrak{J}$  un ensemble ordonné. On dit qu’il est *filtrant* si, pour  $J$  et  $J'$  dans  $\mathfrak{J}$ , il existe  $J''$  vérifiant  $J \leq J''$  et  $J' \leq J''$ . Un *système cofinal dénombrable* de  $\mathfrak{J}$  est alors une suite  $J_n$  strictement croissante de  $\mathfrak{J}$  telle que, pour tout  $J$  dans  $\mathfrak{J}$ , il existe  $n$  vérifiant  $J \leq J_n$ .

**Définition 4.5.** — On appelle *système projectif*  $(X_J, f_{J,J'})_{\mathfrak{J}}$  les données suivantes

- un ensemble  $\mathfrak{J}$  ordonné filtrant,
- pour chaque  $J$  dans  $\mathfrak{J}$ , un ensemble  $X_J$ ,
- pour  $J \leq J'$ , une application  $f_{J,J'} : X_{J'} \rightarrow X_J$  satisfaisant, pour  $J \leq J' \leq J''$ , la relation  $f_{J,J''} = f_{J,J'} \circ f_{J',J''}$ . On suppose en outre que  $f_{J,J}$  est l’identité.

On note alors  $\varprojlim X_J$ , et on appelle *limite projective* du système, l’ensemble des éléments  $(x_J)$  du produit  $\prod_{J \in \mathfrak{J}} X_J$  vérifiant  $f_{J,J'}(x_{J'}) = x_J$  pour  $J < J'$ .

Par construction, pour chaque  $J_0$  dans  $\mathfrak{J}$ , il y a une application canonique  $f_{J_0}$  de  $\varprojlim X_J$  dans  $X_{J_0}$  définie par  $f_{J_0}(x_J) = x_{J_0}$ .

**Lemme 4.6.** — Soit  $(X_n, f_{n,m})_{n \in \mathbb{N}}$  un système projectif indexé par les entiers. On suppose que

1. Chaque ensemble  $X_n$  est non vide et muni d'une distance ultramétrique  $d_n$  pour laquelle il est complet.
2. Les applications  $f_{n,n+1}$  sont uniformément continues pour les distances  $d_n$  et  $d_{n+1}$ .
3. L'image  $f_{n,n+1}(X_{n+1})$  est dense dans  $X_n$ .

Alors la limite projective  $X = \varprojlim X_n$  est non vide.

*Preuve.* — On commence par construire une suite double  $(v(n, m))_{n \geq 0, m > 0}$  par la récurrence sur  $n$  suivante :

- $v(0, m) = \frac{1}{m}$ .
- Le nombre  $v(n, m)$  étant connu, comme l'application  $f_{n,n+1}$  est uniformément continue, il existe  $\eta_{nm} > 0$  tel que

$$d_{n+1}(x, y) \leq \eta_{nm} \Rightarrow d_n(f_{n,n+1}(x), f_{n,n+1}(y)) \leq v(n, m) ;$$

on pose alors  $v(n+1, m) = \min(\frac{1}{m}, \eta_{nm})$ .

On a donc tout fait pour avoir les deux propriétés suivantes :

- $v(n, m) \leq \frac{1}{m}$ .
- $d_{n+1}(x, y) \leq v(n+1, m) \Rightarrow d_n(f_{n,n+1}(x), f_{n,n+1}(y)) \leq v(n, m)$ .

Maintenant, on choisit  $x_0$  dans  $X_0$ . Comme  $f_{m,m+1}(X_{m+1})$  est dense dans  $X_m$ , on peut choisir, par récurrence, un point  $x_m$  dans chacun des  $X_m$  de telle sorte que

$$d_m(f_{m,m+1}(x_{m+1}), x_m) \leq v(m, m).$$

Pour  $n \leq m$ , une récurrence décroissante sur  $n$  montre que :

$$\begin{aligned} d_n(f_{n,m+1}(x_{m+1}), f_{n,m}(x_m)) &= d_n(f_{n,n+1} \circ f_{n+1,m+1}(x_{m+1}), f_{n,n+1} \circ f_{n+1,m}(x_m)) \\ &\leq v(n, m) \leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Pour  $n \leq p \leq q$ , on trouve alors :

$$d_n(f_{n,q}(x_q), f_{n,p}(x_p)) \leq \max_{p \leq m < q} d_n(f_{n,m+1}(x_{m+1}), f_{n,m}(x_m)) \leq \max_{p \leq m < q} \frac{1}{m} = \frac{1}{p}.$$

Autrement dit, pour chaque  $n$ , la suite  $f_{n,m}(x_m)$  est de Cauchy dans  $X_n$  donc convergente. Notons  $y_n$  sa limite. On trouve :

$$\begin{aligned} y_n &= \lim_{m \rightarrow \infty} f_{n,m}(x_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_{n,n+1} \circ f_{n+1,m}(x_m) \\ &= f_{n,n+1} \left( \lim_{m \rightarrow \infty} f_{n+1,m}(x_m) \right) = f_{n,n+1}(y_{n+1}) \end{aligned}$$

et on constate que l'élément  $(y_n)$  de  $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$  appartient à  $\varprojlim X_n$ . □

On trouve la définition suivante dans Bourbaki [8]

**Définition 4.7.** — Nous dirons que le système projectif  $(X_J, f_{J,J'})_{\mathfrak{J}}$  satisfait la *condition de Mittag-Leffler* si

1. Chaque ensemble  $X_J$  est non vide et muni d'une distance ultramétrique  $d_J$  pour laquelle il est complet.
2. Les applications  $f_{J,J'}$  sont uniformément continues pour les distances  $d_J$  et  $d_{J'}$ .
3. Pour  $J$  dans  $\mathfrak{J}$ , il existe  $J' \geq J$  tel que, pour tout  $J'' > J'$ , l'image  $f_{J,J''}(X_{J''})$  est dense dans l'image  $f_{J,J'}(X_{J'})$ .

Si la condition 4.7-3 est satisfaite, on peut y remplacer l'indice  $J'$  par n'importe quel indice plus grand. Nous utiliserons aussi la version, un peu plus contraignante, de cette condition dans laquelle on impose  $J' = J$ .

**Définition 4.7 (forte).** — Nous dirons que le système projectif  $(X_J, f_{J,J'})_{\mathfrak{J}}$  satisfait la *condition de Mittag-Leffler forte* s'il satisfait les conditions 4.7-1, 4.7-2 et

- 3F. Pour  $J$  dans  $\mathfrak{J}$  et  $J' > J$ , l'image  $f_{J,J'}(X_{J'})$  est dense dans  $X_J$ .

**Lemme 4.8.** — Soit  $(X_J, f_{J,J'})_{\mathfrak{J}}$  un système projectif indexé par un ensemble  $\mathfrak{J}$  contenant un système cofinal dénombrable et satisfaisant la condition de Mittag-Leffler. Alors la limite projective  $X = \lim_{\leftarrow} X_J$  est non vide.

*Preuve.* — Choisissons un système cofinal dénombrable  $J_n$  de  $\mathfrak{J}$ . D'après la condition de Mittag-Leffler 4.7-3, nous pouvons construire par récurrence une application strictement croissante  $\varphi$  de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  telle que

- $\varphi(0) = 0$ ,
- pour  $m \geq \varphi(n+1)$ , l'image  $f_{J_{\varphi(n)}, J_m}(X_m)$  est dense dans  $f_{J_{\varphi(n)}, J_{\varphi(n+1)}}(X_{\varphi(n+1)})$ .

Posons :

- $Y_n =$  adhérence de  $f_{J_{\varphi(n)}, J_{\varphi(n+1)}}(X_{\varphi(n+1)})$  dans  $X_{\varphi(n)}$ ,
- $g_{n,m} =$  restriction à  $Y_m$  de  $f_{J_{\varphi(n)}, J_{\varphi(m)}}$ ,
- $d_n = d_{J_{\varphi(n)}}$ ,

de telle sorte que l'on ait :

- chaque ensemble  $Y_n$  est muni de la distance (ultramétrique)  $d_n$  pour laquelle il est complet,
- les applications  $g_{n,n+1}$  sont uniformément continues pour les distances  $d_n$  et  $d_{n+1}$ .
- l'image  $g_{n,n+1}(Y_{n+1})$ , qui contient

$$f_{J_{\varphi(n)}, J_{\varphi(n+1)}}(f_{J_{\varphi(n+1)}, J_{\varphi(n+2)}}(X_{\varphi(n+2)})) = f_{J_{\varphi(n)}, J_{\varphi(n+2)}}(X_{\varphi(n+2)}),$$

est dense dans  $f_{J_{\varphi(n)}, J_{\varphi(n+1)}}(X_{\varphi(n+1)})$  donc dans  $Y_n$ .

Autrement dit, le sous système projectif  $(Y_n, g_{n,m})_{\mathbb{N}}$  satisfait les hypothèses du lemme 4.6 et  $\lim_{\leftarrow} Y_n$  est non vide.

Soit  $(y_n)$  un élément de la limite projective  $\lim_{\leftarrow} Y_n$ . Pour  $J$  dans  $\mathfrak{J}$ , on choisit un entier  $n$  tel que  $J \leq \varphi(n)$  et on pose  $x_J = f_{J, J_{\varphi(n)}}(y_n)$ . Pour  $n < m$ , on a :

$$x_J = f_{J, J_{\varphi(n)}}(y_n) = f_{J, J_{\varphi(n)}}(g_{n,m}(y_m)) = f_{J, J_{\varphi(n)}} \circ f_{J_{\varphi(n)}, J_{\varphi(m)}}(y_m) = f_{J, J_{\varphi(m)}}(y_m)$$

et  $x_n$  ne dépend pas de l'entier  $n$  qui a servi à le définir. Par ailleurs la relation :

$$f_{J, J'}(x_{J'}) = f_{J, J'} \circ f_{J', J_{\varphi(n)}}(y_n) = f_{J, J_{\varphi(n)}}(y_n) = x_J$$

montre que  $(x_J)$  est un élément de  $\varprojlim X_J$ .  $\square$

**Corollaire 4.9.** — Soit  $(X_J, f_{J,J'})_{\mathfrak{J}}$  un système projectif indexé par un ensemble  $\mathfrak{J}$  contenant un système cofinal dénombrable et satisfaisant la condition de Mittag-Leffler forte. Alors, pour chaque indice  $J_0$ , l'image  $f_{J_0}(\varprojlim X_J)$  est dense dans  $X_{J_0}$ .

*Preuve.* — Il faut montrer que tout disque fermé non vide  $D$  de  $X_{J_0}$  contient au moins un point de l'image  $f_{J_0}(\varprojlim X_J)$ . Pour cela nous considérons le système projectif

$(f_{J_0 J}^{-1}(D), f_{J,J'})_{J \geq J_0}$ . Il satisfait la condition de Mittag-Leffler car

- $f_{J_0 J}^{-1}(D)$  est contenu dans  $X_J$  et muni de la distance ultramétrique  $d_J$ .
- Par restriction les applications  $f_{J,J'}$  restent uniformément continues.
- La condition 4.7.3F pour le système  $X_J$ , assure que les ensembles  $f_{J_0 J}^{-1}(D)$  sont non vides (en fait d'après la condition 4.7.2, il contiennent même un disque).
- $D$  étant fermé, son image réciproque  $f_{J_0 J}^{-1}(D)$  est un fermé de l'espace complet  $X_J$ . C'est donc un espace complet pour la distance  $d_J$ .
- Pour  $J' > J \geq J_0$ ,  $f_{J,J'}(X_{J'})$  est dense dans  $X_J$  donc

$$f_{J,J'}(f_{J_0 J'}^{-1}(D)) = f_{J,J'}(X_{J'}) \cap f_{J_0 J}^{-1}(D)$$

est dense dans  $f_{J_0 J}^{-1}(D)$ .

D'après le lemme 4.9, la limite projective  $\varprojlim f_{J_0 J}^{-1}(D)$  contient (au moins) un élément  $(x_J)_{J \geq J_0}$ . Ceci définit les  $x_J$  pour  $J \geq J_0$ . Pour  $J$  dans  $\mathfrak{J}$  avec  $J \not\geq J_0$ , on choisit  $J'$  dans  $\mathfrak{J}$  tel que  $J' > J_0$  et  $J' > J$  et on pose  $x_J = f_{J,J'}(x_{J'})$ . Cet élément est indépendant du choix de  $J'$  et on obtient un élément  $(x_J)$  de  $\varprojlim X_J$  tel que  $f_{J_0}(x_J) = x_{J_0}$  appartient à  $D$ .  $\square$

**Remarque 4.10.** — Si  $(J_n)$  est un système cofinal dénombrable du système projectif  $(X_J, f_{J,J'})$  alors le sous-système  $(X_{J_n}, f_{J_m, J_n})$  est projectif (et indexé par les entiers) et, à la fin de la démonstration du lemme 4.8, nous avons implicitement vérifié que  $\varprojlim X_J = \varprojlim X_{J_n}$ . En particulier, la limite projective peut se calculer en utilisant n'importe quel système cofinal dénombrable.

Etant donné un ensemble ordonné filtrant  $\mathfrak{J}$ , nous définissons la catégorie des systèmes projectifs indexés par  $\mathfrak{J}$ .

**Définition 4.11.** — Un morphisme  $(X_J, f_{J,J'})_{\mathfrak{J}} \xrightarrow{u} (Y_J, g_{J,J'})_{\mathfrak{J}}$  entre deux systèmes projectifs indexés par  $\mathfrak{J}$  est la donnée, pour chaque  $J$  de  $\mathfrak{J}$ , d'une application  $X_J \xrightarrow{u_J} Y_J$  satisfaisant  $u_J \circ f_{J,J'} = g_{J,J'} \circ u_{J'}$ . Dans ces conditions, on a une application canonique  $(\varprojlim u_J) : \varprojlim X_J \rightarrow \varprojlim Y_J$  définie par  $(\varprojlim u_J)((x_J)) = (u_J(x_J))$ .

Si les ensembles  $X_J$  sont des groupes commutatifs (resp. des espaces vectoriels) et les applications  $f_{J,J'}$  des morphismes de groupes (resp. des applications linéaires) on parlera de système projectif de groupes (resp. d'espaces vectoriels). Les applications  $u_J$  définissant les morphismes de cette sous-catégorie seront des morphismes de groupes (resp. des applications linéaires).

**Définition 4.12.** — La suite  $0 \rightarrow (X_J, f_{J,J'}) \xrightarrow{u} (Y_J, g_{J,J'}) \xrightarrow{v} (Z_J, h_{J,J'}) \rightarrow 0$  de systèmes projectifs de groupes (indexés par le même ensemble  $\mathfrak{J}$ ) est dite exacte si, pour chaque  $J$  de  $\mathfrak{J}$ , la suite  $0 \rightarrow X_J \xrightarrow{u_J} Y_J \xrightarrow{v_J} Z_J \rightarrow 0$  est exacte.

Si  $(X_J, f_{J,J'}) \xrightarrow{u} (Y_J, g_{J,J'})$  est un morphisme de systèmes projectifs de groupes, on constate que  $(\ker u_J, f_{J,J'})$  et  $(\text{coker } u_J, g_{J,J'})$  sont des systèmes projectifs de groupes appelés noyau et coimage du morphisme  $u$ .

Si la suite  $0 \rightarrow (X_J, f_{J,J'}) \xrightarrow{u} (Y_J, g_{J,J'}) \xrightarrow{v} (Z_J, h_{J,J'}) \rightarrow 0$  de systèmes projectifs de groupes est exacte, l'élément  $(y_J)$  de  $\varprojlim Y_J$ , appartient au noyau de  $v$  si et seulement si  $v_J(y_J) = 0$  pour tout  $J$ , c'est-à-dire s'il existe un unique élément  $(x_J)$  de  $\prod X_J$  tel que  $y_J = u(x_J)$  pour tout  $J$ . Comme

$$u_J \circ f_{J,J'}(x_{J'}) = g_{J,J'} \circ u_{J'}(x_{J'}) = g_{J,J'}(y_{J'}) = y_J$$

on a  $f_{J,J'}(x_{J'}) = x_J$  et  $(x_J)$  appartient en fait à  $\varprojlim X_J$ . On constate donc que la suite

$$0 \rightarrow \varprojlim X_J \xrightarrow{(\varprojlim u_J)} \varprojlim Y_J \xrightarrow{(\varprojlim v_J)} \varprojlim Z_J$$

est exacte. Mais, en général, l'application  $\varprojlim v_J$  n'est pas surjective.

**Théorème 4.13 (Mittag-Leffler).** — Soit  $\mathfrak{J}$  un ensemble ordonné contenant un système cofinal dénombrable, et soit

$$0 \rightarrow (X_J, f_{J,J'}) \xrightarrow{u} (Y_J, g_{J,J'}) \xrightarrow{v} (Z_J, h_{J,J'}) \rightarrow 0$$

une suite exacte de systèmes projectifs de groupes indexés par  $\mathfrak{J}$ . Si le système  $(X_J, f_{J,J'})$  satisfait la condition 4.7 de Mittag-Leffler, alors on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \varprojlim X_J \xrightarrow{(\varprojlim u_J)} \varprojlim Y_J \xrightarrow{(\varprojlim v_J)} \varprojlim Z_J \rightarrow 0$$

*Preuve.* — Il faut montrer que l'application  $\varprojlim v_J$  est surjective.

Soit  $(z_J)$  un élément de  $\varprojlim Z_J$ . Par hypothèse, les applications  $v_J$  sont surjectives.

Pour chaque indice  $J$ , les ensembles  $v_J^{-1}(z_J)$  sont donc non vides. Si  $v_{J'}(y_{J'}) = z_{J'}$ , on a  $v_{J'} \circ g_{J,J'}(y_{J'}) = h_{J,J'}(z_{J'}) = z_J$ . Autrement dit,  $g_{J,J'}(v_{J'}^{-1}(z_{J'}))$  est contenu dans  $v_J^{-1}(z_J)$  et  $(v_J^{-1}(z_J), g_{J,J'})$  est un système projectif. Montrons qu'il satisfait la condition de Mittag-Leffler. D'après le lemme 4.8, il existera un élément  $(y_J)$  dans la limite projective de ce système, donc dans  $\varprojlim Y_J$ , et dont l'image par  $\varprojlim v_J$  sera  $(z_J)$ .

Si on prend deux éléments  $y_J$  et  $\tilde{y}_J$  de  $v_J^{-1}(z_J)$ , on a  $v_J(y_J - \tilde{y}_J) = z_J - z_J = 0$ . Donc il existe un unique  $x_J$  dans  $X_J$  tel que  $u_J(x_J) = y_J - \tilde{y}_J$ . On définit alors une distance sur  $v_J^{-1}(z_J)$  en posant  $\tilde{d}_J(y_J, \tilde{y}_J) = d_J(x_J, 0)$ . En fait, si on fixe  $\tilde{y}_J$ , l'application  $x_J \mapsto \tilde{y}_J + u_J(x_J)$  est une bijection de  $X_J$  dans  $v_J^{-1}(z_J)$  qui, par définition de la

distance, est une isométrie. Donc, muni de la distance  $\tilde{d}_J$ ,  $v_J^{-1}(z_J)$  est complet. Si  $J' > J$ , on a

$$g_{J,J'}(y_{J'} - \tilde{y}_{J'}) = g_{J,J'} \circ u_{J'}(x_{J'}) = u_{J'} \circ f_{J,J'}(x_{J'})$$

donc, pour  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta$  tel que, si  $\tilde{d}_{J'}(y_{J'}, \tilde{y}_{J'}) = d_{J'}(x_{J'}, 0) < \eta$  on a

$$d_J(g_{J,J'}(y_{J'}), g_{J,J'}(\tilde{y}_{J'})) = d_J(f_{J,J'}(x_{J'}), 0) < \varepsilon.$$

Autrement dit, l'application  $g_{J,J'}$  est uniformément continue.

Pour  $J$  fixé, soit  $J'$  tel que, pour  $J'' > J'$ ,  $f_{J,J''}(X_{J''})$  est dense dans  $f_{J,J'}(X_{J'})$  et soit  $\tilde{y}_J = g_{J,J'}(\tilde{y}_{J'})$  un élément de  $g_{J,J'}(v_{J'}^{-1}(z_{J'}))$ . Fixons un élément  $\tilde{y}_{J''}$  de  $v_{J''}^{-1}(z_{J''})$  et définissons l'élément  $\tilde{x}_{J'}$  de  $X_{J'}$  tel que :

$$u_{J'}(\tilde{x}_{J'}) = g_{J',J''}(\tilde{y}_{J''}) - \tilde{y}_{J'}.$$

On trouve alors  $u_{J'} \circ f_{J,J'}(\tilde{x}_{J'}) = g_{J,J'}(\tilde{y}_{J'} - g_{J',J''}(\tilde{y}_{J''})) = \tilde{y}_J - g_{J,J''}(\tilde{y}_{J''})$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $x_{J''}$  dans  $X_{J''}$  tel que  $d_J(f_{J,J''}(x_{J''}), f_{J,J'}(\tilde{x}_{J'})) < \varepsilon$ . Alors  $y_{J''} = \tilde{y}_{J''} + u_{J''}(x_{J''})$  appartient à  $v_{J''}^{-1}(z_{J''})$  et vérifie

$$\begin{aligned} \tilde{d}_J(g_{J,J''}(y_{J''}), \tilde{y}_J) &= \tilde{d}_J(g_{J,J''}(y_{J''} - \tilde{y}_{J''}), \tilde{y}_J - g_{J,J''}(\tilde{y}_{J''})) \\ &= d_J(f_{J,J''}(x_{J''}) - f_{J,J'}(\tilde{x}_{J'}), 0) < \varepsilon \end{aligned}$$

ce qui montre que  $g_{J,J''}(v_{J''}^{-1}(z_{J''}))$  est dense dans  $g_{J,J'}(v_{J'}^{-1}(z_{J'}))$  □

**4.3. Faisceautisation.** — Un bon point de vue est de considérer  $\mathcal{A}(I)$  comme l'intersection des anneaux  $\mathcal{A}(J)$  pour  $J$  parcourant l'ensemble des intervalles fermés contenus dans  $I$ . L'exercice suivant traduit cette remarque d'une manière un peu pédante mais qui va faire le lien avec le paragraphe précédent.

**Exercice 4.14.** — Soit  $I$  un intervalle ouvert contenu dans  $]0, \infty[$ . On note  $\mathfrak{J}$  l'ensemble des intervalles fermés contenus dans  $I$  ordonné par l'inclusion.

1. Vérifier que  $\mathfrak{J}$  est filtrant et contient un système cofinal dénombrable.
2. Pour  $J \subset J'$  on note  $\mathbf{I}_{J,J'}$  l'injection canonique de  $\mathcal{A}(J')$  dans  $\mathcal{A}(J)$  et on considère le système projectif  $(\mathcal{A}(J), \mathbf{I}_{J,J'})_{\mathfrak{J}}$ . Vérifier que  $\lim_{\leftarrow} \mathcal{A}(J)$  est isomorphe à  $\mathcal{A}(I)$ .

**Définition 4.15.** — Un faisceau  $\mathcal{M}$  sur  $\mathcal{C}(I)$  est la donnée,

1. pour chaque intervalle fermé  $J$  contenu dans  $I$ , d'un groupe abélien  $\mathcal{M}(J)$ ,
2. Pour  $J \subset J'$ , d'un homomorphisme de groupe  $\mathcal{M}(J') \xrightarrow{f_{\mathcal{M},J,J'}} \mathcal{M}(J)$

Ces données vérifiant les conditions suivantes :

3.  $(\mathcal{M}(J), f_{\mathcal{M},J,J'})$  est un système projectif :  
pour  $J \subset J' \subset J''$  on a  $f_{\mathcal{M},J,J''} = f_{\mathcal{M},J,J'} \circ f_{\mathcal{M},J',J''}$  et  $f_{\mathcal{M},J,J}$  est l'identité,
4. Si  $J = J' \cup J''$  et si  $m'$  et  $m''$  appartiennent respectivement à  $\mathcal{M}(J')$  et  $\mathcal{M}(J'')$  et vérifient  $f_{\mathcal{M},J' \cap J'',J'}(m') = f_{\mathcal{M},J' \cap J'',J''}(m'')$  alors il existe  $m$  dans  $\mathcal{M}(J)$  tel que  $m' = f_{\mathcal{M},J',J}(m)$  et  $m'' = f_{\mathcal{M},J'',J}(m)$ .

**Remarque 4.16.** — La couronne  $\mathcal{C}(I)$  est un “espace analytique rigide”. En particulier il est muni d’une topologie de Grothendieck pour laquelle les familles de sous-couronnes fermées  $\{\mathcal{C}(J_i)\}$ , avec  $I = \bigcup J_i$ , sont des recouvrements admissibles (voir [27] page 26 et suivantes par exemple). La condition 4.15-3 définit un *préfaisceau* et la condition 4.15-4 assure que ce préfaisceau est un faisceau. Cette seconde condition assure que tout faisceau est localement acyclique pour les recouvrements admissibles. Autrement dit, les groupes de cohomologie d’un faisceau peuvent se calculer comme groupes de *cohomologie de Čech* associé à n’importe lequel de ces recouvrements. Toutefois, nous définissons les groupes de cohomologie en utilisant uniquement des recouvrements par une famille dénombrable et croissante d’intervalles fermés (voir [27] lemme 1.8.2). Pour ces recouvrements, la condition 4.15-4 est vide et celle-ci n’apparaîtra donc jamais dans les démonstrations. En fait, notre définition s’applique aux préfaisceaux et calcule alors la cohomologie du faisceau associé.

On pourrait aussi introduire les groupes de cohomologie comme foncteurs dérivés du foncteur  $\varprojlim$  (dans la démonstration de la proposition 4.21, on montre implicitement que la catégorie des faisceaux a suffisamment d’injectifs).

A un faisceau  $\mathcal{M}$  sur  $\mathcal{C}(I)$  et à un système cofinal dénombrable de  $\mathfrak{J}$ , c’est-à-dire à une suite  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d’intervalles fermés tels que  $J_{n+1} \supset J_n$  et  $\bigcup J_n = I$ , on associe l’application :

$$\delta : \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}(J_n) \longrightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}(J_n) \quad \delta(m_n) = (f_{\mathcal{M}, J_n, J_{n+1}}(m_{n+1}) - m_n)$$

**Proposition 4.17.** — *Le noyau et le conoyau de l’application  $\delta$  sont indépendants du choix de la suite  $(J_n)$ .*

*Preuve.* — On constate facilement que  $\ker \delta = \varprojlim \mathcal{M}(J_n)$ . Or, comme on l’a vu dans la remarque 4.10, cette limite projective est indépendante du système cofinal  $(J_n)$  choisi et est la limite projective  $\varprojlim \mathcal{M}(J)$  du système complet.

Pour traiter le cas du conoyau, on commence par montrer que le conoyau ne change pas si on remplace la famille  $(J_n)$  par une famille extraite  $J_{u_d}$  où  $(u_d)$  est une suite strictement croissante. Pour cela nous définissons deux applications  $h_0$  et  $h_1$  de  $\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}(J_n)$  dans  $\prod_{d \in \mathbb{N}} \mathcal{M}(J_{u_d})$  en posant

$$h_0((m_n)) = (m_{u_d}) \quad , \quad h_1((m_n)) = \left( \sum_{n=u_d}^{u_{d+1}-1} f_{\mathcal{M}, J_{u_d}, J_n}(m_n) \right)$$

et nous établissons leurs principales propriétés :

- Un élément  $(s_d)$  de  $\prod_{d \in \mathbb{N}} \mathcal{M}(J_{u_d})$  étant donné, on pose  $m_{u_d} = s_d$  et  $m_n = 0$  si  $u_d < n < u_{d+1}$ . On constate alors que  $h_0((m_n)) = h_1((m_n)) = (s_d)$ . Autrement dit, les applications  $h_0$  et  $h_1$  sont surjectives.
- L’endomorphisme  $\delta_u$  de  $\prod_{d \in \mathbb{N}} \mathcal{M}(J_{u_d})$  étant défini par

$$\delta_u((m_{u_d})) = (f_{\mathcal{M}, J_{u_d}, J_{u_{d+1}}}(m_{u_{d+1}}) - m_{u_d}),$$

on constate que :

$$\begin{aligned} h_1 \circ \delta((m_n)) &= \left( \sum_{n=u_d}^{u_{d+1}-1} f_{\mathcal{M}, J_{u_d}, J_{n+1}}(m_{n+1}) - f_{\mathcal{M}, J_{u_d}, J_n}(m_n) \right) \\ &= (f_{\mathcal{M}, J_{u_d}, J_{u_{d+1}}}(m_{u_{d+1}}) - m_{u_d}) = \delta_u \circ h_0((m_n)) \end{aligned}$$

Autrement dit  $h_1 \circ \delta = \delta_u \circ h_0$ .

- Soit  $(s_n)$  un élément de  $\ker h_1$  c'est-à-dire tel que  $\sum_{n=u_d}^{u_{d+1}-1} f_{\mathcal{M}, J_{u_d}, J_n}(s_n) = 0$  pour tout

$d$ . Alors l'élément  $m_n = - \sum_{k=n}^{u_d-1} f_{\mathcal{M}, J_n, J_k}(s_k)$  de  $\mathcal{M}(J_n)$  est indépendant du nombre  $d$  dès que  $u_d > n$ . On vérifie immédiatement que  $f_{\mathcal{M}, J_n, J_{n+1}}(m_{n+1}) - m_n = s_n$  et que  $h_0(m_n) = 0$ . Autrement dit,  $(s_n) = \delta(m_n)$  et  $\ker h_1 \subset \delta(\ker h_0)$ .

On résume ces propriétés dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & \ker \delta & \longrightarrow & \ker \delta_u & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \ker h_0 & \longrightarrow & \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}(J_n) & \xrightarrow{h_0} & \prod_{d \in \mathbb{N}} \mathcal{M}(J_{u_d}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \delta \downarrow & & \delta_u \downarrow & & \downarrow \\ \ker h_1 & \longrightarrow & \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}(J_n) & \xrightarrow{h_1} & \prod_{d \in \mathbb{N}} \mathcal{M}(J_{u_d}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{coker } \delta & \longrightarrow & \text{coker } \delta_u & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

et on constate que  $\text{coker } \delta_u$  est isomorphe à  $\text{coker } \delta$ .

Maintenant, à partir de deux suites cofinales  $(J_n)$  et  $(J'_n)$ , on en construit facilement une troisième de la forme  $(\dots, J_{u_n}, J'_{v_n}, \dots)$  qui a une suite extraite en commun avec chacune des deux suites initiales. Ceci suffit à assurer que les conoyaux des applications  $\delta$  coïncident.  $\square$

**Définition 4.18.** — Soit  $\mathcal{M}$  un faisceau sur  $\mathcal{C}(I)$ , on pose :

$$H^0(\mathcal{C}(I), \mathcal{M}) = \ker \delta \quad , \quad H^1(\mathcal{C}(I), \mathcal{M}) = \text{coker } \delta$$

**Définition 4.19.** — Un morphisme (resp. une suite exacte) de faisceaux sur  $\mathcal{C}(I)$  est un morphisme de systèmes projectifs de groupes indexés par les intervalles fermés contenus dans  $I$  (définitions 4.11 et 4.12).

**Proposition 4.20.** — A toute suite exacte  $0 \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow 0$  de faisceaux sur  $\mathcal{C}(I)$  est associée la suite exacte longue

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(\mathcal{C}(I), \mathcal{N}) &\longrightarrow H^0(\mathcal{C}(I), \mathcal{M}) \longrightarrow H^0(\mathcal{C}(I), \mathcal{Q}) \\ &\longrightarrow H^1(\mathcal{C}(I), \mathcal{N}) \longrightarrow H^1(\mathcal{C}(I), \mathcal{M}) \longrightarrow H^1(\mathcal{C}(I), \mathcal{Q}) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

*Preuve.* — Il s'agit d'une application facile du lemme du serpent [6].  $\square$

Ce résultat signifie que, pour tout faisceau  $\mathcal{M}$  sur  $\mathcal{C}(I)$ , on a  $H^i(\mathcal{C}(I), \mathcal{M}) = 0$  pour  $i \geq 2$ . Le théorème de Mittag-Leffler traite le cas du  $H^1$ .

**Corollaire 4.21 (de 4.13).** — Soit  $\mathcal{N}$  un faisceau sur  $\mathcal{C}(I)$ . Si le système projectif  $(\mathcal{N}(J), f_{\mathcal{M}, J, J'})$  satisfait la condition de Mittag-Leffler, alors  $H^1(\mathcal{C}(I), \mathcal{N}) = 0$ .

*Preuve.* — Le théorème 4.13 et la suite longue 4.20 montrent que, si  $0 \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$  est une suite exacte de faisceaux, la suite  $0 \rightarrow H^1(\mathcal{C}(I), \mathcal{N}) \rightarrow H^1(\mathcal{C}(I), \mathcal{M})$  est exacte. Il suffit donc de trouver un faisceau  $\mathcal{M}$  “contenant  $\mathcal{N}$ ” et tel que  $H^1(\mathcal{C}(I), \mathcal{M}) = 0$ . On peut, par exemple, définir  $\mathcal{M}$  par

$$\mathcal{M}(J) = \sum_{J' \subset J} \mathcal{N}(J') \quad , \quad f_{\mathcal{M}, J'', J} \left( \sum n_{J'} \right) = \sum_{J' \subset J''} n_{J'} + \sum_{J' \not\subset J''} f_{\mathcal{N}, J'' \cap J', J'}(n_{J'}).$$

Comme l'équation  $m_{n+1} - m_n = v_n$  a la solution évidente  $m_n = \sum_{k=0}^n v_k$ , on vérifie facilement que  $\mathcal{M}$  a les propriétés requises.  $\square$

#### 4.4. Théorème de Lazard. —

**Définition 4.22.** — On appelle *diviseur*  $\mathcal{Z}$  sur la couronne  $\mathcal{C}(I)$ , une application de l'ensemble des points géométriques de  $\mathcal{C}(I)$  dans  $\mathbb{Z}$  qui vérifie les conditions suivantes

1. Pour tout intervalle  $J$  fermé contenu dans  $I$ , l'ensemble des points géométriques  $\zeta$  de  $\mathcal{C}(J)$  tels que  $\mathcal{Z}(\zeta) \neq 0$  est fini,
2. Pour tout  $K$ -automorphisme  $\sigma$  de  $K^{\text{alg}}$ , on a  $\mathcal{Z}(\sigma(\zeta)) = \mathcal{Z}(\zeta)$ .

Le diviseur est dit *effectif* si  $\mathcal{Z}(\zeta) \geq 0$  pour tout point géométrique  $\zeta$ .

La somme de deux diviseurs est définie comme la somme des applications. On note  $\mathfrak{D}(I)$  (resp.  $\mathfrak{D}^+(I)$ ) le groupe des diviseurs (resp. des diviseurs effectifs) sur la couronne  $\mathcal{C}(I)$ . Pour décrire un diviseur, on utilise une notation qui met en valeur cette structure de groupe :

$$\mathcal{Z} = \sum_{\zeta \text{ points géométriques de } \mathcal{C}(I)} \mathcal{Z}(\zeta) \zeta = \sum_{\zeta \in \text{supp}(\mathcal{Z})} \mathcal{Z}(\zeta) \zeta$$

où  $\text{supp}(\mathcal{Z})$  désigne le support de  $\mathcal{Z}$  c'est-à-dire l'ensemble des points géométriques  $\zeta$  de  $\mathcal{C}(I)$  tels que  $\mathcal{Z}(\zeta) \neq 0$ .

**Définition équivalente 4.23.** — Soit  $\mathcal{Z}$  un diviseur (resp. un diviseur effectif) sur la couronne  $\mathcal{C}(I)$ . Pour chaque intervalle fermé  $J \subset I$ , le produit

$$P_{\mathcal{Z}(J)}(x) = \prod_{\zeta \in \mathcal{C}(J)} (x - \zeta)^{\mathcal{Z}(\zeta)}$$

est, d'après 4.22-1, une fraction rationnelle (resp. un polynôme) qui appartient à  $K(x)$  (resp.  $K[x]$ ) d'après 4.22-2. Pour  $J \subset J'$ , le rapport  $P_{\mathcal{Z}(J')}/P_{\mathcal{Z}(J)}$  n'a ni zéro ni pôle dans la couronne  $\mathcal{C}(J)$ . C'est donc un élément inversible de  $\mathcal{A}(J)$ . On constate que le système  $(\mathcal{Z}(J), \mathbf{I}_{J, J'})$ , où  $\mathcal{Z}(J) = P_{\mathcal{Z}(J)}\mathcal{A}(J)$  et  $\mathbf{I}_{J, J'}$  est l'injection canonique de  $\mathcal{F}(J')$  dans  $\mathcal{F}(J)$ , est un faisceau sur  $\mathcal{C}(I)$ . Le corollaire 2.25 montre que l'on obtient ainsi un isomorphisme entre le groupe (additif)  $\mathfrak{D}(I)$  (resp.  $\mathfrak{D}^+(I)$ ) et le groupe (multiplicatif) des faisceaux d'idéaux fractionnaires (resp. d'idéaux) sur  $\mathcal{C}(I)$ .

On note  $\mathcal{A}^*(I)$ ,  $\mathcal{A}^{\neq 0}(I)$  et  $\mathcal{F}^*(I)$  les groupes multiplicatifs des fonctions inversibles de  $\mathcal{A}(I)$ , des fonctions non nulles de  $\mathcal{A}(I)$  et des fractions non nulles de  $\mathcal{F}(I)$ .

A une fonction  $f$  de  $\mathcal{A}^{\neq 0}(I)$  on associe le diviseur (effectif)  $\text{div}(f)$  de  $f$  pour lequel  $\text{div}(f)(\zeta)$  est l'ordre du zéro de  $f$  au point  $\zeta$ . Cette définition s'étend aux fractions de  $\mathcal{F}^*(I)$  en posant  $\text{div}\left(\frac{f}{g}\right) = \text{div}(f) - \text{div}(g)$ . Le corollaire 2.26 montre que les suites suivantes sont exactes

$$(10) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{A}^*(I) \longrightarrow \mathcal{F}^*(I) \xrightarrow{\text{div}} \mathfrak{D}(I)$$

$$(11) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{A}^*(I) \longrightarrow \mathcal{A}^{\neq 0}(I) \xrightarrow{\text{div}} \mathfrak{D}^+(I)$$

Le but de ce paragraphe est d'étudier la surjectivité de l'application  $\text{div}$ . Pour cela nous "faisceautisons" la situation.

Pour  $J \subset J'$ , on note  $\text{res}_{J,J'}$  l'application de  $\mathfrak{D}(J')$  dans  $\mathfrak{D}(J)$  "multiplication par la fonction caractéristique de  $\mathcal{C}(J)$ ". Les systèmes  $\mathfrak{D} := (\mathfrak{D}(J), \text{res}_{J,J'})$  et  $\mathfrak{D}^+ := (\mathfrak{D}^+(J), \text{res}_{J,J'})$  sont des faisceaux (de groupes additifs) sur la couronne  $\mathcal{C}(I)$  et les systèmes  $\mathcal{A}^* := (\mathcal{A}^*(J), \mathbf{I}_{J,J'})$ ,  $\mathcal{A}^{\neq 0} := (\mathcal{A}^{\neq 0}(J), \mathbf{I}_{J,J'})$  et  $\mathcal{F}^* := (\mathcal{F}^*(J), \mathbf{I}_{J,J'})$  sont des faisceaux (de groupes multiplicatifs) sur la couronne  $\mathcal{C}(I)$ . Si  $\mathcal{M}$  est l'un de ces faisceaux, on a  $\mathcal{M}(I) = H^0(\mathcal{C}(I), \mathcal{M})$ . Lorsque  $H^1(\mathcal{C}(I), \mathcal{A}^*) = 0$ , la proposition 4.20 montre que l'application  $\text{div}$  est surjective, dans chacun des cas (10) ou (11).

**Exercice 4.24.** — Montrer que  $H^1(\mathcal{C}(I), \mathfrak{D}) = H^1(\mathcal{C}(I), \mathfrak{D}^+) = 0$ .  
[vérifier que  $\mathfrak{D}$  et  $\mathfrak{D}^+$  satisfont la condition de Mittag-Leffler]

**Proposition 4.25.** — Si  $K$  est sphériquement complet et si l'intervalle  $I$  est un ouvert de  $[0, \infty]$ , on a  $H^1(\mathcal{C}(I), \mathcal{A}^*) = 0$ .

Pour démontrer cette proposition nous avons besoin d'étendre la notion de limite banachique (corollaire 1.45) aux anneaux  $\mathcal{A}(I)$ .

Soit  $I$  un intervalle et soit  $f_n = \sum_{s \in \mathbb{Z}} a_{n,s} x^s$  une suite bornée de fonctions de  $\mathcal{A}(I)$  c'est-à-dire telle que, pour  $\rho$  dans  $I \cap ]0, \infty[$ , la suite  $|f_n|_\rho$  soit bornée. Pour  $s$  fixé, la suite  $|a_{n,s}|$  est alors bornée par  $\rho^{-s} \sup |f_n|_\rho$  pour chaque  $\rho$  dans  $I \cap ]0, \infty[$ .

**Définition 4.26.** — Soit  $f_n = \sum_{s \in \mathbb{Z}} a_{n,s} x^s$  une suite bornée de  $\mathcal{A}(I)$ . Si le corps  $K$  est sphériquement complet, on définit la *limite banachique* de la suite  $f_n$  par

$$\overset{\circ}{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n := \sum_{s \in \mathbb{Z}} \overset{\circ}{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_{n,s} x^s.$$

On écrira aussi "lim"  $f_n$  si cela ne prête pas à confusion.

**Remarque 4.27.** — L'idée d'obtenir le théorème de Lazard comme corollaire de la proposition 4.25 se trouve dans [27]. La notion de limite banachique d'une suite bornée de fonctions analytiques  $f_n$  avait été introduite par Robba dans [47]. On montre facilement que cette limite est indépendante du choix de la limite banachique dans  $K$  si et seulement si la suite  $f_n$  converge dans  $\mathcal{A}(I)$ .

Si  $I$  est un intervalle, nous noterons  $\overset{\circ}{I}$  l'intérieur de  $I$  c'est-à-dire le plus grand (intervalle) ouvert contenu dans  $I$ .

**Lemme 4.28.** — Soit  $I$  un intervalle non réduit à un point, soit  $(f_n)$  et  $(g_n)$  deux suites bornées de fonctions de  $\mathcal{A}(I)$  et soit  $g$  une fonction de  $\mathcal{A}(\overset{\circ}{I})$ . Alors

1. la limite banachique “lim”  $f_n$  appartient à  $\mathcal{A}(\overset{\circ}{I})$ ,
2.  $|\text{“lim” } f_n|_\rho \leq \limsup |f_n|_\rho$  pour  $\rho$  dans  $\overset{\circ}{I}$ ,
3. “lim”  $(f_n + g_n) = \text{“lim” } f_n + \text{“lim” } g_n$ ,
4. “lim”  $(gf_n) = g \text{“lim” } f_n$ .

*Preuve.* — D’après le corollaire 1.45-3, on a, pour tout  $\rho$  dans  $I \cap ]0, \infty[$

$$(12) \quad \left| \text{“lim”}_{n \rightarrow \infty} a_{n,s} \right| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n,s}| \leq \rho^{-s} \limsup |f_n|_\rho$$

Pour  $\rho$  dans  $\overset{\circ}{I} \cap ]0, \infty[$ , il existe  $r < 1$  tel que  $r\rho$  et  $r^{-1}\rho$  appartiennent à  $I$ . Il vient

$$\left| \text{“lim”}_{n \rightarrow \infty} a_{n,s} \right| \rho^s \leq \min \left( r^{-s} \limsup |f_n|_{r\rho}, r^s \limsup |f_n|_{r^{-1}\rho} \right)$$

donc  $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \left| \text{“lim”}_{n \rightarrow \infty} a_{n,s} \right| \rho^s = 0$  et “lim”  $f_n$  appartient à  $\mathcal{A}(\overset{\circ}{I})$ .

La propriété 2 est maintenant une conséquence de la majoration (12).

Si  $g = \sum_{\text{finie}} b_s x^s$  appartient à  $K[x, \frac{1}{x}]$ , la linéarité de “lim” (corollaire 1.45-2) donne

$$\text{“lim”}(gf_n) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \text{“lim”} \left( \sum_{\text{finie}} b_i a_{n,s-i} \right) x^s = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{\text{finie}} b_i \text{“lim” } a_{n,s-i} \right) x^s = g \text{“lim” } f_n.$$

Considérons maintenant une fonction quelconque  $g = \sum_{s \in \mathbb{Z}} b_s x^s$  de  $\mathcal{A}(\overset{\circ}{I})$ . Comme l’intervalle  $I$  n’est pas réduit à un point, l’intervalle  $\overset{\circ}{I} \cap ]0, \infty[$  est non vide. Choissant  $\rho$  dans cet intervalle et posant  $g_m = \sum_{s=-m}^m b_s x^s$ , on a  $\lim_{m \rightarrow \infty} |g - g_m|_\rho = 0$ . Or  $g_m$  appartient à  $K[x, \frac{1}{x}]$  et on trouve

$$\begin{aligned} & \left| g \text{“lim” } f_n - \text{“lim”}_{n \rightarrow \infty} (gf_n) \right|_\rho \\ & \leq \left| (g - g_m) \text{“lim”}_{n \rightarrow \infty} f_n + g_m \text{“lim”}_{n \rightarrow \infty} f_n - \text{“lim”}_{n \rightarrow \infty} (gf_n) \right|_\rho \\ & = \left| (g - g_m) \text{“lim”}_{n \rightarrow \infty} f_n + \text{“lim”}_{n \rightarrow \infty} ((g_m - g)f_n) \right|_\rho \\ & \leq \max \left\{ |g - g_m|_\rho \sup |f_n|_\rho, \sup |(g_m - g)f_n|_\rho \right\} \\ & \leq |g - g_m|_\rho \sup |f_n|_\rho. \end{aligned}$$

En faisant tendre  $m$  vers l’infini, on constate que  $g \text{“lim” } f_n = \text{“lim”}(gf_n)$ . □

**Remarque 4.29.** — Il y a une subtilité dans ce lemme : l’anneau  $\mathcal{A}([\rho])$  n’est pas stable par la limite banachique (alors qu’il est stable pour la limite de la norme  $|\cdot|_\rho$ ). La limite banachique est en effet une généralisation de la limite simple alors que la limite pour la norme  $|\cdot|_\rho$  est une limite uniforme.

*Preuve de la proposition 4.25.* — L’intervalle  $I$  étant ouvert, on peut choisir une suite d’intervalles fermés  $J_n$  tels que  $J_n \subset \overset{\circ}{J}_{n+1}$  et  $\bigcup J_n = I$ . Revenant à la définition

4.18 et tenant compte du fait que les groupes sont multiplicatifs, on doit montrer que l'application  $(f_n) \mapsto (f_n/f_{n+1})$  de  $\prod \mathcal{A}^*(J_n)$  dans lui-même est surjective. Autrement dit, étant donné une fonction  $g_n$  de chaque  $\mathcal{A}^*(J_n)$ , on doit trouver une fonction  $f_n$  dans chaque  $\mathcal{A}^*(J_n)$  telle que  $g_n = f_n/f_{n+1}$ .

D'après le corollaire 2.28, on a  $g_n = \lambda_n x^{s_n} (1 + \tilde{g}_n)$  avec  $\|\tilde{g}_n\|_{\mathcal{C}(J_n)} < 1$ . Posons

$$\tilde{f}_n = \text{``lim''}_{k \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^k (1 + \tilde{g}_{n+i})$$

D'après le résultat 4.28-1, cette limite banachique appartient à  $\mathcal{A}(\overset{\circ}{J}_{n+1})$  donc à  $\mathcal{A}(J_n)$ . Plus précisément, pour  $\rho$  dans  $\overset{\circ}{J}_{n+1}$ , on a

$$\left| 1 - \prod_{i=1}^k (1 + \tilde{g}_{n+i}) \right|_{\rho} \leq \max_{0 \leq i \leq k} |\tilde{g}_{n+i}|_{\rho} < 1.$$

A l'aide des propriétés 4.28-2 et -3 on en déduit que  $|1 - \tilde{f}_n|_{\rho} < 1$ . L'intervalle  $J_n$  étant fermé, on constate que  $\|1 - \tilde{f}_n\|_{\mathcal{C}(J_n)} < 1$ . Il en résulte que  $f_n$  appartient en fait à  $\mathcal{A}^*(J_n)$ . Par ailleurs, la propriété 4.28-4 montre que  $\tilde{f}_n = (1 + \tilde{g}_{n+1})\tilde{f}_{n+1}$ . Il est maintenant facile de vérifier que la fonction  $f_n = (1 + \tilde{g}_n)\tilde{f}_n \prod_{i=0}^{n-1} (\lambda_i x^{s_i})^{-1}$  appartient à  $\mathcal{A}^*(J_n)$  et satisfait la relation  $f_n/f_{n+1} = g_n$ .  $\square$

**Corollaire 4.30 (Théorème de Lazard [36]).** — *Si le corps  $K$  est sphériquement complet, pour tout diviseur  $\mathcal{Z}$  (resp. diviseur effectif) de la couronne  $\mathcal{C}(I)$ , il existe (au moins) une fonction  $f$  de  $\mathcal{F}(I)$  (resp.  $\mathcal{A}(I)$ ) telle que  $\text{div}(f) = \mathcal{Z}$ .*

*Preuve.* — Si l'intervalle est fermé c'est un résultat élémentaire (voir corollaire 2.25) et il n'y a pas besoin de supposer le corps sphériquement complet.

Si l'intervalle  $I$  est ouvert c'est une conséquence immédiate de la proposition 4.25 et de la suite exacte (10) (resp. (11)).

Si l'intervalle  $I$  est semi-ouvert de la forme  $[\alpha, \beta[$  (resp.  $] \alpha, \beta]$ , on se ramène au cas d'un intervalle ouvert en remarquant qu'un diviseur sur la couronne  $\mathcal{C}(I)$  est aussi un diviseur sur la couronne  $\mathcal{C}([0, \beta[$  (resp.  $\mathcal{C}([\alpha, \infty[)$ ).  $\square$

Lorsque le corps  $K$  n'est pas sphériquement complet, la proposition 4.44 montrera que le théorème de Lazard est faux pour la plupart des couronnes  $\mathcal{C}(I)$ .

**4.5. Faisceaux cohérents.** — Les résultats de ce paragraphe montrent que la couronne  $\mathcal{C}(I)$  a des propriétés analogues à celle d'un espace de Stein c'est-à-dire vérifie les fameux théorèmes A et B de Cartan (théorème 4.35). Ils sont essentiellement démontrés dans [35].

**Définition 4.31.** — Un faisceau  $\mathcal{M}$  sur  $\mathcal{C}(I)$  est dit *cohérent* (resp. *localement libre*) si

1. pour tout  $J \subset I$  fermé,  $\mathcal{M}(J)$  est un  $\mathcal{A}(J)$ -module de type fini (resp. libre),

2. pour  $J \subset J'$ , l'application  $f_{\mathcal{M},J,J'}$  est  $\mathcal{A}(J')$ -linéaire et l'application  $\mathcal{A}(J)$ -linéaire  $\tilde{f}_{\mathcal{M},J,J'} : \mathcal{A}(J) \otimes_{\mathcal{A}(J')} \mathcal{M}(J') \rightarrow \mathcal{M}(J)$  définie par  $\tilde{f}_{\mathcal{M},J,J'}(a \otimes m) = af_{\mathcal{M},J,J'}(m)$  est un isomorphisme.

Soit  $J$  un intervalle fermé et soit  $M$  un  $\mathcal{A}(J)$ -module de type fini. Pour chaque système de générateurs  $\epsilon$  de  $M$ , on a une présentation  $\mathcal{A}(J)^{d_\epsilon} \xrightarrow{\theta_\epsilon} M \rightarrow 0$  pour laquelle  $\epsilon$  est l'image par  $\theta_\epsilon$  de la base canonique. On munit le  $K$ -espace vectoriel  $\mathcal{A}(J)^{d_\epsilon}$  de la norme

$$\left\| \sum_{i=1}^{d_\epsilon} a_i \epsilon_i \right\| = \max_{1 \leq i \leq d_\epsilon} \|a_i\|_{\mathcal{C}(J)}.$$

et le  $K$ -espace vectoriel  $M$  de la semi-norme quotient :

$$\|\bar{m}\|_\epsilon = \inf_{\theta_\epsilon(m) = \bar{m}} \|m\|.$$

**Lemme 4.32.** — *Soit  $M$  un  $\mathcal{A}(J)$ -module de type fini. Si  $\epsilon$  et  $\mathfrak{f}$  sont deux systèmes de générateurs, les semi-normes  $\|\cdot\|_\epsilon$  et  $\|\cdot\|_\mathfrak{f}$  sont équivalentes. En fait ces semi-normes sont des normes pour lesquelles  $M$  est un espace de Banach homéomorphe à  $\mathcal{A}(J)^r \oplus K^s$ . Le couple  $\{r, s\}$  sera appelé signature du module  $M$ .*

*Preuve.* — On a  $\mathfrak{f}_i = A_{ij} \epsilon_j$  avec  $A_{ij}$  dans  $\mathcal{A}(J)$  d'où un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A}(J)^{d_\epsilon} & \xrightarrow{\theta_\epsilon} & M & \longrightarrow & 0 \\ h \downarrow & & \text{id} \downarrow & & \\ \mathcal{A}(J)^{d_\mathfrak{f}} & \xrightarrow{\theta_\mathfrak{f}} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dans lequel l'application linéaire  $h$  est donnée par la matrice  $(A_{ij})$ . On a clairement  $\|h\| = \max \|A_{ij}\|_{\mathcal{C}(J)}$ . Pour  $\bar{m}$  dans  $M$ , il existe  $m$  dans  $\mathcal{A}(J)^{d_\epsilon}$  tel que  $\theta_\epsilon(m) = \bar{m}$  et  $\|m\| \leq 2\|\bar{m}\|_\epsilon$ . Comme  $\bar{m} = \theta_\mathfrak{f} \circ h(m)$ , on trouve :

$$\|\bar{m}\|_\mathfrak{f} \leq \|h(m)\| \leq \|h\| \|m\| \leq 2\|h\| \|\bar{m}\|_\epsilon.$$

Les deux systèmes de générateurs jouant un rôle symétrique, les deux semi-normes sont équivalentes.

L'anneau  $\mathcal{A}(J)$  est un anneau principal dont chaque idéal strict est engendré par un polynôme non constant ayant ses racines dans la couronne  $\mathcal{C}(J)$  (corollaire 2.25). D'après [7] VII 3.4 théorème 2,  $M$  est isomorphe à  $\mathcal{A}(J)^r \bigoplus_{i=1}^s \mathcal{A}(J)/P_i \mathcal{A}(J)$  pour des polynômes  $P_i$  non constants ayant leurs racines dans la couronne  $\mathcal{C}(J)$  (on peut supposer que  $P_{i+1}$  divise  $P_i$ ). Pour conclure, il suffit de montrer que  $\mathcal{A}(J)/P \mathcal{A}(J)$  muni de la norme  $\|f\|_{\{1\}} = \inf_{h=f+Pg} \|h\|_{\mathcal{C}(J)}$  est homéomorphe à  $K^{\deg(P)}$ .

D'après le lemme 2.15, pour  $f$  dans  $\mathcal{A}(J)$ , il existe un unique polynôme  $R$  tel que  $\deg(R) < \deg(P)$  et  $f = R + Pg$  avec  $g$  dans  $\mathcal{A}(J)$ . L'application  $f \mapsto R$  donne donc une bijection de  $\mathcal{A}(J)/P \mathcal{A}(J)$  dans  $K^{\deg P}$ . Soit  $\zeta$  une racine d'ordre  $r$  de  $P$ . C'est un point géométrique de  $\mathcal{C}(J)$  donc, pour  $0 \leq i < r$  et  $h$  dans  $f + P \mathcal{A}(J)$ , on a

$$\left| \zeta^i \frac{d^i}{dx^i} R(\zeta) \right| = \left| \zeta^i \frac{d^i}{dx^i} h(\zeta) \right| \leq |h|_{|\zeta|} \leq \|h\|_{\mathcal{C}(J)}.$$

Il en résulte que  $\left| \zeta^i \frac{d^i}{dx^i} R(\zeta) \right| \leq \|f\|_{\{1\}}$ .

Quitte à faire un changement de variable  $x \mapsto x - a$  avec  $a$  suffisamment petit, on peut supposer  $P(0) \neq 0$ . On constate alors que  $\|f\|_{\{1\}} = 0$  implique  $\frac{d^i}{dx^i} R(\zeta) = 0$  pour toute racine  $\zeta$  de  $P$  et pour tout entier  $i$  strictement plus petit que l'ordre de cette racine. Ceci signifie que  $P$  divise  $R$ . Mais comme  $\deg(R) < \deg(P)$  cela implique  $R = 0$  et  $f$  dans  $P\mathcal{A}(J)$ . Ainsi  $\|\cdot\|_{\{1\}}$  est une norme sur  $K^{\deg P}$  donc équivalente à la norme canonique (théorème 1.14).  $\square$

**Lemme 4.33.** — *Soit  $I$  un intervalle,  $\mathfrak{J}$  l'ensemble ordonné filtrant des intervalles fermés  $J \subset I$  et  $\mathcal{M}$  un faisceau cohérent sur  $\mathcal{C}(I)$ . Le système projectif  $(\mathcal{M}(J), f_{\mathcal{M}, J, J'})$  vérifie alors la condition de Mittag-Leffler 4.7-forte.*

*Preuve.* — On choisit, pour chaque  $J$ , un système de générateur  $\epsilon_J$  de  $\mathcal{M}(J)$ .

1. L'ensemble  $\mathcal{M}(J)$  est non vide, car il contient 0, et il est muni de la distance  $d_J(m, n) = \|m - n\|_{\epsilon}$  pour laquelle il est complet d'après le lemme 4.32.
2. Pour  $J \subset J'$  d'après 4.31-2,  $f_{\mathcal{M}, J, J'}(\epsilon_{J'})$  est un système générateur de  $\mathcal{M}(J)$  et, d'après le lemme 4.32, il existe une constante  $C$  telle que  $\|m\|_{\epsilon_J} \leq C\|m\|_{f_{\mathcal{M}, J, J'}(\epsilon_{J'})}$  pour tout  $m$  dans  $\mathcal{M}(J)$ . Par ailleurs, pour  $f$  dans  $\mathcal{A}(J')$ , on a  $\|f\|_{\mathcal{C}(J)} \leq \|f\|_{\mathcal{C}(J')}$  (voir formule (3)). Il en résulte que l'on a  $\|f_{\mathcal{M}, J, J'}(m)\|_{f_{\mathcal{M}, J, J'}(\epsilon_{J'})} \leq \|m\|_{\epsilon_{J'}}$  pour tout  $m$  dans  $\mathcal{M}(J')$  car toute décomposition  $m = \sum a_i \epsilon_{J', i}$  donne une décomposition  $f_{\mathcal{M}, J, J'}(m) = \sum a_i f_{\mathcal{M}, J, J'}(\epsilon_{J', i})$  (il peut exister des décompositions de  $f_{\mathcal{M}, J, J'}(m)$  dans la base  $\epsilon_{J'}$  qui ne sont pas de ce type). On a donc, pour tout  $m$  dans  $\mathcal{M}(J')$

$$\|f_{\mathcal{M}, J, J'}(m)\|_{\epsilon_J} \leq C\|f_{\mathcal{M}, J, J'}(m)\|_{f_{\mathcal{M}, J, J'}(\epsilon_{J'})} \leq C\|m\|_{\epsilon_{J'}}.$$

L'application (linéaire)  $f_{\mathcal{M}, J, J'}$  est (uniformément) continue.

3. Pour  $J \subset J'$ , l'anneau  $\mathcal{A}(J')$ , qui contient  $K[x, \frac{1}{x}]$ , est dense dans  $\mathcal{A}(J)$  pour la topologie de la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{C}(J)}$ . On en déduit facilement que le  $\mathcal{A}(J')$ -module  $f_{\mathcal{M}, J, J'}(\mathcal{M}(J'))$  est dense dans le  $\mathcal{A}(J)$ -module  $\mathcal{M}(J)$  qu'il engendre.  $\square$

**Lemme 4.34.** — *Soit  $J$  un intervalle fermé et soit  $M$  un  $\mathcal{A}(J)$ -module libre de type fini. Tout sous- $\mathcal{A}(J)$ -module  $N$  de  $M$  est libre et fermé pour la topologie de  $M$ . En particulier, si  $N$  est partout dense dans  $M$ , alors  $N = M$ .*

*Preuve.* — Comme l'anneau  $\mathcal{A}(J)$  est principal, le fait que  $N$  soit libre est un résultat classique. Plus précisément ([7] VII 3.3 théorème 1), si  $M$  est de rang  $\mu$ , il existe une base  $\epsilon$  de  $M$ , un nombre  $\nu \leq \mu$  et des polynômes non nuls  $P_i$  de  $K[x]$  ayant toutes leurs racines dans la couronne  $\mathcal{C}(J)$  tels que  $\{P_i \epsilon_i\}_{1 \leq i \leq \nu}$  soit une base de  $N$ .

Soit maintenant  $m_n = \sum_{i=1}^{\nu} a_{i,n} P_i \epsilon_i$  une suite d'éléments de  $N$  qui converge dans  $M$  et soit  $m = \sum_{i=1}^{\nu} a_i \epsilon_i$  sa limite. Par définition de la topologie de  $M$ , c'est-à-dire de la norme  $\|\cdot\|_{\epsilon}$ , on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_i - a_{i,n} P_i\|_{\mathcal{C}(J)} = 0$ . En particulier  $a_i = 0$  pour  $i > \nu$ . Il reste à voir que  $a_i$  est divisible par  $P_i$ .

Soit  $\zeta$  une racine d'ordre  $r$  de  $P_i$ . Pour  $1 \leq j < r$ , on trouve

$$\left| \frac{x^j d^j}{d^j x} (a_i)(\zeta) \right| = \left| \frac{x^j d^j}{d^j x} (a_i - a_{i,n} P_i)(\zeta) \right| \leq \left\| \frac{x^j d^j}{d^j x} (a_i - a_{i,n} P_i) \right\|_{\mathcal{C}(J)} \leq \|a_i - a_{i,n} P_i\|_{\mathcal{C}(J)}$$

Si  $\zeta \neq 0$ , en faisant tendre  $n$  vers l'infini, on obtient  $\frac{d^j}{dx} a_i(\zeta) = 0$ . Le cas  $\zeta = 0$  n'est à considérer que lorsque  $\mathcal{C}(J)$  est un disque. Il se traite en faisant un changement d'origine.  $\square$

**Théorème 4.35.** — Soit  $I$  un intervalle contenu dans  $]0, \infty[$  et soit  $\mathcal{M}$  un faisceau cohérent sur  $\mathcal{C}(I)$ . Alors on a :

**A.** —  $H^1(\mathcal{C}(I), \mathcal{M}) = 0$ .

**B.** — L'ensemble  $\mathcal{M}(I) \stackrel{\text{déf}}{=} H^0(\mathcal{C}(I), \mathcal{M})$  des sections globales est un  $\mathcal{A}(I)$ -module et, pour  $J \subset I$  fermé, l'image  $f_{\mathcal{M}, J}(\mathcal{M}(I))$  engendre le  $\mathcal{A}(J)$ -module  $\mathcal{M}(J)$ .

*Preuve.* — Résultat **A** : c'est une conséquence du corollaire 4.21 et du lemme 4.33. Résultat **B** : les relations  $a(m_J) + (m'_J) = (am_J + m'_J)$  munissent  $\mathcal{M}(I)$  d'une structure de  $\mathcal{A}(I)$ -module. Comme le système projectif  $(\mathcal{M}(J), f_{\mathcal{M}, J, J'})_{\mathfrak{J}}$  vérifie la condition de Mittag-Leffler forte, le corollaire 4.9 montre que, pour tout  $J$ , l'image  $f_{\mathcal{M}, J}(\mathcal{M}(I))$  est dense dans  $\mathcal{M}(J)$ . A plus forte raison, le  $\mathcal{A}(J)$ -module engendré par cette image est dense et donc égal à  $\mathcal{M}(J)$  d'après le lemme 4.34.  $\square$

**Remarque 4.36.** — Le théorème 4.35-B signifie aussi que l'application  $\mathcal{A}(J)$ -linéaire  $\tilde{f}_{\mathcal{M}, J} : \mathcal{A}(J) \otimes_{\mathcal{A}(I)} \mathcal{M}(I) \rightarrow \mathcal{M}(J)$  définie par  $\tilde{f}_{\mathcal{M}, J}(a \otimes m) = af_{\mathcal{M}, J}(m)$  est surjective. Par contre on va voir (exemples 4.37 et 4.49) qu'elle n'est pas injective en général. En fait le point clef est de savoir si  $\mathcal{M}(I)$  est de type fini.

L'application  $f_{\mathcal{M}, J}$  étant surjective, un système de générateurs du  $\mathcal{A}(I)$ -module  $\mathcal{M}(I)$  donne, pour tout intervalle fermé  $J \subset I$ , un système de générateurs du  $\mathcal{A}(J)$ -module  $\mathcal{M}(J)$ . Dans l'exemple suivant, le nombre minimum de générateurs des modules  $\mathcal{M}(J)$  n'est pas borné et donc  $\mathcal{M}(I)$  n'est pas de type fini. On vérifie aussi que l'application  $f_{\mathcal{M}, J}$  n'est pas injective.

**Exercice 4.37.** — Soit  $a$  un nombre de  $K$  tel que  $|a| < 1$ . Pour  $1 \leq m \leq n$ , on pose  $P_{m,n}(x) = \prod_{i=m}^n (x^i - a)$ .

1. On pose  $r_n = |a|^{1/n}$ . Vérifier que les racines du polynôme  $P_{m,n}$  se trouvent dans la couronne  $\mathcal{C}([r_m, r_n])$ . En déduire que, pour  $\ell > n$ ,

$$\mathcal{A}([0, r_n]) / P_{m,\ell} \mathcal{A}([0, r_n]) = \mathcal{A}([0, r_n]) / P_{m,n} \mathcal{A}([0, r_n])$$

et en particulier que ce module est réduit à  $\{0\}$  pour  $m > n$ .

2. Montrer que  $\mathcal{M}([0, r_n]) = \bigoplus_{m=1}^n \mathcal{A}([0, r_n]) / P_{m,n} \mathcal{A}([0, r_n])$  est un  $\mathcal{A}([0, r_n])$ -module de signature  $(0, \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1))$  (lemme 4.32) et ne peut pas être engendré par moins de  $n$  éléments (il est déjà sous forme canonique).
3. Montrer que les  $\mathcal{M}([0, r_n])$  définissent un faisceau cohérent  $\mathcal{M}$  sur la couronne  $\mathcal{C}([0, 1])$ . Montrer que  $\mathcal{M}([0, 1])$  n'est pas de type fini.

On va maintenant se limiter au cas des faisceaux cohérents localement libres. Pour un tel faisceau  $\mathcal{M}$ , la propriété 4.31-2 implique que le rang  $r$  du  $\mathcal{A}(J)$ -module libre  $\mathcal{M}(J)$  est indépendant de  $J$ . Autrement dit, pour tout  $J$ , le module  $\mathcal{M}(J)$  est de signature  $(r, 0)$ . On dit que  $r$  est le rang de  $\mathcal{M}$ .

**Définition 4.38.** — On dit que le faisceau cohérent  $\mathcal{M}$  sur la couronne  $\mathcal{C}(I)$  est libre si  $\mathcal{M}(I)$  est un  $\mathcal{A}(I)$ -module libre de type fini et si  $\mathcal{M}(J) = \mathcal{A}(J) \otimes_{\mathcal{A}(I)} \mathcal{M}(I)$ , les applications  $f_{\mathcal{M},J,J'}$  étant les injections canoniques.

**Lemme 4.39.** — Si le corps  $K$  est sphériquement complet, tout faisceau cohérent  $\mathcal{M}$  localement libre de rang 1 sur la couronne  $\mathcal{C}(I)$  est libre.

*Preuve.* — Par hypothèse, on a  $\mathcal{M}(J) = \mathcal{A}(J)e_J$ . D'après le théorème 4.35-B, il existe  $m = ae_J$  dans l'image  $f_{\mathcal{M},J}(\mathcal{M}(I))$  tel que  $\|a-1\|_{\mathcal{C}(J)} < 1$ . Alors  $a$  appartient à  $\mathcal{A}(J)^*$ . Autrement dit,  $m$  est aussi une base de  $\mathcal{M}(J)$ . On peut donc, et on va, supposer que  $e_J$  est lui-même dans  $f_{\mathcal{M},J}(\mathcal{M}(I))$ .

Pour chaque intervalle fermé  $J \subset I$ , on choisit un élément  $\tilde{e}_J$  tel que  $f_{\mathcal{M},J}(\tilde{e}_J) = e_J$ . Pour  $J \subset J'$ , on a  $f_{\mathcal{M},J,J'}(e_{J'}) = a_{J,J'}e_J$  avec  $a_{J,J'}$  dans  $\mathcal{A}(J)$ . D'après 4.15-3, pour  $J \subset J' \subset J''$ , on a  $a_{J,J''} = a_{J,J'}a_{J',J''}$ . La condition 4.31-2 assure que  $f_{\mathcal{M},J,J'}(e_{J'})$  est une base de  $\mathcal{M}(J)$ . Donc  $a_{J,J'}$  appartient à  $\mathcal{A}^*(J)$ .

Par ailleurs, on a  $f_{\mathcal{M},J'}(\tilde{e}_J) = b_{J,J'}e_{J'}$  avec  $b_{J,J'}$  dans  $\mathcal{A}(J')$  et, pour  $J' \supset J$ , on trouve

$$e_J = f_{\mathcal{M},J,J'} \circ f_{\mathcal{M},J'}(\tilde{e}_J) = b_{J,J'}a_{J,J'}e_{J'}.$$

Donc  $b_{J,J'}a_{J,J'} = 1$  et  $a_{J,J'}$  appartient à  $\mathcal{F}^*(J')$ .

Nous fixons maintenant un intervalle fermé  $J_0 \subset I$ . Pour  $J_0 \subset J \subset J'$ , on a  $\text{div}(a_{J_0,J'}) = \text{div}(a_{J_0,J}) + \text{div}(a_{J,J'})$  et, d'après le corollaire 2.28, les restrictions des diviseurs  $\text{div}(a_{J_0,J'})$  et  $\text{div}(a_{J_0,J})$  à la couronne  $\mathcal{C}(J)$  sont égales. Nous pouvons donc définir un diviseur  $\mathcal{Z}$  sur  $\mathcal{C}(I)$  en demandant que sa restriction à la couronne  $\mathcal{C}(J)$  soit égale au diviseur  $\text{div}(a_{J_0,J'})$  pour n'importe quel intervalle  $J' \supset J \supset J_0$ .

Puisque le corps  $K$  est sphériquement complet, il existe  $a$  dans  $\mathcal{F}^*(I)$  tel que  $\text{div}(a) = \mathcal{Z}$ . A priori,  $a/a_{J_0,J}$  est un élément de  $\mathcal{F}^*(J)$ . Mais, par construction, cette fonction n'a ni pôle ni zéro sur la couronne  $\mathcal{C}(J)$ . Donc c'est une fonction de  $\mathcal{A}^*(J)$ .

Soit maintenant  $m$  un élément de  $\mathcal{M}(I)$ . Pour chaque intervalle fermé  $J \subset I$ , il s'écrit  $m = \left(b_J \frac{a}{a_{J_0,J}} e_J\right)_{J \supset J_0}$  avec  $b_J$  dans  $\mathcal{A}(J)$ . Pour  $J_0 \subset J \subset J'$ , on trouve

$$b_J \frac{a}{a_{J_0,J}} e_J = f_{\mathcal{M},J,J'} \left( b_{J'} \frac{a}{a_{J_0,J'}} e_{J'} \right) = b_{J'} \frac{a}{a_{J_0,J'}} a_{J,J'} e_J = b_{J'} \frac{a}{a_{J_0,J}} e_J$$

et on constate que  $b_J = b_{J'}$ . Autrement dit,  $b_J$  est indépendant de  $J \supset J_0$ . On va le noter  $b$ .

Considérons maintenant l'élément  $e \stackrel{\text{déf}}{=} \left( \frac{a}{a_{J_0,J}} e_J \right)_{J \supset J_0}$  de  $\mathcal{M}(I)$ . On constate que  $m = be$ . Donc  $\mathcal{M}(I)$  est un  $\mathcal{A}(I)$ -module libre de rang 1.  $\square$

**Théorème 4.40.** — Si le corps  $K$  est sphériquement complet, tout faisceau  $\mathcal{M}$  cohérent et localement libre sur la couronne  $\mathcal{C}(I)$  est libre.

*Preuve.* — On fait une démonstration par récurrence sur le rang  $r$  de  $\mathcal{M}$ .

- Si  $r = 1$ , le résultat est démontré dans le lemme 4.39.
- Si  $r > 1$ , on choisit un élément  $m$  dans  $\mathcal{M}(I)$  et, pour chaque intervalle fermé  $J \subset I$ , on note  $\mathcal{N}(J)$  le plus grand sous- $\mathcal{A}(J)$ -module libre de rang 1 de  $\mathcal{M}(J)$  qui contient  $f_{\mathcal{M},J}(m)$  et on choisit un générateur  $e_J$  de  $\mathcal{N}(J)$  (voir lemme 4.32).

On a  $f_{\mathcal{M},J}(m) = a_J e_J$  avec  $a_J$  dans  $\mathcal{A}(J)$ . Pour  $J \subset J'$ , la condition 4.31-3 impose à  $f_{\mathcal{M},J,J'}(e_{J'}) = a_J/a_{J'} e_J$  d'être aussi un générateur de  $\mathcal{N}(J)$ . Par suite, le quotient  $a_J/a_{J'}$  appartient à  $\mathcal{A}^*(J)$  et le système des  $\mathcal{N}(J)$  est un faisceau cohérent localement libre de rang 1. D'après le lemme 4.39, il est libre. Maintenant, pour chaque  $J$ , on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}(J) \longrightarrow \mathcal{M}(J) \longrightarrow \mathcal{Q}(J) \longrightarrow 0$$

dans laquelle les  $\mathcal{Q}(J)$  sont des  $\mathcal{A}(J)$ -modules libres de rang  $r - 1$ . L'hypothèse de récurrence affirme qu'ils définissent un faisceau libre sur la couronne  $\mathcal{A}(I)$ . la proposition 4.20 et le théorème 4.35-A donnent une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}(I) \longrightarrow \mathcal{M}(I) \longrightarrow \mathcal{Q}(I) \longrightarrow 0$$

de  $\mathcal{A}(I)$ -modules dans laquelle  $\mathcal{N}(I)$  (resp.  $\mathcal{Q}(I)$ ) est libre de rang 1 (resp. de rang  $r - 1$ ). Il en résulte que  $\mathcal{M}(I)$  est libre de rang  $r$ .  $\square$

**4.6. Structure algébrique des anneaux  $\mathcal{A}(I)$ .** — Les anneaux  $\mathcal{A}(I)$ , pour  $I$  ouvert ou semi-ouvert, ne sont ni principaux ni même noethériens. Cependant le corollaire 4.42 montre qu'ils sont cohérents lorsque le corps  $K$  est sphériquement complet. Si l'intervalle  $I$  est fermé, les corollaires 4.42 et 4.43 sont évidemment vrais sans hypothèse sur le corps complet  $K$ .

**Lemme 4.41 ([18]).** — *Soit  $I \subset [0, \infty]$  un intervalle et soit  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathcal{A}(I)$  qui n'ont aucun zéro commun. Alors l'idéal engendré par  $f$  et  $g$  est  $\mathcal{A}(I)$  tout entier.*

*Preuve.* — Soit  $J$  un intervalle fermé contenu dans  $I$ . On considère la suite

$$(13) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{A}(J) \xrightarrow{\iota} \mathcal{A}(J)^2 \xrightarrow{\pi} \mathcal{A}(J) \longrightarrow 0$$

définie par  $\iota(u) = (-gu, fu)$  et  $\pi(u, v) = fu + gv$ . La suite (13) est exacte car

- on a clairement  $\pi \circ \iota = 0$ ,
- si  $\iota(u) = 0$ , on a  $gu = fu = 0$  donc  $u = 0$ ,
- l'application  $\pi$  est surjective : d'après le corollaire 2.25 il existe un polynôme  $P_J$  (resp.  $Q_J$ ) de  $K[x]$  dont toutes les racines sont dans  $\mathcal{C}(J)$  et une fonction  $\tilde{f}$  (resp.  $\tilde{g}$ ) inversible dans  $\mathcal{A}(J)$  telle que  $f = P_J \tilde{f}$  (resp.  $g = Q_J \tilde{g}$ ). Par construction, les polynômes  $P_J$  et  $Q_J$  n'ont pas de racine commune. Ils sont donc premiers entre eux. Toute fonction  $h$  de  $\mathcal{A}(J)$ , mise sous la forme  $P\tilde{h}$  avec  $\tilde{h}$  inversible et  $P$  polynôme, s'écrit  $h = (QP_J + RQ_J)\tilde{h} = \frac{\tilde{h}Q}{\tilde{f}}f + \frac{\tilde{h}R}{\tilde{g}}g$  et appartient donc à l'image de  $\pi$ .
- si  $\pi(u, v) = 0$ , on a  $uf = -vg$  c'est-à-dire  $u\tilde{f}P_J = -v\tilde{g}Q_J$ . Donc  $u\tilde{f} = -\tau Q_J$  et  $v\tilde{g} = \tau P_J$  avec  $\tau$  dans  $\mathcal{A}(J)$ . Autrement dit,  $(u, v) = \left(-\frac{\tau}{\tilde{f}\tilde{g}}g, \frac{\tau}{\tilde{f}\tilde{g}}f\right) = \iota\left(\frac{\tau}{\tilde{f}\tilde{g}}\right)$ .

La suite exacte (13) est en fait une suite exacte de faisceaux cohérents sur la couronne  $\mathcal{C}(I)$ . La suite exacte longue associée (proposition 4.20) s'écrit :

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}(I) \xrightarrow{\iota} \mathcal{A}(I)^2 \xrightarrow{\pi} \mathcal{A}(I) \longrightarrow H^1(\mathcal{C}(I), \mathcal{A}) = 0.$$

En particulier, l'application  $\pi : \mathcal{A}(I)^2 \rightarrow \mathcal{A}(I)$  est surjective.  $\square$

**Corollaire 4.42.** — *Si le corps  $K$  est sphériquement complet, l'anneau  $\mathcal{A}(I)$  est de Bezout, c'est-à-dire que tout idéal de type fini de  $\mathcal{A}(I)$  est principal.*

*Preuve.* — Considérons un idéal  $(f, g)$  engendré par deux fonctions, le cas général se traite de manière analogue (ou par récurrence). D'après le théorème de Lazard 4.30, il y a une fonction  $h$  de  $\mathcal{A}(I)$  dont le diviseur est le pgcd des diviseurs des deux fonctions  $f$  et  $g$  (c'est-à-dire qui a en chaque point de la couronne  $\mathcal{C}(I)$  un zéro d'ordre exactement égal au plus petit des ordres des zéros de  $f$  et de  $g$  en ce point).

Par construction, les fonctions  $\frac{f}{h}$  et  $\frac{g}{h}$  appartiennent à  $\mathcal{A}(I)$  (corollaire 2.26) et n'ont pas de zéro commun. Elles engendrent donc  $\mathcal{A}(I)$  (lemme 4.41) et on constate que  $h$  est un générateur de l'idéal engendré par  $f$  et  $g$ .  $\square$

**Corollaire 4.43.** — *Si le corps  $K$  est sphériquement complet, tout sous-module de type fini d'un  $\mathcal{A}(I)$ -module libre de type fini est libre.*

*Preuve.* — On démontre par récurrence sur  $n$ , que tout sous- $\mathcal{A}(I)$ -module  $M$  de type fini de  $\mathcal{A}(I)^n$  est libre.

• Pour  $n = 1$ ,  $M$  est un idéal de type fini de  $\mathcal{A}(I)$  donc principal (corollaire 4.42). Il est bien libre.

• Dans le cas général, on utilise la projection  $\mathcal{A}(I)^n \xrightarrow{\mathfrak{p}} \mathcal{A}(I)$  sur la dernière composante ( $\mathfrak{p}(a_1, \dots, a_\mu) = a_\mu$ ) et sa restriction  $M \xrightarrow{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}(M)$ . L'image  $\mathfrak{p}(M)$  est un idéal de type fini de  $\mathcal{A}(I)$  donc principal. Soit  $\{m_1, \dots, m_\nu\}$  un système de générateurs de  $M$ . Si  $m = \sum a_i m_i$  est un élément du noyau de  $\mathfrak{p}$ , on a  $m = m - \mathfrak{p}(m) = \sum a_i (m_i - \mathfrak{p}(m_i))$ . Comme  $\mathfrak{p} \circ \mathfrak{p} = \mathfrak{p}$ , les  $m_i - \mathfrak{p}(m_i)$  sont dans le noyau de  $\mathfrak{p}$  et en forment un système générateur. Le noyau de  $\mathfrak{p}$  est donc de type fini dans  $\mathcal{A}(I)^{n-1}$  c'est-à-dire libre d'après l'hypothèse de récurrence. Il en résulte que  $M$  lui-même est libre.  $\square$

La proposition 4.48 montre que l'hypothèse "sphériquement complet" est indispensable dans le corollaire 4.42 et donc dans le corollaire 4.43.

**4.7. Cas d'un corps non sphériquement complet.** — Dans ce paragraphe on suppose que le corps  $K$  est complet mais pas sphériquement complet <sup>(4)</sup>. Toutefois certaines démonstrations restent valables dans tous les cas. Par exemple la proposition 4.45 donne une démonstration élémentaire d'une forme faible du théorème de Lazard.

**Proposition 4.44.** — *Si  $K$  est un corps complet non sphériquement complet, il existe  $r > 0$  pour lequel l'application  $\mathcal{A}^{\neq 0}([0, r[) \xrightarrow{\text{div}} \mathfrak{D}^+([0, r[)$  n'est pas surjective.*

*Preuve* [26]. — Par hypothèse, il existe une suite de disques "fermés" non vides strictement emboîtés  $D_n$  ( $1 \leq n$ ) dont l'intersection est vide. Notons  $\rho_n$  le rayon du disque  $D_n$ . Les  $\rho_n$  forment une suite strictement décroissante de limite  $\rho$  non nulle car le corps  $K$  est complet. Pour chaque  $n$ , nous choisissons un nombre  $c_n$  dans  $D_n - D_{n+1}$  et nous posons  $b_n = c_{n+1} - c_n$ . On constate que  $\rho < \rho_{n+1} < |b_n| \leq \rho_n$ .

<sup>(4)</sup>En particulier,  $K$  n'est pas à valuation discrète.

On pose  $r = 1/\rho$  et on considère le diviseur  $\mathcal{Z} = \sum b_n^{-1}$  qui est défini sur la couronne  $\mathcal{C}([0, r[)$  et qui serait le diviseur de la “fonction”  $\prod(1 - b_n x) \dots$  si ce produit infini convergeait (ce qui n’est pas car les  $b_n$  ne tendent pas vers 0).

Supposons qu’il existe une fonction  $f = \sum_{s=0}^{\infty} a_s x^s$  de  $\mathcal{A}([0, r[)$  dont le diviseur est  $\mathcal{Z}$ . Comme  $\mathcal{Z}(0) \neq 0$ , on peut supposer que  $a_0 = 1$ . Posons  $r_n = 1/|b_n|$ . D’après le corollaire 2.24, pour tout  $n \geq 1$ , on a  $f = g_n \prod_{i=1}^{n-1} (1 - b_i x)$  avec  $g_n$  dans  $\mathcal{A}^*([0, r_n])$ . En particulier,  $|g_n|_{r_n} = |g(0)| = 1$  et donc  $g_n = 1 + \alpha_n x + \dots$  avec  $|\alpha_n| \leq r_n^{-1} = |b_n| \leq \rho_n$ .

On trouve  $a_1 = \alpha_n - \sum_{i=1}^{n-1} b_i = \alpha_n - c_n + c_1$  et on constate que  $c_1 - a_1 = c_n - \alpha_n$  appartient à  $D_n = \{\zeta; |\zeta - c_n| \leq \rho_n\}$ . Ceci ayant lieu pour tout  $n$ , l’intersection des  $D_n$  n’est pas vide contrairement à l’hypothèse.  $\square$

Par homothétie cette proposition se généralise à beaucoup d’autres intervalles  $I$ . Plus précisément, il s’agit des intervalles  $I = (\alpha, \beta)$  pour lesquels on a soit  $\beta$  dans  $1/\rho |K^{\text{alg}}|^*$  soit  $\alpha$  dans  $\rho |K^{\text{alg}}|^*$  où  $\rho \neq 0$  est la limite des rayons d’une famille de disques emboîtés dont l’intersection est vide.

**Proposition 4.45.** — Soit  $r > 0$ , soit  $(a_n)_{n \geq 1}$  une suite de  $K$  telle que la suite  $|a_n|$  soit croissante et tende vers  $r$  et soit  $z_n$  une suite de  $\mathbb{N}$  qui tend vers l’infini. Il existe une fonction  $f$  de  $\mathcal{A}([0, r[)$  telle que  $\text{div}(f) = \sum z_n a_n$ .

*Preuve.* — On considère les produits infinis :

$$f_s(x) = \prod_{n=s}^{\infty} \left( 1 - \left( \frac{x}{a_n} \right)^{z_n} \right)$$

Pour  $\rho < r$ , posons  $n(\rho) = \min\{n; a_n > \rho\}$ . Pour  $n \geq n(\rho)$ , on trouve :

$$\left| \left( \frac{x}{a_n} \right)^{z_n} \right|_{\rho} < \left( \frac{\rho}{|a_{n(\rho)}|} \right)^{z_n} < 1$$

Comme la suite  $z_n$  tend vers l’infini, on en déduit que les produits infinis définissant les fonctions  $f_s$  convergent pour la valeur absolue  $|\cdot|_{\rho}$ . Ceci ayant lieu pour tout  $\rho$ , les fonctions  $f_s$  appartiennent à  $\mathcal{A}([0, r[)$ . Par ailleurs, on vérifie que  $|f_{n(\rho)} - 1|_{\rho} < 1$ . Donc la fonction  $f_{n(\rho)}$  appartient à  $\mathcal{A}^*([0, \rho])$ . On constate alors facilement que la fonction  $f = f_1$  a un zéro d’ordre exactement  $z_n$  au point  $a_n$  et aucun autre zéro.  $\square$

Nous laissons le soin au lecteur de généraliser la proposition 4.45 et d’en déduire le résultat suivant.

**Corollaire 4.46 (Lazard [36]).** — Pour tout diviseur  $\mathcal{Z}$  de la couronne  $\mathcal{C}(I)$  il existe une fonction  $f$  de  $\mathcal{A}(I)$  dont le diviseur a le même support que  $\mathcal{Z}$  et telle que  $\text{div}(f)(\zeta) \geq \mathcal{Z}(\zeta)$ .

Le meilleur résultat que nous connaissons dans cette direction se trouve dans [25] (théorème 25.5). Avant de l’énoncer, nous avons besoin d’une définition.

Si  $\mathcal{Z}$  est un diviseur sur  $\mathcal{C}([0, 1[)$ , on définit la fonction  $w_{\mathcal{Z}}$  sur  $[0, 1[$  en posant :

$$(14) \quad w_{\mathcal{Z}}(\rho) = \frac{|P_{\mathcal{Z}([0, \rho])}|_{\rho}}{|P_{\mathcal{Z}([0, \rho])}(0)|} = \prod_{|\zeta| \leq \rho} \left( \frac{\rho}{|\zeta|} \right)^{z_i}.$$

Pour  $f$  dans  $\mathcal{A}([0, 1[)$  avec  $\text{div}(f) = \mathcal{Z}$  et  $|f(0)| = 1$ , on a  $|f|_{\rho} = w_{\mathcal{Z}}(\rho)$  (voir 2.29-1).

**Proposition 4.47.** — *Pour tout diviseur  $\mathcal{Z}$  de la couronne  $\mathcal{C}([0, 1[)$  et tout nombre  $B > 1$  il existe (au moins) une fonction  $f$  de  $\mathcal{A}([0, 1[)$  qui a un zéro d'ordre au moins  $\mathcal{Z}(\zeta)$  au point  $\zeta$  et telle que  $|f|_{\rho} \leq B w_{\mathcal{Z}}(\rho)$  (voir (14)).*

**Proposition 4.48.** — *Si  $K$  est un corps complet non sphériquement complet, il existe  $r > 0$  pour lequel l'anneau  $\mathcal{A}([0, r[)$  n'est pas de Bezout.*

*Preuve [26].* — D'après la proposition 4.44, il existe  $r > 0$  et un diviseur  $\mathcal{Z}$  sur  $\mathcal{C}([0, r[)$  qui n'est le diviseur d'aucune fonction de  $\mathcal{A}([0, r[)$ . Plus précisément, dans la démonstration de la proposition 4.44, le diviseur  $\mathcal{Z}$  était de la forme  $\sum a_n$  pour une suite  $|a_n|$  strictement croissante et de limite  $r$ . Dans ces conditions, si nous choisissons une suite  $z_n$  qui tend vers l'infini, la proposition 4.45 montre qu'il existe une fonction  $f$  de  $\mathcal{A}([0, r[)$  telle que  $\text{div}(f) = \sum z_n a_n$ .

Choisissons maintenant une suite  $b_n$  telle que  $0 < |a_n - b_n| < |a_1| < |a_n|$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - b_n| = 0$  et considérons la fonction

$$h_s(x) = \prod_{n=s}^{\infty} \left( \frac{x - b_n}{x - a_n} \right)^{z_n - 1} = \prod_{n=s}^{\infty} \left( 1 + \frac{a_n - b_n}{x - a_n} \right)^{z_n - 1}.$$

Pour  $\rho < r$ , posons  $n(\rho) = \min\{n; a_n > \rho\}$ . Pour  $n \geq n(\rho)$ , on trouve :

$$\left| \frac{a_n - b_n}{x - a_n} \right|_{\rho} = \frac{|a_n - b_n|}{|a_n(\rho)|} < 1$$

et on constate que  $h_{n(\rho)}$  appartient à  $\mathcal{A}^*([0, \rho])$ . Il en résulte que la fonction  $h \stackrel{\text{déf}}{=} h_1$  appartient à  $\mathcal{F}^*([0, r[)$  et a un diviseur égal à  $\sum (z_n - 1)b_n - \sum (z_n - 1)a_n$ .

La fonction  $g \stackrel{\text{déf}}{=} h f$  appartient a priori à  $\mathcal{F}([0, r[)$  mais son diviseur  $\sum (z_n - 1)b_n + \sum a_n$  étant effectif, elle appartient en fait à  $\mathcal{A}([0, r[)$  (en effet, pour tout  $\rho < r$  elle appartient à  $\mathcal{A}([0, \rho])$ ). L'idéal  $(f, g)$  ne peut être principal car le diviseur de son générateur devrait être le diviseur des zéros communs à  $f$  et  $g$ , c'est-à-dire  $\sum a_n$ , or ce dernier n'est le diviseur d'aucune fonction de  $\mathcal{A}([0, r[)$ .  $\square$

**Exercice 4.49.** — Soit  $\mathcal{Z}$  un diviseur effectif sur la couronne  $\mathcal{C}(I)$  (définition 4.23).

1. Vérifier que le système  $\mathcal{M}_{\mathcal{Z}} \stackrel{\text{déf}}{=} (\mathcal{A}(J), f_{J, J'})$  défini par  $f_{J, J'}(1) = P_{\mathcal{Z}(J)}/P_{\mathcal{Z}(J')}$  est un faisceau cohérent localement libre de rang 1.
2. Montrer que, s'il existe une fonction  $a$  de  $\mathcal{A}(I)$  telle que  $\mathcal{Z} = \text{div}(f)$ , le  $\mathcal{A}(I)$ -module  $\mathcal{M}_{\mathcal{Z}(I)}$  est libre de rang 1.
3. On suppose que  $\mathcal{Z} = \sum a_n$  est le diviseur sur  $\mathcal{A}([0, r[)$  construit dans la démonstration de la proposition 4.48 et dont l'idéal associé est engendré par deux fonctions  $f$  et  $g$ . Vérifier que, pour  $0 \leq r' < r$  et  $J = [0, r']$ , on a  $f =$

$P_J \tilde{f}_J$  et  $g = Q_J \tilde{g}_J$  avec  $P_J$  et  $Q_J$  deux polynômes de  $K[x]$  et  $\tilde{f}_J$  et  $\tilde{g}_J$  deux fonctions de  $\mathcal{A}^*(J)$ . Montrer que  $\tilde{f}_{\mathcal{I}_{\mathcal{Z}}, J} \left( Q_J \otimes f - P_J \frac{\tilde{f}_J}{\tilde{g}_J} \otimes g \right) = 0$  mais que  $Q_J \otimes f - P_J \frac{\tilde{f}_J}{\tilde{g}_J} \otimes g = 1 \otimes Q_J f - \frac{\tilde{f}_J}{\tilde{g}_J} \otimes P_J g$  n'est pas nul dans  $\mathcal{A}(J) \otimes_{\mathcal{A}(I)} \mathcal{M}(I)$ . En déduire que l'application  $\tilde{f}_{\mathcal{M}_{\mathcal{Z}}, J}$  n'est pas injective.

**4.8. Démonstration originale du théorème de Lazard.** — Dans un but historique, nous présentons la démonstration originale du théorème de Lazard [36] en nous limitant au cas où  $I = [0, 1[$ .

**Théorème 4.50 (Lazard [36]).** — *Si le corps  $K$  est sphériquement complet, pour tout diviseur  $\mathcal{Z}$  de la couronne  $\mathcal{C}([0, 1[)$ , il existe (au moins) une fonction  $f$  de  $\mathcal{A}([0, 1[)$  telle que  $\text{div}(f) = \mathcal{Z}$ .*

*Preuve.* — Nous supposons que  $\mathcal{Z}(0) \neq 0$  ce qui n'est pas une réelle restriction. On note  $0 < r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots$  la suite des valeurs absolues des points de  $\text{supp}(\mathcal{Z})$ . Par définition, on a  $\lim r_n = 1$ .

On pose  $P_n(x) = \prod_{|\zeta|=r_n} \left(1 - \frac{x}{\zeta}\right)^{\mathcal{Z}(\zeta)}$  de telle sorte que, si  $z_n = \sum_{|\zeta|=r_n} \mathcal{Z}(\zeta)$  désigne le nombre de points, avec multiplicité, du diviseur  $\mathcal{Z}$  sur le cercle  $|\zeta| = r_n$ , on ait :

$$|P_n|_\rho = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho \leq r_n \\ \left(\frac{\rho}{r_n}\right)^{z_n} & \text{si } \rho \geq r_n \end{cases}$$

Le polygone de valuation du polynôme  $P_n$  ayant un seul sommet d'abscisse  $r_n$ , ce polynôme est  $r_n$ -extrémal. D'après le lemme 2.15, à toute fonction  $f$  de  $\mathcal{A}([r_n])$ , on peut associer son reste  $R_n(f)$  dans la division par le polynôme  $P_n$ . C'est un polynôme ayant les propriétés suivantes :

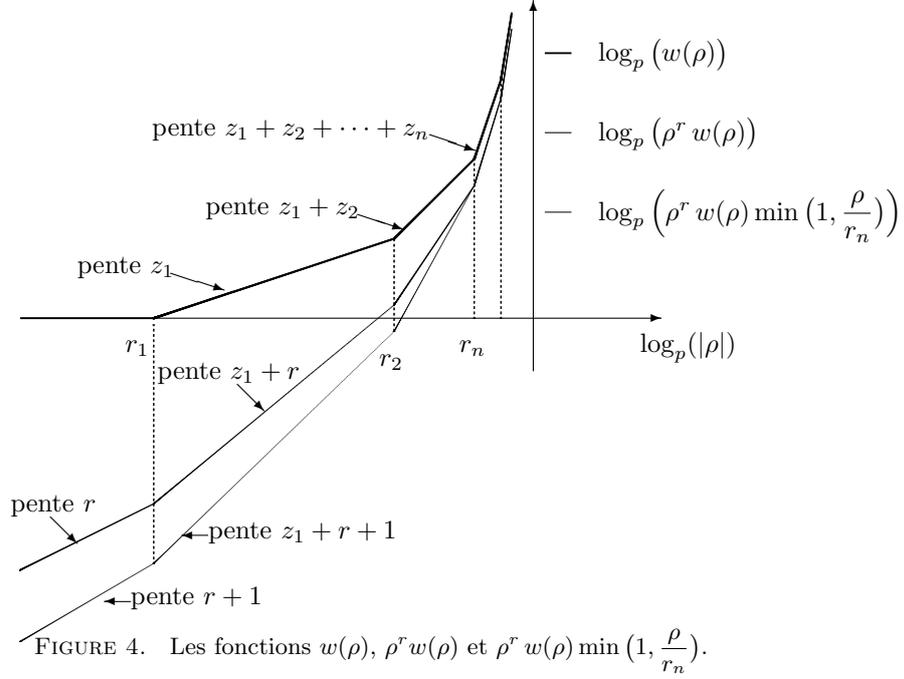
$$f - R_n(f) \in P_n \mathcal{A}([r_n]) \quad , \quad \deg(R_n(f)) < \deg(P_n) \quad \text{et} \quad |R_n(f)|_{r_n} \leq |f|_{r_n}.$$

Si  $f$  et  $g$  sont des fonctions de  $\mathcal{A}([r_n])$ , on a  $g = P_n h + R_n(g)$  d'où :

$$R_n(f R_n(g)) = R_n(f(g - P_n h)) = R_n(fg)$$

Pour contruire la fonction  $f$ , on va construire, par une double récurrence sur  $(n, r)$  dans  $\mathbb{N}^2$ , des fonctions  $f_{n,r}$  de  $\mathcal{A}([0, 1[)$  telles que :

1.  $f_{n,r}(0) = 1$ ,
2.  $R_i(f_{n,r}) = 0$  pour  $1 \leq i \leq n$ ,
3.  $|f_{n,r} - f_{n-1,r}|_\rho \leq \rho^r w(\rho) \min\left(1, \frac{\rho}{r_n}\right)$ ,
4.  $|R_i(f_{n,r})|_{r_i} \leq r_i^r w(r_i)$  pour  $n < i$ ,
5.  $|f_{n,r}|_\rho \leq w(\rho)$  pour  $\rho < 1$ .



- On prend  $f_{0,0} = 1$ .
- Pour  $r \geq 0$  fixé et  $n \geq 1$ , on pose

$$f_{n,r} = f_{n-1,r} - QR_n\left(\frac{f_{n-1,r}}{Q}\right) \quad \text{avec} \quad Q(x) = x^{r+1} \prod_{i=1}^{n-1} P_i(x).$$

Les racines du polynôme  $Q$  ont pour valeurs absolues les nombres  $0, r_1, \dots, r_{n-1}$  et  $Q$  est donc un élément inversible de  $\mathcal{A}([r_n])$  ce qui justifie la définition de  $f_{n,r}$ .

On a  $Q(0) = 0$  et la condition 1. est évidemment satisfaite.

Pour  $1 \leq i \leq n-1$ ,  $f_{n-1,r}$  et  $Q$  sont divisibles par  $P_i$ , donc  $R_i(f_{n-1,r}) = 0$  et

$$R_n(f_{n,r}) = R_n(f_{n-1,r}) - R_n\left(QR_n\left(\frac{f_{n-1,r}}{Q}\right)\right) = R_n(f_{n-1,r}) - R_n\left(Q\frac{f_{n-1,r}}{Q}\right) = 0$$

ce qui achève de démontrer la condition 2. Par ailleurs, d'après la relation 4., on a :

$$\begin{aligned} |f_{n,r} - f_{n-1,r}|_{r_n} &= \left|QR_n\left(\frac{f_{n-1,r}}{Q}\right)\right|_{r_n} = \left|QR_n\left(\frac{1}{Q}R_n(f_{n-1,r})\right)\right|_{r_n} \\ &\leq |Q|_{r_n} \frac{1}{Q} |R_n(f_{n-1,r})|_{r_n} = |R_n(f_{n-1,r})|_{r_n} \leq r_n^r w(r_n). \end{aligned}$$

Pour  $\rho \leq r_n$ , on a  $|Q|_\rho = \rho^{r+1} w(\rho)$ . Comme le polynôme  $f_{n,r} - f_{n-1,r}$  est divisible par  $Q$ , les pentes de son polygone de valuation sont au moins égales à celles du polygone

de valuation de  $Q$ . On en déduit que :

$$|f_{n,r} - f_{n-1,r}|_\rho \leq \frac{|Q|_\rho}{|Q|_{r_n}} r_n^r w(r_n) = \frac{1}{r_n} \rho^{r+1} w(\rho).$$

Pour  $r_n \leq \rho$ , on remarque que, par définition, le degré du polynôme  $R_n(f_{n-1,r})$  est au plus  $z_n - 1$  et que celui de  $f_{n,r} - f_{n-1,r}$  est donc au plus  $r + 1 + \sum_{i=1}^{n-1} z_i + z_n - 1$ . Les pentes du polygone de valuation de  $f_{n,r} - f_{n-1,r}$  sont au plus égales à celles de la fonction  $\rho^r w(\rho)$ . On en déduit que :

$$|f_{n,r} - f_{n-1,r}|_\rho \leq \frac{\rho^r w(\rho)}{r_n^r w(r_n)} r_n^r w(r_n) = \rho^r w(\rho),$$

ce qui achève de démontrer le point 3.

On trouve maintenant

$$\begin{aligned} |R_i(f_{n,r})|_{r_i} &\leq \max\left(|R_i(f_{n-1,r})|_{r_i}, |R_i(f_{n,r} - f_{n-1,r})|_{r_i}\right) \\ &\leq \max\left(|R_i(f_{n-1,r})|_{r_i}, |f_{n,r} - f_{n-1,r}|_{r_i}\right) \leq r_i^r w(r_i) \end{aligned}$$

ce qui démontre 4., et

$$|f_{n,r}|_\rho \leq \max\left(|f_{n-1,r}|_\rho, |f_{n,r} - f_{n-1,r}|_\rho\right) \leq w(\rho)$$

ce qui démontre 5.

• Il reste à faire la récurrence sur  $r$ . Pour  $r \geq 1$ , on remarque que, si  $1 \leq n$ , on a  $\min\left(1, \frac{\rho}{r_{n-1}}\right) \leq \min\left(1, \frac{\rho}{r_n}\right)$ . On pose  $f_{0,r} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{n,r-1}$ . Le lemme 4.28 montre que  $f_{0,r}$  appartient à  $\mathcal{A}([0, 1])$  et vérifie, pour tout  $n$ , la relation :

$$|f_{0,r} - f_{n,r-1}|_\rho \leq \rho^r w(\rho) \min\left(1, \frac{\rho}{r_n}\right).$$

par construction, on a  $f_{0,r}(0) = 1$ . Les conditions 2. et 3. sont vides et la condition 5. est une conséquence immédiate de la majoration précédente. Pour la condition 4., on prend  $n > i$ , de sorte que  $R_i(f_{n,r-1}) = 0$  et on calcule :

$$\begin{aligned} |R_i(f_{0,r})|_{r_i} &\leq \inf_{n > i} |R_i(f_{0,r} - f_{n,r-1})|_{r_i} \leq \inf_{n > i} |f_{0,r} - f_{n,r-1}|_{r_i} \\ &\leq r_i^{r-1} w(r_i) \inf_{n > i} \min\left(1, \frac{r_i}{r_n}\right) = r_i^r w(r_i). \end{aligned}$$

La majoration  $|f_{0,r} - f_{n,r-1}|_\rho \leq \rho^r w(\rho)$  montre que la suite  $f_{0,r}$  est convergente pour chaque valeur absolue  $|\cdot|_\rho$  donc converge dans  $\mathcal{A}([0, 1])$ . La condition 5. montre que sa limite  $f$  vérifie  $|f|_\rho \leq w(\rho)$  pour  $\rho < 1$ . Maintenant, on a

$$|R_i(f)|_{r_i} = \lim_{r \rightarrow \infty} |R_i(f_{0,r})|_{r_i} \leq \lim_{r \rightarrow \infty} r_i^r w(r_i) = 0.$$

Autrement dit,  $R_i(f) = 0$  et  $f$  est divisible par  $P_i$  pour tout  $i$ . Donc le diviseur  $\text{div}(f)$  est plus grand que  $\mathcal{Z}$ . Mais la condition  $|f|_\rho \leq w(\rho)$  interdit à  $f$  d'avoir d'autres zéros que les racines des  $P_i$ . Donc  $(f) = \mathcal{Z}$ .  $\square$

## 5. Fonctions surconvergentes

**5.1. Les anneaux  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}^\dagger$ .** — Ces anneaux n'interviendront que très peu dans ce cours. Nous les introduisons car on les rencontre beaucoup dans la littérature.

On appelle *anneau d'Amice* le sous-anneau du corps  $E_1$  défini par :

$$\mathcal{E} = \left\{ f = \sum_{s \in \mathbb{Z}} a_s x^s ; a_s \in K, \sup_{s \in \mathbb{Z}} |a_s| < \infty, \lim_{s \rightarrow -\infty} a_s = 0 \right\}$$

Il donc est muni de la valeur absolue :

$$|f| \stackrel{\text{déf}}{=} |f|_1 = \sup_{s \in \mathbb{Z}} |a_s|$$

et est un anneau complet pour la topologie correspondante.

**Exercice 5.1.** — Montrer que, si la valuation de  $K$  est discrète,  $\mathcal{E}$  est un corps. Sinon vérifier que  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} = \{f \in \mathcal{E} ; |f| \leq 1\}$  est un anneau local dont l'idéal maximal est strictement plus grand que l'idéal  $\mathcal{P}_{\mathcal{E}} = \{f \in \mathcal{E} ; |f| < 1\}$ .

L'anneau  $\mathcal{E}$  contient le sous-anneau des *fonctions surconvergentes* :

$$\mathcal{E}^\dagger = \left\{ f = \sum_{s \in \mathbb{Z}} a_s x^s ; a_s \in K, \sup_{s \in \mathbb{Z}} |a_s| < \infty, (\exists \alpha_f \in ]0, 1[) \lim_{s \rightarrow -\infty} |a_s| \alpha_f^s = 0 \right\}.$$

Il donc est muni de la valeur absolue  $|f| \stackrel{\text{déf}}{=} |f|_1$ , mais, en plus, pour chacun de ses éléments, il existe un nombre  $\alpha < 1$  tel que  $|f|_\rho$  existe pour  $\alpha \leq \rho < 1$ .

## 5.2. L'anneau $\mathcal{R}$ : propriétés algébriques. —

**Définition 5.2.** — Pour  $0 < \alpha < 1$ , on pose  $I_\alpha = [\alpha, 1[$  et  $\mathcal{R} = \bigcup_{\alpha < 1} \mathcal{A}(I_\alpha)$ .

L'anneau  $\mathcal{R}$ , dit "de Robba", est donc l'ensemble des fonctions analytiques à coefficients dans  $K$  qui convergent dans une couronne  $\mathcal{C}(I_\alpha)$  où  $\alpha$  dépend de la fonction. C'est un anneau qui est fondamental pour la théorie. Il a des propriétés intéressantes aussi bien du point de vue algébrique que topologique.

**Remarque 5.3.** — On a aussi  $\mathcal{R} = \bigcup_{\alpha < 1} \mathcal{A}(I_\alpha^\circ) = \bigcup_{\alpha < 1} \mathcal{A}(] \alpha, 1[)$ .

Les *propriétés algébriques* de l'anneau de Robba se déduisent de celles de l'anneau  $\mathcal{A}(I_\alpha)$  des fonctions analytiques dans une couronne "ouverte".

**Proposition 5.4.** — Si le corps  $K$  est sphériquement complet, l'anneau  $\mathcal{R}$  est de Bezout c'est-à-dire que tout idéal de type fini de  $\mathcal{R}$  est principal. De plus, tout sous-module de type fini d'un  $\mathcal{R}$ -module libre de type fini est libre.

*Preuve.* — Un idéal de type fini de  $\mathcal{R}$  a, par définition, un système de générateurs contenus dans un anneau  $\mathcal{A}(I_\alpha)$ . D'après la proposition 4.42, on peut les remplacer par un seul générateur.

L'étude des sous- $\mathcal{R}$ -modules de type fini se fait comme dans le corollaire 4.43.  $\square$

**5.3. L'anneau  $\mathcal{R}$  : propriétés topologiques.** — La topologie sur  $\mathcal{R} = \bigcup_{\alpha < 1} \mathcal{A}(I_\alpha)$  est celle de la limite inductive c'est-à-dire la plus fine des topologies localement convexes pour laquelle les plongements  $\mathcal{A}(I_\alpha) \hookrightarrow \mathcal{R}$  sont continus. On trouvera dans [19] une étude systématique et très complète des limites inductives d'espaces vectoriels topologiques sur un corps  $p$ -adique. Dans le cas particulier de  $\mathcal{R}$ , les démonstrations se simplifient.

La définition de la topologie se traduit facilement en terme de voisinages de 0 :

**Proposition 5.5.** — *Une partie absolument convexe  $V$  de  $\mathcal{R}$  est un voisinage de 0 si et seulement si  $V = \bigcup_{\alpha < 1} V_\alpha$  où chaque  $V_\alpha$  est un voisinage de 0 dans  $\mathcal{A}(I_\alpha)$ .*

*Preuve.* — Si  $V$  est un voisinage de 0 dans  $\mathcal{R}$ , alors  $V_\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} V \cap \mathcal{A}(I_\alpha)$ , image réciproque de  $V$ , est un voisinage de 0 dans  $\mathcal{A}(I_\alpha)$  et  $V = \bigcup_{\alpha < 1} V_\alpha$ .

Si  $V = \bigcup_{\alpha < 1} V_\alpha$ , alors  $V \cap \mathcal{A}(I_\alpha)$ , qui contient  $V_\alpha$ , est un voisinage de 0 dans  $\mathcal{A}(I_\alpha)$ . La topologie de  $\mathcal{R}$  étant la plus fine qui...,  $V$  est un voisinage de 0 dans  $\mathcal{R}$ .  $\square$

On peut maintenant construire un système fondamental de voisinages de 0 dans  $\mathcal{R}$  à partir du système fondamental de voisinages de 0 dans  $\mathcal{A}(I_\alpha)$  construit à la fin du paragraphe 4.1

$$(15) \quad \begin{aligned} V(\varepsilon_+, \varepsilon_-, r) &= \bigcup_{\alpha < 1} D_{\rho(\alpha)}^0(\varepsilon_+(\alpha)) \oplus D_\alpha^\infty(\varepsilon_-(\alpha)) \\ &= \left( \bigcup_{\alpha < 1} D_{\rho(\alpha)}^0(\varepsilon_+(\alpha)) \right) \oplus \left( \bigcup_{\alpha < 1} D_\alpha^\infty(\varepsilon_-(\alpha)) \right) \end{aligned}$$

où  $\varepsilon_\pm$  sont des applications de  $[0, 1[$  dans  $[0, \infty]$  et  $\rho$  est une application de  $[0, 1[$  dans  $[0, 1[$ . Il résulte de la remarque 4.3-2 que l'on peut se limiter aux fonctions  $\varepsilon_-$  décroissantes. En fait, cette construction revient à utiliser la décomposition de  $\mathcal{R}$  en somme directe. Plus précisément, posons :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}([0, 1]) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}^\dagger = \bigcup_{\alpha < 1} \mathcal{A}([\alpha, \infty])$$

de telle sorte que  $\mathcal{R} = x\mathcal{A} \oplus \mathcal{H}^\dagger$ . On constate que la topologie sur  $\mathcal{R}$  est aussi la topologie produit à condition de munir  $\mathcal{H}^\dagger$  de la topologie limite inductive (c'est-à-dire la plus fine rendant les plongements  $\mathcal{A}([\alpha, \infty]) \hookrightarrow \mathcal{H}^\dagger$  continus).

Les  $D_\rho^0(\varepsilon)$  sont des voisinages de 0 dans  $x\mathcal{A}$ , les  $D_\rho^0(\varepsilon) \oplus \mathcal{H}^\dagger = \{f \in \mathcal{R}; |f^+|_r < \varepsilon\}$  sont donc des voisinages de 0 dans  $\mathcal{R}$ . Cependant les voisinages de 0 de  $\mathcal{R}$  les plus utiles vont être ceux qui relèvent une base de voisinages de 0 de  $\mathcal{H}^\dagger$  c'est-à-dire de la forme  $x\mathcal{A} \oplus \bigcup_{\alpha < 1} D_\alpha^\infty(\varepsilon(\alpha))$  pour une fonction  $\varepsilon$  décroissante.

**Remarque 5.6.** — Posons  $\ell = \limsup_{\alpha \rightarrow 1} \varepsilon(\alpha)$ .

Si  $\ell > 0$ , on constate facilement que :

$$\bigcup_{r \leq \alpha < 1} D_\alpha^\infty(\varepsilon(\alpha)) \supset \bigcup_{r \leq \alpha < 1} D_\alpha^\infty(\ell) = D_1^\infty(\ell) \stackrel{\text{déf}}{=} \{f \in \mathcal{H}^\dagger; |f|_1 < \ell\}..$$

En particulier, pour  $\ell > 0$ , les  $D_1^\infty(\ell) = \{f \in \mathcal{H}^\dagger; |f^-|_1 < \ell\}$  sont des voisinages de 0 dans  $\mathcal{H}^\dagger$ , un peu grossiers certes, mais très utiles comme on va le voir.

Le théorème suivant répond aux “questions qui se posent pour un espace limite inductive... et dont la réponse présente souvent des difficultés sérieuses” ([30] page 186).

**Théorème 5.7** (cf. [19] 3.1.7). — *Muni de sa topologie  $\mathcal{R}$  est*

1. *séparé,*
2. *un espace de Montel : il est tonnelé et toute partie bornée est compactoïde,*
3. *régulier : une partie de  $\mathcal{R}$  est bornée si et seulement si elle est contenue et bornée dans l'un des  $\mathcal{A}(I_\alpha)$ ,*
4. *séquentiellement trivial : une suite de  $\mathcal{R}$  est convergente si et seulement elle est contenue et convergente dans l'un des  $\mathcal{A}(I_\alpha)$ ,*
5. *son propre dual (plus précisément,  $\mathcal{H}^\dagger$  et  $x\mathcal{A}$  sont dual l'un de l'autre),*
6. *complet.*

*Preuve.* — Nous avons besoin de plusieurs lemmes intéressants par eux mêmes.

**Lemme 5.8.** — *Pour  $0 < r < \alpha < 1$  et  $M > 0$ , la partie absolument convexe  $B(r, M) \stackrel{\text{déf}}{=} \{f \in \mathcal{A}([r, \infty]); |f|_r \leq M\}$  est compactoïde dans  $\mathcal{A}([\alpha, \infty])$ .*

*Preuve.* —  $B(r, M)$  est contenue dans  $\{f \in \mathcal{A}(]r, \infty]); |f|_\rho \leq M (\forall \rho > r)\}$  qui est une partie bornée dans  $\mathcal{A}(]r, \infty])$  donc compactoïde d'après le lemme 4.2. On conclut en remarquant que l'injection de  $\mathcal{A}(]r, \infty])$  dans  $\mathcal{A}([\alpha, \infty])$  est continue.  $\square$

**Lemme 5.9.** — *Une partie bornée de  $\mathcal{H}^\dagger$  est contenue et compactoïde dans l'un des  $\mathcal{A}([\alpha, \infty])$ .*

*Preuve.* — Soit  $r_n$  une suite tendant vers 1. Nous montrons qu'une partie bornée  $B$  de  $\mathcal{H}^\dagger$  est contenue dans l'un des  $B_n \stackrel{\text{déf}}{=} B(r_n, |p|^{-n}) = \{f \in \mathcal{A}([r_n, \infty]); |f|_{r_n} \leq |p|^{-n}\}$ . Il résultera du lemme 5.8 que la partie  $B$  elle-même est contenue et compactoïde dans  $\mathcal{A}([\alpha, \infty])$  pour  $r_n < \alpha < 1$ .

Si  $B$  n'était contenue dans aucun des  $B_n$ , pour chaque  $n$ , nous pourrions choisir un élément  $f_n$  appartenant à  $B$  mais pas à  $B_n$ . La suite  $(f_n)$  satisferait les conditions suivantes :

- a.- Si  $V$  est un voisinage localement convexe de 0 dans  $\mathcal{H}^\dagger$ , comme  $B$  est bornée, il existe  $\lambda_V$  dans  $K$  tel que  $B$  soit contenue dans  $\lambda_V V$ . Dès que  $|\lambda_V p^n| \leq 1$ , c'est-à-dire pour  $n$  assez grand, on aurait  $p^n f_n \in p^n B \subset p^n \lambda_V V \subset V$ .  
[en particulier, la suite  $(p^n f_n)$  tendrait vers 0 dans  $\mathcal{H}^\dagger$ ]
- b.- La fonction  $f_n$  n'appartenant pas à  $B_n$  alors, soit elle n'appartient pas à  $\mathcal{A}([r_n, \infty])$  soit  $|f|_{r_n} > |p|^{-n}$ , c'est-à-dire  $|p^n f_n|_{r_n} > 1$ .

Nous allons utiliser la convention  $|f|_\alpha = \text{inf ty}$  si  $f$  n'appartient pas à  $\mathcal{A}([\alpha, \infty])$ . Elle permet en effet de considérer la première possibilité de b comme un cas particulier de la deuxième tout en conservant le fait que, pour  $f$  dans  $\mathcal{H}^\dagger$ , la fonction  $\alpha \mapsto |f|_\alpha$  (de  $[0, 1[$  dans  $[0, \infty])$ ) est décroissante. Il en sera de même de la fonction  $\alpha \mapsto \varepsilon(\alpha) \stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{n \geq 0} |p^n f_n|_\alpha$

Pour  $\alpha < 1$  fixé et pour  $n$  assez grand, on a  $\alpha \leq r_n$  et donc  $|p^n f_n|_\alpha \geq |p^n f_n|_{r_n} > 1$ . Il en résulte que  $\varepsilon(\alpha) > 0$ . Par construction,  $|p^n f_n|_\alpha \geq \varepsilon(\alpha)$  donc  $p^n f_n$  n'appartient

pas à  $D_\alpha^\infty(\varepsilon(\alpha))$  et donc pas à  $V = \bigcup_{\alpha < 1} D_\alpha^\infty(\varepsilon(\alpha))$  qui est un voisinage de 0 de  $\mathcal{H}^\dagger$  ce qui contredit la propriété a.  $\square$

**preuve de 1.**— Soit  $f \neq 0$  dans  $\mathcal{R}$ , le voisinage  $V_f$  de 0 suivant ne contient pas  $f$  :

$$V_f = \begin{cases} x\mathcal{A} \oplus D_1^\infty(|f^-|_1) & \text{si } f^- \neq 0, \\ D_\rho^0(|f^+|_r) \oplus \mathcal{H}^\dagger \quad (0 < \rho < 1) & \text{si } f^- = 0, \text{ c'est-à-dire si } f^+ \neq 0. \end{cases}$$

**preuves de 2. et 3.**— Les  $\mathcal{A}(I_\alpha)$  sont des espaces de Fréchet donc tonnelés. Si  $V$  est une partie fermée, absolument convexe et absorbante de  $\mathcal{R}$ , alors  $V_\alpha = V \cap \mathcal{A}(I_\alpha)$  est une partie fermée, absolument convexe et absorbante de  $\mathcal{A}(I_\alpha)$  c'est donc un voisinage de 0. D'après la proposition 5.5,  $V = \bigcup V_\alpha$  est donc un voisinage de 0 et  $\mathcal{R}$  est bien tonnelé.

Soit  $B$  une partie de  $\mathcal{R}$ . Notons  $B^-$  et  $B^+$  ses projections par les applications  $f \mapsto f^-$  et  $f \mapsto f^+$  sur  $\mathcal{H}^\dagger$  et  $x\mathcal{A}$ . Si  $B$  est bornée (resp. compactoïde) alors  $B^-$  et  $B^+$  sont bornées (resp. compactoïdes). Inversement, si  $B^-$  est une partie bornée (resp. compactoïde) de  $\mathcal{A}([\alpha, \infty])$  et  $B^+$  une partie bornée (resp. compactoïde) de  $x\mathcal{A}$ , alors  $B^- \oplus B^+$  est une partie bornée (resp. compactoïde) de  $\mathcal{A}(I_\alpha)$  (donc aussi de  $\mathcal{R}$ ) et il en est de même de  $B \subset B^- \oplus B^+$ .

Pour achever de démontrer le point 2., il suffit donc de montrer que toute partie bornée de  $x\mathcal{A}$  (resp.  $\mathcal{H}^\dagger$ ) est compactoïde dans  $x\mathcal{A}$  (resp.  $\mathcal{H}^\dagger$ ). Ceci est une conséquence de la proposition 4.2 <sup>(5)</sup> (resp. du lemme 5.9 car l'injection de  $\mathcal{A}([\alpha, \infty])$  dans  $\mathcal{H}^\dagger$  est continue).

Pour démontrer le point 3., il suffit de montrer que toute partie bornée de  $\mathcal{H}^\dagger$  est contenue et bornée dans l'un des  $\mathcal{A}([\alpha, \infty])$  ce qui est une conséquence du lemme 5.9 car une partie compactoïde est bornée.

**preuve de 4.**— Soit  $(f_n)$  une suite convergente de  $\mathcal{R}$ . L'ensemble  $\{f_n\}$  est une partie bornée de  $\mathcal{R}$  donc contenue et bornée dans l'un des  $\mathcal{A}(I_\alpha)$  d'après 2. Nous montrons que la suite  $(f_n)$  converge dans  $\mathcal{A}(I_r)$  pour  $\alpha < r < 1$ .

On se ramène par translation au cas où la limite de la suite est nulle. La suite  $(f_n^+)$  (resp.  $(f_n^-)$ ) converge vers 0 dans  $x\mathcal{A}$  (resp.  $\mathcal{H}^\dagger$ ). Il reste donc juste à montrer que la suite  $(f_n^-)$  converge vers 0 dans  $\mathcal{A}([r, \infty])$  pour  $\alpha < r < 1$ .

Comme  $\{f_n^-\}$  est une partie bornée de  $\mathcal{A}([\alpha, \infty])$ , il existe  $M$  tel que  $|f_n^-|_\alpha \leq M$  pour tout  $n$ . Par ailleurs, comme la suite  $(f_n^-)$  converge vers 0 dans  $\mathcal{H}^\dagger$ , la suite  $|f_n^-|_1$  tend vers 0 ( $D_1^\infty(\varepsilon)$  est un voisinage de 0 dans  $\mathcal{H}^\dagger$  d'après la remarque 5.6). Maintenant, la convexité logarithmique de la fonction  $r \mapsto |f|_r$  donne, pour  $\alpha \leq r \leq 1$  :

$$|f_n^-|_r \leq |f_n^-|_1^{\frac{r-\alpha}{1-\alpha}} |f_n^-|_\alpha^{\frac{1-r}{1-\alpha}} \leq |f_n^-|_1^{\frac{r-\alpha}{1-\alpha}} M^{\frac{1-r}{1-\alpha}}.$$

On constate que, pour  $\alpha < r < 1$ , la suite  $|f_n^-|_r$  tend vers 0 et donc que la suite  $(f_n^-)$  (appartient à et) tend vers 0 dans  $\mathcal{A}([r, \infty])$ .

**preuve de 5.**— Il est connu qu'un espace de Montel est reflexif. On peut toutefois faire une démonstration plus explicite.

<sup>(5)</sup> $[0, 1[$  est un ouvert de  $[0, \infty[$  !

Soit  $T$  une forme linéaire continue sur  $\mathcal{H}^\dagger$ . Posons  $T(x^{-s}) = b_s$ . Toute fonction  $f = \sum_{s=0}^{\infty} a_s x^{-s}$  de  $\mathcal{A}([\alpha, \infty])$  étant la limite, dans  $\mathcal{A}([\alpha, \infty])$  donc dans  $\mathcal{H}^\dagger$ , des sommes finies  $\sum_{s=0}^d a_s x^{-s}$ , on trouve  $T(f) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s b_s$ . Pour  $\alpha < 1$  fixé, on peut choisir un nombre  $a_s$  de  $K$  tel que  $\frac{1}{s}\alpha^s \leq |a_s| < \frac{1}{s}|p|^{-1}\alpha^s$ . La majoration de  $|a_s|$  montre que la fonction  $\sum_{s=0}^{\infty} a_s x^{-s}$  appartient à  $\mathcal{A}([\alpha, \infty])$ . Donc la série  $\sum a_s b_s$  converge et la suite  $a_s b_s$  tend vers 0. La minoration s'écrit  $\frac{1}{s}\alpha^s |b_s| \leq |a_s b_s|$  et montre que la suite  $\frac{1}{s}\alpha^s |b_s|$  tend vers 0. Il en résulte que la série  $\sum_{s=0}^{\infty} b_s x^s$  appartient à  $\mathcal{A}([0, \alpha])$ . Ceci ayant lieu pour tout  $\alpha < 1$ , on a en fait montré qu'elle appartient à  $\mathcal{A}$ .

On vient de montrer que l'application  $\Theta : T \mapsto \sum_{s=1}^{\infty} T(x^{-s})x^{s+1}$  est une application du dual fort  $\mathcal{H}^{\dagger*}$  dans  $x\mathcal{A}$ . Il est très facile de vérifier que cette application est surjective. Il reste à vérifier que c'est un homéomorphisme. Or, par définition, la topologie sur  $\mathcal{H}^{\dagger*}$  est celle de la convergence uniforme sur les parties bornées, c'est-à-dire sur les  $B(\alpha, M)$  (voir lemme 5.8). Cette topologie est clairement définie par les normes

$$\|T\|_\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{f \in B(\alpha, 1)} |T(f)| = \sup_{f \in \mathcal{A}([\alpha, \infty]) - \{0\}} \frac{|T(f)|}{|f|_\alpha}.$$

Comme les fonctions  $x^{-s}$  sont denses dans  $\mathcal{A}([\alpha, \infty])$ , on constate que

$$\|T\|_\alpha = \sup_{s \geq 0} \frac{|T(x^{-s})|}{|x^{-s}|_\alpha} = \alpha^{-1} |\Theta(T)|_\alpha$$

et  $\Theta$  est bien un homéomorphisme.

Soit  $T$  une forme linéaire continue sur  $x\mathcal{A}$ . On pose  $T(x^{s+1}) = b_s$ . Nous montrons qu'il existe  $\rho < 1$  tel que  $\lim_{s \rightarrow \infty} |b_s| \rho^{-s} = 0$ . Sinon, pour  $\rho < 1$ , il existerait  $\varepsilon(\rho) > 0$  tel que  $|b_s| \rho^{-s} \geq \varepsilon(\rho)$  pour une infinité d'indices  $s$ . En choisissant une suite  $(\rho_n)$  croissante et tendant vers 1, on pourrait construire une suite d'entiers  $(s_n)$  telle que  $s_n > \max\{\varepsilon(\rho_n)^{-1}, s_{n-1}\}$  pour  $n > 0$  et  $|b_{s_n}| \geq \rho_n^{s_n} \varepsilon(\rho_n)$  pour tout  $n$ . Pour chaque  $n$ , on pourrait choisir  $a_n$  dans  $K$  tel que  $\rho_n^{-s_n} \varepsilon(\rho_n)^{-1} \leq |a_n| < |p|^{-1} \rho_n^{-s_n} \varepsilon(\rho_n)^{-1} < |p|^{-1} \rho_n^{-s_n} s_n$ . Pour  $\rho < 1$ , on a  $(\frac{\rho}{\rho_n}) < \sqrt{\rho} < 1$  pour  $n$  assez grand et la suite  $\rho^{s_n} |a_n| < |p|^{-1} s_n (\frac{\rho}{\rho_n})^{s_n}$  tendrait vers 0. La fonction  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{s_n+1}$  appartiendrait donc à  $x\mathcal{A}([\rho, \infty])$  et la suite  $|a_n b_{s_n}|$  tendrait vers 0 ce qui contredirait la minoration  $|a_n b_{s_n}| \geq \rho_n^{-s_n} \varepsilon(\rho_n)^{-1} \varepsilon(\rho_n) \rho_n^{s_n} = 1$ . On vient de montrer que l'application  $\Psi : T \mapsto \sum_{s=0}^{\infty} T(x^{s+1})x^{-s}$  est une application du dual fort  $(x\mathcal{A})^*$  dans  $\mathcal{H}^\dagger$ . Il est très facile de vérifier que cette application est surjective. Il reste à vérifier que c'est un homéomorphisme. Or, par définition, la topologie sur  $(x\mathcal{A})^*$  est celle de la convergence uniforme sur les parties bornées, c'est-à-dire sur les  $B(M) = \{f \in x\mathcal{A}; |f|_\rho \leq M(\rho) (\forall \rho < 1)\}$  où  $M$  est une application de  $[0, 1[$  dans  $]0, \infty[$ . Cette topologie est définie par les normes  $\|T\|_M \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{f \in B(M)} |T(f)|$ . La fonction  $a_s x^{s+1}$  appartient à  $B_M$  si et seulement si  $|a_s| \leq \inf_{\rho < 1} M(\rho) \rho^{-s-1}$ . on en déduit facilement que  $\|T\|_M < 1$  si et seulement si, pour tout  $s \geq 0$ ,  $|T(x^{-s})| < \sup_{\rho < 1} \frac{1}{M(\rho)} \rho^{s+1}$  donc si et seulement s'il existe  $\rho < 1$  tel que  $|\Psi(T)|_\rho = \max_{s \geq 0} |T(x^{-s})| \rho^{-s} < \frac{\rho}{M(\rho)}$ . Autrement dit, l'application linéaire

$T$  appartient à la boule unité “ouverte” pour la norme  $\|\cdot\|_M$  si et seulement si la fonction  $\Psi(T)$  appartient à  $\bigcup_{\rho < 1} D_\rho^\infty\left(\frac{\rho}{M(\rho)}\right)$ . Donc  $\Psi$  est bien un homéomorphisme.

**preuve de 6.**— C’est maintenant évident car un dual (fort) est complet.  $\square$

## CHAPITRE III MODULES DIFFÉRENTIELS

### 6. Théorie algébrique

Ce paragraphe contient les bases algébriques de la théorie des équations différentielles ordinaires (linéaires). Il s’agit d’une version extrêmement simplifiée de la théorie des  $D$ -modules. Nous supposons que  $K$  est un corps de caractéristique nulle.

#### 6.1. Anneaux différentiels. —

**Définition 6.1.** — On appelle  $K$ -anneau différentiel, ou plus simplement *anneau différentiel*, une  $K$ -algèbre commutative intègre et unitaire  $A$  munie d’une application  $K$ -linéaire  $D$  telle que

- $D(ab) = D(a)b + aD(b)$  pour  $a$  et  $b$  dans  $A$ ,
- $D(a) = 0$  si et seulement si  $a$  est dans  $K$ .

On dit alors que  $D$  est une dérivation et que  $K$  est le corps des “constantes” de  $A$ . Il est immédiat de constater que, pour tout  $f \neq 0$  dans  $A$ , l’application  $fD$  est aussi une dérivation de  $A$ .

Si l’anneau est un corps, on parlera de *corps différentiel*. Si  $A$  est un anneau différentiel, la dérivation  $D$  se prolonge, de manière unique, au corps des fractions  $F$  de l’anneau  $A$ , faisant de celui-ci un corps différentiel.

On supposera en outre que l’anneau  $A$  contient un élément  $x$  tel que  $D(x) = 1$ , ce qui revient à dire que  $D = \frac{d}{dx}$ . Il sera souvent plus naturel de travailler avec la dérivation  $xD = \frac{xd}{dx}$ . Pour éviter les confusions, dans tous les cas où l’élément  $x$  est défini sans ambiguïté

nous réserverons le symbole  $D$  pour la dérivation  $\frac{d}{dx}$ .

**Exemple 6.2.** — L’exemple de base est celui du corps  $K(x)$  muni de la dérivation  $D = \frac{d}{dx}$ . En fait on travaillera avec des sous- $K$ -algèbres de complétés de  $K(x)$  pour différentes valuations et on les munira de la dérivation  $D = \frac{d}{dx}$  (celle-ci se prolongeant “par continuité”).

Par exemple le  $K$ -anneau différentiel  $K[[x]]$  (des séries formelles à coefficients dans le corps  $K$ ) est un sous-anneau différentiel du complété  $K((x))$  de  $K(x)$  pour la valuation  $x$ -adique.

**Définition 6.3.** — Si  $A$  est un anneau différentiel muni de la dérivation  $D$ , on notera  $A\langle D \rangle$  l'anneau non commutatif des *polynômes différentiels* qui est égal à  $A[D]$  en tant que  $A$ -module mais dont le produit se déduit de la règle  $Da = D(a) + aD$  pour  $a$  dans  $A$ .

L'exercice suivant montre, en particulier, que  $A\langle x \frac{d}{dx} \rangle$  est le sous- $A$ -module de  $A\langle \frac{d}{dx} \rangle$  engendré par les  $x^s \left(\frac{d}{dx}\right)^s$ .

**Exercice 6.4.** — Soit  $x$  un élément de  $A$  tel que  $D(x) = 1$ . Montrer que les nombres  $c_{s,i}$  et  $d_{s,i}$  définis par :

$$c_{s,i} = \sum_{j=1}^i \frac{(-1)^{i+j} j^s}{(i-j)! j!} \quad , \quad d_{s,i} = (-1)^{s+i} \sum_{1 \leq n_1 < \dots < n_{s-i} < s} n_1 \cdots n_{s-i}$$

sont des entiers naturels et vérifient les relations :

$$(x D)^s = \sum_{i=1}^s c_{s,i} x^i D^i \quad , \quad x^s D^s = \sum_{i=1}^s d_{s,i} (x D)^i \quad .$$

[ Avec la convention  $d_{s,s+1} = d_{s,0} = c_{s,s+1} = c_{s,0} = 0$  , on établira les formules de récurrence :  $c_{s+1,i} = i c_{s,i} + c_{s,i-1}$  ,  $d_{s+1,i} = -s d_{s,i} + d_{s,i-1}$  ]

**Lemme 6.5.** — Soit  $F$  un corps différentiel. Des éléments  $a_0, \dots, a_\mu$  de  $F$  sont linéairement indépendants sur le corps des constantes  $\Omega$  de  $F$  si et seulement si leur wronskien  $w(a_0, \dots, a_\mu) = \det \left( D^i(a_j) \right)_{0 \leq i, j \leq \mu}$  est non nul.

*Preuve.* — Si les éléments  $a_0, \dots, a_\mu$  ne sont pas linéairement indépendants, leur wronskien est clairement nul.

Supposons donc  $w(a_0, \dots, a_\mu) = 0$ . Il existe donc des coefficients  $c_j$  dans  $F$  tels que

$$(16) \quad \sum_{j=0}^{\mu} c_j D^i(a_j) = 0 \quad (0 \leq i \leq \mu).$$

Quitte éventuellement à diminuer le nombre  $\mu$  et à changer l'ordre des  $a_j$ , on peut supposer que le wronskien  $w(a_0, \dots, a_{\mu-1})$  est non nul. Dans ces conditions,  $c_\mu$  est non nul et on peut le prendre égal à 1. On applique  $D$  à chacune des équations de (16), sauf la dernière, et on lui retranche l'équation suivante. Il vient :

$$\sum_{j=0}^{\mu-1} D(c_j) D^i(a_j) = 0 \quad (0 \leq i \leq \mu - 1)$$

car  $D(c_\mu) = 0$ . Comme  $w(a_0, \dots, a_{\mu-1}) \neq 0$ , ce système est de Cramer et  $D(c_j) = 0$  pour  $0 \leq j \leq \mu - 1$ . On a bien démontré que l'on pouvait prendre les coefficients  $c_j$  ( $0 \leq j \leq \mu - 1$ ) dans le corps des constantes.  $\square$

**Définition 6.6.** — Si  $A$  est un anneau, on notera  $\text{Mat}(\mu, A)$  l'ensemble des matrices  $\mu \times \mu$  à coefficients dans  $A$ ,  $\text{Gl}(\mu, A)$  le groupe des matrices inversibles de  $\text{Mat}(\mu, A)$  et  $\text{diag}(\mu, A)$  le groupe des matrices diagonales de  $\text{Mat}(\mu, A)$ .

**Lemme 6.7.** — Soit  $A$  un anneau différentiel et soit  $G$  et  $X$  des matrices de  $\text{Mat}(\mu, A)$  telles que  $D(X) = GX$ . Alors le déterminant  $w$  de la matrice  $X$  vérifie la relation  $D(w) = \text{tr}(G)w$ .

*Preuve.* — Notons  $W_{ij}$  les cofacteurs de la matrice  $X$  de telle sorte que l'on a :

$$\sum_{j=1}^{\mu} X_{kj}, W_{ij} = \begin{cases} \det(X) = w & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases}$$

Pour calculer la dérivée du déterminant de la matrice  $X$ , on fait la somme des déterminants obtenus en dérivant chacune des lignes cette matrice :

$$D(w) = \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{\mu} D(X_{ij}) W_{ij}$$

Maintenant par hypothèse on a  $D(X_{ij}) = \sum_{k=1}^{\mu} G_{ik} X_{kj}$ , et on obtient :

$$\begin{aligned} D(w) &= \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{\mu} \sum_{k=1}^{\mu} G_{ik} X_{kj} W_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{k=1}^{\mu} G_{ik} \sum_{j=1}^{\mu} X_{kj} W_{ij} = \sum_{i=1}^{\mu} G_{ii} w \end{aligned} \quad \square$$

**6.2. Modules différentiels.** — Soit  $A$  un  $K$ -anneau différentiel.

**Définition 6.8.** — On note  $\text{MLC}(A)$  la catégorie dont

- les objets sont les  $A$ -modules *libres de type fini*  $\mathcal{M}$  munis d'une action  $K$ -linéaire de  $D$  vérifiant, pour  $a$  dans  $A$  et  $m$  dans  $\mathcal{M}$ , la relation

$$D(am) = D(a)m + aD(m),$$

- les morphismes sont les  $A$ -homomorphismes commutant avec l'action de  $D$ .

Les objets de la catégorie  $\text{MLC}(A)$  seront appelés  $A$ -modules différentiels. Le rang d'un  $A$ -module différentiel sera son rang en tant que  $A$ -module.

Par définition de l'anneau  $A\langle D \rangle$ , les  $A$ -modules différentiels sont des  $A\langle D \rangle$ -modules à gauche et l'ensemble des morphismes entre deux  $A$ -modules différentiels est l'ensemble de leurs  $A\langle D \rangle$ -homomorphismes. On résume cette situation en disant que la catégorie  $\text{MLC}(A)$  est une sous-catégorie *pleine* de la catégorie des  $A\langle D \rangle$ -modules à gauche.

**Exemple 6.9.** — Soit  $L$  un polynôme différentiel de  $A\langle D \rangle$  de degré  $\mu$  et dont le coefficient du terme  $D^\mu$  est une unité de  $A$ . Le  $A$ -module quotient  $A\langle D \rangle / A\langle D \rangle L$  est un  $A$ -module différentiel dont une base (en tant que  $A$ -module) est  $\{1, D, \dots, D^{\mu-1}\}$ . Par exemple l'anneau  $A$  lui-même, muni de l'action naturelle de la dérivation  $D$ , est un  $A$ -module différentiel isomorphe à  $A\langle D \rangle / A\langle D \rangle D$ .

**Remarque 6.10.** — Si  $A$  est un corps ou un anneau principal, tout sous-module d'un  $A$ -module libre de type fini est libre de type fini. Donc tout sous- $A$ -module d'un  $A$ -module différentiel qui est stable par l'action de  $D$  est un  $A$ -module différentiel.

D'après la remarque 6.10, les sous- $A\langle D \rangle$ -modules différentiels du  $A\langle D \rangle$ -module différentiel  $A$  sont les idéaux de type fini de  $A$  qui sont stables par la dérivation  $D$ . L'exercice suivant montre qu'ils dépendent de la dérivation choisie.

**Exercice 6.11.** — Montrer que les seuls idéaux de  $A = K[x]$  ou  $A = K[[x]]$  stables par la dérivation  $D = \frac{d}{dx}$  sont 0 et  $A$  et que chaque idéal  $x^n A$  de  $A = K[[x]]$  est stable par la dérivation  $xD = x \frac{d}{dx}$ .

Dans cet exercice, l'anneau  $A$  est principal et tous les idéaux sont principaux. Lorsque  $A$  n'est pas principal, la situation peut être encore plus compliquée.

**Exemple 6.12.** — Pour simplifier, supposons que le corps  $K$  n'est pas à valuation discrète et soit  $(a_n)_{n \geq 1}$  une suite de  $K$  telle que la suite  $|a_n|$  soit croissante et tende vers 1. D'après la proposition 4.45, il existe une fonction  $f$  de l'anneau  $A = \mathcal{A}([0, 1[)$  telle que  $\text{div}(f) = \sum na_n$ . L'idéal  $\mathcal{I} = \{ \sum_{\text{finie}} b_i D^i(f); b_i \in A \}$  engendré par  $f$  et ses dérivées est, par construction, stable par  $D$ . Mais  $D^n(f)$  n'ayant pas de zéro au point  $a_n$  n'est pas dans l'idéal engendré par les  $D^i(f)$  pour  $i < n$ . Donc l'idéal  $\mathcal{I}$  n'est pas de type fini et ce n'est pas un  $A$ -module différentiel.

**6.3. Matrices de dérivation.** — Soit  $\mathcal{M}$  un  $A$ -module différentiel et soit  $\epsilon$  une base (sur  $A$ ) du  $A$ -module  $\mathcal{M}$ . L'action de  $D$  sur  $\mathcal{M}$  est représentée dans cette base par une matrice  $G$  de  $\text{Mat}(\mu, A)$  définie par

$$D(\epsilon_i) = \sum G_{ij} \epsilon_j$$

ce que nous écrivons  $D(\epsilon) = G \epsilon$  (avec les conventions habituelles, la matrice  $G$  est en fait la transposée de la matrice de l'endomorphisme  $D$  dans la base  $\epsilon$ ).

**Exemple 6.13.** — Soit  $L = D^\mu + a_{\mu-1}D^{\mu-1} + \dots + a_0$  un polynôme différentiel de  $A\langle D \rangle$ . La dérivation du  $A$ -module quotient  $A\langle D \rangle / A\langle D \rangle L$  est représentée dans la base  $\{1, D, \dots, D^{\mu-1}\}$  par la matrice :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 1 \\ a_0 & a_1 & & \cdots & a_{\mu-1} \end{pmatrix}$$

Plus généralement, pour  $s \geq 0$ , l'action de l'opérateur  $D^s$  est représentée dans la base  $\epsilon$  par une matrice  $G_s$  de  $\text{Mat}(\mu, A)$  définie par  $D^s(\epsilon) = G_s \epsilon$ . Ces matrices satisfont la formule de récurrence

$$(17) \quad G_0 = \mathbf{I} \quad G_{s+1} = D(G_s) + G_s G$$

où  $\mathbf{I}$  désigne la matrice identité de  $\text{Mat}(\mu, A)$  et  $D(G)$  la matrice obtenue en dérivant la matrice  $G$  terme à terme.

Maintenant, si  $m$  est un élément de  $\mathcal{M}$  et si on note  $[m]$  le vecteur ligne de ses composantes dans la base  $\mathfrak{e}$ , de sorte que  $m = [m] \mathfrak{e}$ , on trouve  $D(m) = D([m]) \mathfrak{e} + [m] G \mathfrak{e}$  c'est-à-dire

$$(18) \quad [D(m)] = D([m]) + [m] G$$

**6.4. Homomorphismes intérieurs.** — Pour deux  $A$ -modules différentiels  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$ , et pour  $u$  dans  $\text{Hom}_A(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  et  $m$  dans  $\mathcal{M}$ , on pose

$$(19) \quad D(u)(m) = D(u(m)) - u(D(m)).$$

On munit ainsi le  $A$ -module (libre de type fini)  $\text{Hom}_A(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  d'une structure de  $A$ -module différentiel.

Les applications linéaires  $u$  de  $\text{Hom}_A(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  dont la dérivée  $D(u)$  est nulle sont celles qui commutent avec  $D$  c'est-à-dire celles qui appartiennent à  $\text{Hom}_{A\langle D \rangle}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  et qui sont donc des morphismes de la catégorie  $\text{MLC}(A)$ . Elles sont dites *horizontales*.

Dans la situation précédente, soit  $\mathfrak{e}$  (resp.  $\mathfrak{f}$ ) une base de  $\mathcal{M}$  (resp.  $\mathcal{N}$ ) et notons  $G$  (resp.  $F$ ) la matrice qui représente la dérivation  $D$  dans cette base. Soit  $H$  la matrice définie par

$$u(\mathfrak{e}) = H\mathfrak{f}.$$

On dira que c'est la matrice qui représente l'application linéaire  $u$  dans les bases  $\mathfrak{e}$  et  $\mathfrak{f}$  (ici aussi c'est la transposée de la matrice utilisée dans les notations classiques). Alors, en notant  $\nabla(H)$  la matrice qui représente l'application linéaire  $D(u)$  dans les bases  $\mathfrak{e}$  et  $\mathfrak{f}$ , les relations 19 et 18 donnent :

$$\begin{aligned} [m]\nabla(H)\mathfrak{f} &= D(u)(m) = D([m]H\mathfrak{f}) - [D(m)]H\mathfrak{f} \\ &= D([m])H\mathfrak{f} + [m]D(H)\mathfrak{f} + [m]HF\mathfrak{f} - D([m])H\mathfrak{f} - [m]GH\mathfrak{f} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(20) \quad \nabla(H) = D(H) + HF - GH.$$

L'application linéaire  $u$  est donc horizontale si et seulement si

$$(21) \quad D(H) = GH - HF.$$

En particulier, si l'application linéaire  $u$  est inversible, donc en particulier si les modules différentiels  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  ont la même dimension  $\mu$ , la matrice  $H$  appartient à  $\text{Gl}(\mu, A)$  et la dérivation  $D$  est représentée dans la base  $\mathfrak{f} = H^{-1}\mathfrak{e}$  par la matrice :

$$F = H^{-1}(GH - D(H))$$

**6.5. Bases cycliques.** — Une question naturelle est de savoir si tout module différentiel  $\mathcal{M}$  est isomorphe à un module différentiel de l'exemple 6.9. En termes simples cela revient à se demander si un système différentiel est équivalent à une équation différentielle (écrire une équation différentielle sous forme d'un système est un problème déjà classique au niveau du DEUG et n'est rien autre que l'exemple 6.13).

Le problème est de trouver une "base cyclique" c'est-à-dire de la forme

$$\{m, D(m), \dots, D^{\mu-1}(m)\}$$

pour un élément  $m$  du module différentiel  $M$  (image de 1 dans l'isomorphisme entre  $A\langle D\rangle/A\langle D\rangle L$  et  $\mathcal{M}$ ). C'est le but du théorème du vecteur cyclique. Malheureusement celui-ci n'est vrai que si  $A$  est un corps.

**Théorème 6.14 (du vecteur cyclique).** — Soit  $F$  un corps différentiel et  $x$  un élément de  $F$  tel que  $D(x) = 1$ . Tout  $F$ -module différentiel  $\mathcal{M}$  de rang  $\mu$  a une base  $\mathfrak{m}$  de la forme  $\{m, D(m), \dots, D^{\mu-1}(m)\}$ .

*Preuve.* — Soit  $\mathfrak{e} = \{\mathfrak{e}_1, \dots, \mathfrak{e}_\mu\}$  une base de  $M$  et  $\alpha$  un nombre du corps  $K$  que nous fixerons plus tard. On considère les éléments suivants de  $\mathcal{M}$  :

$$m_i = \sum_{k=0}^{\mu} \frac{(\alpha - x)^k}{k!} D^k(\mathfrak{e}_i) \quad (1 \leq i \leq \mu) \quad \text{et} \quad m = \sum_{i=1}^{\mu} \frac{(x - \alpha)^{i-1}}{(i-1)!} m_i.$$

Il vient

$$D(m_i) = \sum_{k=1}^{\mu} -\frac{(\alpha - x)^{k-1}}{(k-1)!} D^k(\mathfrak{e}_i) + \sum_{k=0}^{\mu} \frac{(\alpha - x)^k}{k!} D^{k+1}(\mathfrak{e}_i) = \frac{(\alpha - x)^\mu}{\mu!} D^{\mu+1}(\mathfrak{e}_i)$$

On fait maintenant les calculs modulo  $(x - \alpha)$ . On trouve :

$$m_i \equiv \mathfrak{e}_i \quad D^k(m_i) \equiv 0 \quad (\text{pour } 1 \leq k < \mu)$$

d'où déduit  $D^k(m) \equiv m_{k+1}$  pour  $1 \leq k < \mu$  soit :

$$m \wedge D(m) \wedge \dots \wedge D^{\mu-1}(m) \equiv \mathfrak{e}_1 \wedge \dots \wedge \mathfrak{e}_\mu \neq 0.$$

Autrement dit, on a montré que

$$m \wedge D(m) \wedge \dots \wedge D^{\mu-1}(m) = [1 + (x - \alpha)w_1 + \dots + (x - \alpha)^n w_n] \mathfrak{e}_1 \wedge \dots \wedge \mathfrak{e}_\mu$$

où les  $w_i$  appartiennent à  $F$  et où  $n$  est un entier qu'il n'est pas difficile de majorer. La non nullité du déterminant de Vandermonde montre que  $1 + (x - \alpha)w_1 + \dots + (x - \alpha)^n w_n$  ne peut pas être nul pour  $n + 1$  valeurs distinctes du paramètre  $\alpha$ . Comme le corps  $K$  est infini, car de caractéristique nulle, on peut choisir  $\alpha$  dans  $K$  de telle sorte que  $m \wedge D(m) \wedge \dots \wedge D^{\mu-1}(m)$  soit non nul. Comme  $F$  est un corps, il en résulte que  $\{m, D(m), \dots, D^{\mu-1}(m)\}$  est une base.  $\square$

**6.6. Noyau et conoyau.** — A la base  $\mathfrak{e}$  du  $A$ -module différentiel  $\mathcal{M}$ , correspond la *présentation* suivante dans la catégorie des  $A\langle D\rangle$ -modules :

$$(22) \quad 0 \longrightarrow A\langle D\rangle^\mu \xrightarrow{\bullet(D-G)} A\langle D\rangle^\mu \xrightarrow{\delta} \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

où  $\bullet(D - G)$  est la multiplication à droite par la matrice  $D\mathbf{I} - G$ . Plus précisément, on considère les éléments  $P = (P_1, \dots, P_\mu)$  de  $A\langle D\rangle^\mu$  comme des matrices ligne et on pose

$$\delta(P) = P\mathfrak{e} = \sum_{i=1}^{\mu} P_i(\mathfrak{e}_i)$$

$$\bullet(D - G)(P) = P(D - G) = (P_1, \dots, P_\mu)(D - G) = (\dots, P_j D - \sum_i P_i G_{ij}, \dots).$$

Si  $P$  est non nul et de degré  $d$ , alors  $PD^{(6)}$  est de degré  $d+1$  et  $PG$  est de degré au plus  $d$  et donc  $P(D-G)$  est de degré  $d+1$  donc non nul. L'application  $\bullet(D-G)$  est bien injective.

Par définition de l'action de  $D$  sur  $\mathcal{M}$ , on trouve  $\delta \circ \bullet(D-G)(P) = P(D-G)\epsilon = P(D\epsilon - G\epsilon) = 0$ . Donc l'image de  $\bullet(D-G)$  est contenue dans le noyau de  $\delta$ .

Soit  $s \geq 0$  et soit  $G_s$  la matrice définie par la relation (17). Vérifions qu'il existe une matrice  $Q_s$  dans  $\text{Mat}(\mu, A\langle D \rangle)$  telle que  $D^s \mathbf{I} = G_s + Q_s(D\mathbf{I} - G)$ . C'est évident pour  $s=0$  avec  $Q_s=0$  et, si c'est vrai pour  $s$ , alors

$$\begin{aligned} D^{s+1} \mathbf{I} &= DG_s + DQ_s(D\mathbf{I} - G) = D(G_s) + G_s D + DQ_s(D\mathbf{I} - G) \\ &= G_{s+1} + (G_s + DR_s)(D\mathbf{I} - G). \end{aligned}$$

Soit maintenant  $P$  dans le noyau de  $\delta$  c'est-à-dire tel que  $P\epsilon = 0$ . On peut écrire  $P = \sum_s a_s D^s \mathbf{I}$  avec  $a_s$  dans  $A^\mu$ . Il vient  $P = b + Q(D\mathbf{I} - G)$  avec  $b = \sum a_s G_s$  dans  $A^\mu$  et  $Q = \sum a_s Q_s$  dans  $A\langle D \rangle^\mu$ . On trouve  $b\epsilon = P\epsilon = 0$ . Mais comme  $\epsilon$  est une base d'un  $A$ -module libre, cela implique  $b = (0, 0, \dots)$  et  $P = Q(D\mathbf{I} - G)$ . Autrement dit,  $P$  appartient à l'image de  $\bullet(D-G)$ .

Finalement, comme  $A\langle D \rangle^\mu$  contient  $A^\mu$ , l'application  $\delta$  est clairement surjective.

Soit  $N$  un  $A\langle D \rangle$ -module à gauche quelconque. La suite exacte courte (22) donne lieu à la suite exacte longue (de  $K$ -espaces vectoriels) :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Hom}_{A\langle D \rangle}(\mathcal{M}, N) \longrightarrow \text{Hom}_{A\langle D \rangle}(A\langle D \rangle^\mu, N) \xrightarrow{\theta} \text{Hom}_{A\langle D \rangle}(A\langle D \rangle^\mu, N) \\ \longrightarrow \text{Ext}_{A\langle D \rangle}^1(\mathcal{M}, N) \longrightarrow \text{Ext}_{A\langle D \rangle}^1(A\langle D \rangle^\mu, N) \end{aligned}$$

Comme  $A\langle D \rangle^\mu$  est un  $A\langle D \rangle$ -module libre, on a  $\text{Ext}_{A\langle D \rangle}^1(A\langle D \rangle^\mu, N) = 0$ .

Par ailleurs, un homomorphisme  $h$  de  $A\langle D \rangle^\mu$  dans  $N$  est entièrement déterminé par les images  $h(e)$  de la base canonique et on a  $h(P) = Ph(e)$ . Donc

$\text{Hom}_{A\langle D \rangle}(A\langle D \rangle^\mu, N) = N^\mu$ . Maintenant, l'application  $\theta$  est donnée par la composition :

$$\theta(h)(P) = h \circ \bullet(D-G)(P) = h(PD - PG) = (PD - PG).h(e) = P.(D-G)h(e)$$

si bien que la suite exacte ci-dessus s'écrit :

$$(23) \quad 0 \longrightarrow \text{Hom}_{A\langle D \rangle}(\mathcal{M}, N) \longrightarrow N^\mu \xrightarrow{(D-G)\bullet} N^\mu \longrightarrow \text{Ext}_{A\langle D \rangle}^1(\mathcal{M}, N) \longrightarrow 0$$

où  $(D-G)\bullet$  représente l'action à gauche de l'opérateur  $D-G$  (l'opérateur  $D$  agissant composante par composante). Autrement dit, on a

$$(24) \quad \text{Hom}_{A\langle D \rangle}(\mathcal{M}, N) = \ker(D-G, N^\mu)$$

$$(25) \quad \text{Ext}_{A\langle D \rangle}^1(\mathcal{M}, N) = \text{coker}(D-G, N^\mu)$$

En termes concrets, ce résultat dit que  $\text{Hom}_{A\langle D \rangle}(\mathcal{M}, N)$  est l'ensemble des vecteurs colonne  $X$  de  $N^\mu$  qui sont solutions du système différentiel  $D(X) = GX$  et que  $\text{Ext}_{A\langle D \rangle}^1(\mathcal{M}, N)$  "représente" l'ensemble des vecteurs colonne  $Y$  de  $N^\mu$  pour lesquels

<sup>(6)</sup>la notation  $DG$  (resp.  $GD$ ) signifie que l'on multiplie chaque coefficient de la matrice  $G$  à gauche (resp. à droite) par  $D$

le système différentiel (avec second membre)  $D(X) = GX + Y$  n'a pas de solution dans  $N^\mu$ .

**Exercice 6.15.** — Soit  $L$  un polynôme différentiel de  $A\langle D \rangle$  unitaire de degré  $\mu$ . On considère le module différentiel quotient  $\mathcal{M} = A\langle D \rangle / A\langle D \rangle L$ . Vérifier que la suite

$$(26) \quad 0 \longrightarrow A\langle D \rangle \xrightarrow{\bullet L} A\langle D \rangle \xrightarrow{\delta} \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

est exacte. En déduire que, pour tout module différentiel  $N$ , on a

$$\mathrm{Hom}_{A\langle D \rangle}(\mathcal{M}, N) = \ker(L, N) \quad \mathrm{Ext}_{A\langle D \rangle}^1(\mathcal{M}, N) = \mathrm{coker}(L, N).$$

Donner l'interprétation de ce résultat en terme d'équation différentielle.

**6.7. Solutions.** — On considère maintenant une algèbre  $B$  intègre qui contient  $A$  et à laquelle la dérivation  $D$  se prolonge. On supposera en outre que l'ensemble des constantes de  $B$  est un corps  $\Omega$  (extension du corps  $K$ ).

Si  $\mathcal{M}$  est un  $A$ -module différentiel, une base de  $\mathcal{M}$  est aussi une base du  $B$ -module  $B \otimes_A \mathcal{M}$ . Ce dernier est donc un  $B$ -module différentiel si on le munit de l'action de  $D$  définie par

$$D(b \otimes m) = D(b) \otimes m + b \otimes D(m)$$

On trouve alors pour  $i \geq 0$  et pour un  $B\langle D \rangle$ -module différentiel  $N$  (qui est donc aussi un  $A\langle D \rangle$ -module différentiel) :

$$(27) \quad \mathrm{Ext}_{B\langle D \rangle}^i(B \otimes_A \mathcal{M}, N) = \mathrm{Ext}_{A\langle D \rangle}^i(\mathcal{M}, N).$$

En fait ces espaces sont nuls pour  $i \geq 2$  et les égalités précédentes sont des conséquences, par exemple, des formules (24) et (25). Commençons par le cas  $i = 0$ , le cas  $i = 1$  sera abordé dans le paragraphe suivant.

**Définition 6.16.** — Les éléments de  $\mathrm{Hom}_{A\langle D \rangle}(\mathcal{M}, B)$  s'appellent *solutions de  $\mathcal{M}$  dans  $B$* . Il est facile de voir que l'ensemble des solutions  $\mathrm{Hom}_{A\langle D \rangle}(\mathcal{M}, B)$  est un  $\Omega$ -espace vectoriel.

**Remarque 6.17.** — Si  $s$  est une solution de  $\mathcal{M}$  dans  $B$  et si  $\epsilon$  est une base de  $\mathcal{M}$ , on a  $D(s(\epsilon)) = G s(\epsilon)$  où  $G$  est la matrice qui représente la dérivation  $D$  dans la base  $\epsilon$ . Dans le cas où  $\mathcal{M} = A\langle D \rangle / A\langle D \rangle L$ , si  $m$  est un vecteur cyclique de  $\mathcal{M}$ , on a aussi  $L(s(m)) = 0$ . Ces deux remarques justifient la terminologie.

**Proposition 6.18.** — On a  $\dim_\Omega(\mathrm{Hom}_{A\langle D \rangle}(\mathcal{M}, B)) \leq \mathrm{rg}_A(\mathcal{M})$ .

*Preuve.* — Soit  $F$  le corps des fractions de l'algèbre intègre  $B$ . C'est un corps différentiel de corps des constantes  $\Omega$  et la formule  $s(b \otimes m) = b s(m)$  permet de prolonger toute application horizontale  $s$  de  $\mathrm{Hom}_{A\langle D \rangle}(\mathcal{M}, B)$  en une application horizontale de  $\mathrm{Hom}_{A\langle D \rangle}(F \otimes_A \mathcal{M}, F)$ . Il suffit donc de montrer que

$$\dim_\Omega(\mathrm{Hom}_{F\langle D \rangle}(F \otimes_A \mathcal{M}, F)) \leq \mathrm{rg}_A(\mathcal{M}) = \mu.$$

Comme  $\mathcal{M}_F = F \otimes_A \mathcal{M}$  est un  $F$ -module différentiel de dimension  $\mu$ , d'après le théorème du vecteur cyclique, il a une base de la forme  $\{m, D(m), \dots, D^{\mu-1}(m)\}$ . En

particulier on a  $D^\mu(m) = \sum_{i=0}^{\mu-1} a_i D^i(m)$  avec des coefficients  $a_i$  dans  $F$ . Pour toute solution  $s$  de  $\mathcal{M}_F$  dans  $F$ , on trouve

$$D^\mu(s(m)) = \sum_{i=0}^{\mu-1} a_i D^i(s(m)).$$

Pour  $\mu + 1$  solutions  $s_0, \dots, s_\mu$  de  $\mathcal{M}_F$  dans  $F$  on a :

$$w(s_0(m), \dots, s_\mu(m)) = \det \left( D^i(s_j(m)) \right)_{0 \leq i, j \leq \mu} = 0.$$

D'après le lemme 6.5, il existe des constantes  $\alpha_j$  dans  $\Omega$  telles que  $\sum_{j=0}^{\mu} \alpha_j s_j(m) = 0$ . Si  $n$  est un élément quelconque de  $\mathcal{M}_F$ , il s'écrit  $n = \sum_{i=0}^{\mu-1} b_i D^i(m)$  et il vient :

$$\sum_{j=0}^{\mu} \alpha_j s_j(n) = \sum_{j=0}^{\mu} \alpha_j \sum_{i=0}^{\mu-1} b_i D^i(s_j(m)) = \sum_{i=0}^{\mu-1} b_i D^i \left( \sum_{j=0}^{\mu} \alpha_j s_j(m) \right) = 0,$$

c'est-à-dire  $\sum_{i=0}^{\mu} \alpha_j s_j = 0$  et les solutions n'étaient pas linéairement indépendantes.  $\square$

**Définition 6.19.** — Lorsque l'inégalité de la proposition 6.18 est une égalité, on dit que le  $A$ -module différentiel  $\mathcal{M}$  est *soluble* dans  $B$ .

**Proposition 6.20.** — Soit  $\mathcal{M}$  un  $A$ -module différentiel de rang  $\mu$  et soit  $G$  la matrice qui représente la dérivation dans une base  $\mathfrak{e}$  de  $\mathcal{M}$ . Le module différentiel  $\mathcal{M}$  est soluble dans  $B$  si et seulement s'il existe une matrice  $X$  de  $\text{Mat}(\mu, B)$  et de déterminant non nul telle que  $D(X) = GX$ .

*Preuve.* — La matrice  $X$ , à coefficients dans  $B$ , est solution de l'équation différentielle  $DX = GX$  si et seulement si elle s'écrit  $X = (s_j(\mathfrak{e}_i))$  où les vecteurs colonne correspondent à une famille  $\{s_1, \dots, s_\nu\}$  de solutions de  $\text{Hom}_{A\langle D \rangle}(\mathcal{M}, B)$ . Pour que la matrice  $X$  ait un déterminant non nul, il faut et il suffit que  $\nu = \mu$  et que la famille  $\{s_1, \dots, s_\nu\}$  soit libre c'est-à-dire soit une  $\Omega$ -base de  $\text{Hom}_{A\langle D \rangle}(\mathcal{M}, B)$ .  $\square$

**Corollaire 6.21.** — Supposons que l'anneau  $B$  satisfait la condition

(28) les éléments  $w$  de  $B^{\neq 0}$  tels que  $D(w) = gw$  avec  $g$  dans  $A$  sont inversibles.

Soit  $\mathcal{M}$  un  $A$ -module différentiel de rang  $\mu$  et soit  $G$  la matrice qui représente la dérivation dans une base  $\mathfrak{e}$  de  $\mathcal{M}$ . Le module différentiel  $\mathcal{M}$  est soluble dans  $B$  si et seulement s'il existe une matrice  $X$  de  $\text{Gl}(\mu, B)$  telle que  $D(X) = GX$ .

*Preuve.* — C'est une conséquence facile de la proposition 6.20 et du corollaire 6.7.  $\square$

Dans tous les exemples que nous aurons à considérer, la condition (28) sera satisfaite et facile à vérifier.

**Exercice 6.22.** — Dans le cas  $A = \mathbb{R}(x)$ ,  $B = A[x^{\sqrt{2}}]$  et  $w = x^{\sqrt{2}}$ , vérifier que la condition (28) n'est pas satisfaite.

**Proposition 6.23.** — Soit  $0 \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow 0$  une suite exacte de  $A$ -modules différentiels. Le module différentiel  $\mathcal{M}$  est soluble dans  $B$  si et seulement s'il en est ainsi de  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{Q}$ . Dans ce cas on a

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A\langle D \rangle}(\mathcal{Q}, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A\langle D \rangle}(\mathcal{M}, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A\langle D \rangle}(\mathcal{N}, B) \longrightarrow 0$$

*Preuve.* — On a toujours une suite exacte de  $\Omega$ -espaces vectoriels :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A\langle D \rangle}(\mathcal{Q}, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A\langle D \rangle}(\mathcal{M}, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A\langle D \rangle}(\mathcal{N}, B)$$

(où les flèches sont définies par composition). D'après la proposition 6.18,  $\mathcal{M}$  est soluble dans  $B$  si et seulement si on a

$$\begin{aligned} \dim_A \mathcal{N} + \dim_A \mathcal{Q} &= \dim_A \mathcal{M} = \dim_{\Omega} \mathrm{Hom}_{A\langle D \rangle}(\mathcal{M}, B) \\ &\leq \dim_{\Omega} \mathrm{Hom}_{A\langle D \rangle}(\mathcal{N}, B) + \dim_{\Omega} \mathrm{Hom}_{A\langle D \rangle}(\mathcal{Q}, B) \\ &\leq \dim_A \mathcal{N} + \dim_A \mathcal{Q}, \end{aligned}$$

et alors les inégalités sont obligatoirement des égalités.  $\square$

**6.8. Indice.** — On dit que  $\mathcal{M}$  a un *indice* dans  $B$  si  $\mathrm{Ext}_{A\langle D \rangle}^1(\mathcal{M}, B)$  est un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie. Dans ces conditions, on pose :

$$\chi(\mathcal{M}, B) = \dim(\mathrm{Hom}_{A\langle D \rangle}(\mathcal{M}, B)) - \dim(\mathrm{Ext}_{A\langle D \rangle}^1(\mathcal{M}, B))$$

Les relations (24) et (25) montrent que

$$\chi(\mathcal{M}, B) = \dim_{\Omega}(\ker(D - G, B^{\mu})) - \dim_{\Omega}(\mathrm{coker}(D - G, B^{\mu})) = \chi(D - G, B^{\mu}).$$

De même (voir exercice 6.15), pour  $L$  dans  $A\langle D \rangle$  unitaire, on vérifie que

$$\chi(A\langle D \rangle/A\langle D \rangle L, B) = \dim(\ker(L, B)) - \dim(\mathrm{coker}(L, B)) = \chi(L, B).$$

Si le module différentiel  $\mathcal{M}$  est soluble dans  $B$ , l'existence d'un indice et sa nullité sont des conséquences de la méthode de variation des constantes.

**Proposition 6.24.** — Soit  $\mathcal{M}$  un  $A$ -module différentiel soluble dans  $B$ . Si

1. l'application  $D$  est surjective sur  $B$ ,
2. l'anneau  $B$  vérifie la condition (28),

alors  $\mathrm{Ext}_{A\langle D \rangle}^1(\mathcal{M}, B) = 0$ .

*Preuve.* — Soit  $G$  la matrice qui représente la dérivation dans une base de  $\mathcal{M}$ . Comme  $\mathcal{M}$  est soluble dans  $B$ , il existe, d'après le corollaire 6.21 une matrice  $X$  de  $\mathrm{Gl}(\mu, B)$  telle que  $D(X) = GX$ .

Si  $Y$  est n'importe quel vecteur colonne à coefficients dans  $B$ , d'après l'hypothèse 1), il existe un vecteur colonne  $Z$  à coefficients dans  $B$  tel que  $D(Z) = X^{-1}Y$  et alors

$$D(XZ) = GXZ + XX^{-1}Y = GXZ + Y.$$

Donc  $\mathrm{coker}(D - G, B^{\mu}) = 0$  ce qui permet de conclure en utilisant la relation (25).  $\square$

**Exercice 6.25.** — Soit  $A = K((x))$ . Vérifier que  $\chi(A, A) = 0$  où  $A$  est considéré comme un  $A\langle D \rangle$ -module pour l'action naturelle de  $D = \frac{d}{dx}$ .

**6.9. Images directes et inverses.** — Nous étudions le comportement des modules différentiels par changement de variable.

**Définition 6.26.** — Soit  $A$  et  $B$  deux anneaux différentiels. Un *changement de variable* (de  $A$  dans  $B$ ) est un morphisme d'anneaux  $\tau: A \rightarrow B$  pour lequel il existe un élément  $\tau'$  de  $B$  satisfaisant la relation

$$(29) \quad D(\tau(a)) = \tau' \tau(D(a)).$$

L'ensemble des changements de variable est stable par composition. On laisse au lecteur le soin de donner un énoncé précis de ce fait.

**Exemple 6.27.** — Soit  $I \subset [0, \infty[$  un intervalle et soit  $\phi$  une fonction de  $\mathcal{A}(I)^*$ . D'après le corollaire 2.28, il existe un entier  $d$  et un nombre  $\lambda$  de  $K$  tels que, pour  $x$  dans  $\mathcal{C}(I)$ , on ait  $|\phi(x) - \lambda x^d| < |\lambda x^d|$  et en particulier  $|\phi(x)| = |\lambda| |x|^d$ . Légerement abusivement, on note  $\phi(I)$  l'image de l'intervalle  $I$  par l'application  $\rho \rightarrow |\lambda| \rho^d$ . C'est évidemment un intervalle éventuellement réduit à un point.

Il est facile de vérifier que l'application  $\phi^*$ , définie par  $\phi^*(f) \stackrel{\text{déf}}{=} f \circ \phi$ , est un morphisme de  $\mathcal{A}(\phi(I))$  dans  $\mathcal{A}(I)$  et que l'on a  $D(\phi^*(f)) = D(\phi) \phi^*(D(f))$ . Autrement dit  $\phi^*$  est un changement de variable de  $\mathcal{A}(\phi(I))$  dans  $\mathcal{A}(I)$ .

**Exercice 6.28.** — Soit  $J \subset ]0, \infty[$  un intervalle fermé et soit  $\phi$  une fonction de  $\mathcal{A}(J)^*$ . On suppose que  $\phi(J)$  n'est pas réduit à un point. Montrer que  $\mathcal{A}(I)$  est un  $\phi^*(\mathcal{A}(\phi(I)))$ -module libre de base  $\{1, x, \dots, x^{|d|-1}\}$  (avec les notations de l'exemple 6.27).

[Montrer que  $k[x, 1/x]$  est un  $k[x^{|d|}, x^{-|d|}]$ -module libre de base  $\{1, x, \dots, x^{|d|-1}\}$  et conclure à l'aide de la relation  $\|\lambda^{-1} x^{-d} \phi(x) - 1\|_{\mathcal{C}(J)} < 1$ .]

**Exemple 6.29.** — Soit  $\sigma$  un endomorphisme continu du corps  $K$ . Si  $f = \sum a_s x^s$ , on pose  $f^\sigma = \sum \sigma(a_s) x^s$ . D'après le corollaire 1.4,  $\sigma$  est une isométrie. En particulier, si  $f$  appartient à  $\mathcal{A}(I)$ , il en est de même de  $f^\sigma$ . On pose  $\sigma^*(f) = f^\sigma$  et on constate que  $\sigma^*$  est un endomorphisme de  $\mathcal{A}(I)$  et que  $D(\sigma^*(f)) = \sigma^*(D(f))$ . Autrement dit  $\sigma^*$  est un changement de variable de  $\mathcal{A}(I)$  dans  $\mathcal{A}(I)$ .

Plus généralement, tout endomorphisme différentiel d'un anneau différentiel  $A$  est un changement de variable.

Soit  $\tau$  un changement de variable de  $A$  dans  $B$ .

**Définition 6.30 (image inverse).** — Soit  $\mathcal{M}$  un  $A\langle D \rangle$ -module. On note  $\mathcal{M}^\tau$  le  $\tau(A)$ -module obtenu par *transport de structure* (ensemble  $\{\tau(m); m \in \mathcal{M}\}$  muni de la structure de  $\tau(A)$ -module définie par  $\tau(a) \tau(m) + \tau(n) = \tau(am + n)$ ) et on pose

$$\tau^*(\mathcal{M}) \stackrel{\text{déf}}{=} B \otimes_{\tau(A)} \mathcal{M}^\tau.$$

La dérivation  $D$  agit sur le  $B$ -module  $\tau^*(\mathcal{M})$  par

$$D(b \otimes \tau(m)) = D(b) \otimes \tau(m) + \tau' b \otimes \tau(D(m))$$

(la relation (29) assure la compatibilité) faisant de celui-ci un  $B\langle D \rangle$ -module.

Si  $\mathcal{M}$  est un  $A$ -module différentiel et si  $\epsilon$  en est une base, notant  $G$  la matrice qui représente la dérivation  $D$  dans cette base, on constate que  $B$ -module  $\tau^*(\mathcal{M})$  a une base  $\tau(\epsilon)$  dans laquelle la dérivation est représentée par la matrice  $\tau' \tau(G)$ . En particulier,  $\tau^*(\mathcal{M})$  est un  $B$ -module différentiel de même rang que  $\mathcal{M}$ .

**Définition 6.31 (image directe).** — Soit  $\mathcal{M}$  un  $B\langle D \rangle$ -module. On suppose que  $\tau'$  est inversible dans  $B$  et on note  $\tau_*(\mathcal{M})$  le  $A$ -module obtenu par restriction des scalaires : c'est l'ensemble  $\{\tau^-(m) ; m \in \mathcal{M}\}$  muni d'une structure de  $A\langle D \rangle$ -module par les relations

$$a \tau^-(m) + \tau^-(n) = \tau^-(\tau(a)m + n) \quad , \quad D(\tau^-(m)) = \tau^-(\tau'^{-1} D(m)).$$

Si  $\mathcal{M}$  est un  $B$ -module différentiel de base  $\epsilon$  et si  $B$  est un  $\tau(A)$ -module libre de rang  $d$  et de base  $\{a_1, \dots, a_d\}$ , on vérifie facilement que la famille  $\{\tau^-(a_i \epsilon_j)\}$  est une base du  $A$ -module  $\tau_*(\mathcal{M})$  qui est donc un  $A$ -module différentiel de rang  $d$  fois celui de  $\mathcal{M}$ .

**Exercice 6.32.** — Soit  $\tau$  un changement de variable de  $A$  dans un  $\tau(A)$ -module libre  $B$  de base  $\{a_1, \dots, a_d\}$  pour lequel  $\tau'$  est inversible dans  $B$ .

1. Soit  $\mathcal{M}$  un  $A\langle D \rangle$ -module. Montrer que  $\tau_* \tau^*(\mathcal{M}) = \bigotimes_{i=1}^d a_i \mathcal{M}$ .
2. Soit  $\mathcal{M}$  un  $B\langle D \rangle$ -module. Montrer que  $\tau^* \tau_*(\mathcal{M}) = \bigotimes_{i=1}^d \mathcal{M}$ .

## 7. Modules différentiels sur un anneau valué

**7.1. Normes sur  $A\langle D \rangle$ .** — On suppose que le  $K$ -anneau différentiel  $A$  est muni d'une valeur absolue ultramétrique  $|\cdot|$  et on veut munir l'anneau  $A\langle D \rangle$  d'une norme (ultramétrique)  $\|\cdot\|$  de  $K$ -algèbre c'est-à-dire vérifiant, pour  $\alpha$  dans  $K$  et  $P$  et  $Q$  dans  $A\langle D \rangle$

$$(30) \quad \|P + Q\| \leq \max\{\|P\|, \|Q\|\} \quad , \quad \|\alpha P\| = |\alpha| \|P\| \quad , \quad \|PQ\| \leq \|P\| \|Q\|.$$

On la suppose normalisée par  $\|1\| = 1$ . Souvent, ce sera en fait une norme de  $A$ -algèbre c'est-à-dire que l'on aura aussi, pour  $a$  dans  $A$  et  $P$  dans  $A\langle D \rangle$

$$(30\text{-AA}) \quad \|aP\| = |a| \|P\|,$$

voire même une valeur absolue lorsque, pour  $P$  et  $Q$  dans  $A\langle D \rangle$ , on aura

$$(30\text{-VA}) \quad \|PQ\| = \|P\| \|Q\|.$$

La méthode la plus naturelle pour construire une telle norme consiste à considérer les éléments de  $A\langle D \rangle$  comme des opérateurs sur un anneau différentiel valué  $B$  dont  $A$  est un sous-anneau différentiel valué. On pose alors

$$\|P\|_{\text{op}, B} = \sup_{b \in B \neq 0} \frac{|P(b)|}{|b|}.$$

**Exercice 7.1.** — Pour  $r \leq \rho$ , on a l'inclusion  $E_\rho \subset \mathcal{B}_{t_\rho}(r)$  (définition 3.14).

Etant donné un polynôme  $\sum a_i D^i$  de  $E_\rho\langle D \rangle$  ( $D = d/dx$ ), montrer que

$$\left\| \sum a_i D^i \right\|_{\text{op}, \mathcal{B}_{t_\rho}(r)} = \max |i! a_i|_\rho r^{-i}$$

[voir proposition 3.4]. Vérifier que c'est une norme de  $E_\rho$ -algèbre mais pas une valeur absolue [utiliser  $D D^{p-1} = D^p$ ].

**Définition 7.2.** — Pour simplifier les notations, nous poserons

$$\left\| \sum a_i D^i \right\|_{\rho,r} \stackrel{\text{déf}}{=} \left\| \sum a_i D^i \right\|_{\text{op}, \mathcal{B}_{t_\rho}(r)} = \max |i! a_i|_\rho r^{-i}.$$

Cette norme sur  $E_\rho\langle D \rangle$  sera utilisée dans les paragraphes 14 et 22.1.

On peut aussi munir l'anneau  $A\langle D \rangle$  de la  $\gamma$ -norme de Gauss :

$$(31) \quad \left| \sum a_i D^i \right|_\gamma = \max |a_i| \gamma^i.$$

Si cette norme vérifie les conditions (30), on a  $|D a|_\gamma \leq |D|_\gamma |a| = \gamma |a| = |a D|_\gamma$  et

$$|D(a)| = |D(a)|_\gamma = |D a - a D|_\gamma \leq \max\{|D a|_\gamma, |a D|_\gamma\} = \gamma |a|$$

d'où  $\|D\|_{\text{op}, A} = \sup_{a \in A \neq 0} \frac{|D(a)|}{|a|} \leq \gamma$ . On se limitera donc au cas  $\gamma \geq \|D\|_{\text{op}, A}$  <sup>(7)</sup>. Sous

cette hypothèse, contrairement à la façon dont on la désigne, la norme de Gauss est en fait une valeur absolue (lemme 7.11). Elle permet d'étendre le lemme de Hensel aux polynômes différentiels (propositions 7.12 et 7.13).

**Exercice 7.3.** — Soit  $A \subset E_\rho$ , soit  $r' < r \leq \omega\rho$  et soit  $P$  dans  $A\langle D \rangle$ . Vérifier qu'il existe une constante  $\kappa$  telle que  $\omega^{-1}|P|_{\omega r^{-1}} \leq \|P\|_{\rho,r} \leq \kappa|P|_{\omega r'^{-1}}$ . [voir le lemme 1.6]

L'exercice 7.3 montre que, sur  $E_\rho\langle D \rangle$ , la  $\omega r^{-1}$ -norme de Gauss est proche de la norme  $\|\cdot\|_{\rho,r}$  (définition 7.2). Pour que la  $\omega r^{-1}$ -norme de Gauss soit une norme de  $K$ -algèbre, il faut que  $\omega r^{-1} \geq \rho^{-1}$  c'est-à-dire que  $r \leq \omega\rho$ .

**Remarque fondamentale 7.4.** — L'étude fine de l'action des opérateurs de  $E_\rho\langle D \rangle$  sur l'anneau  $\mathcal{B}_{t_\rho}(r)$  pour  $r \leq \rho$  est fondamentale dans la théorie des équations différentielles  $p$ -adiques.

Lorsque  $r > \omega\rho$ , on ne dispose pour cette étude que de la norme d'opérateur.

Par contre si  $r \leq \omega\rho$ , on a le choix entre la norme de Gauss et la norme d'opérateur. C'est le cas où le "rayon de convergence est petit" (voir corollaire 8.7). En général, la norme de Gauss est beaucoup plus facile à manipuler que la norme d'opérateur car c'est une valeur absolue. La raison profonde en est que, dans ce cas, la non-commutativité de  $A\langle D \rangle$  est "négligeable". Ceci va être parfaitement illustré par le lemme 7.5 mais sera aussi très clair dans le théorème 8.6.

Dans la théorie formelle, on a  $\omega = 1$  et on est toujours dans le deuxième cas, c'est-à-dire le plus facile.

<sup>(7)</sup>Le même raisonnement s'applique aussi à la norme  $\|\cdot\|_{\text{op}, B}$  mais la condition  $\|D\|_{\text{op}, B} \geq \|D\|_{\text{op}, A}$  est alors automatiquement vérifiée. Pour la norme  $\|\cdot\|_{\rho,r}$  elle s'écrit  $r \leq \rho$ .

Dans le lemme 7.5 on fait un même calcul dans  $A[X]$  ( $Xa = aX$ ) et dans  $A\langle D \rangle$  ( $Da = aD + D(a)$ ) et on compare les résultats. Ce lemme sera fondamental aussi bien dans la démonstration du théorème de Turrittin formel que du théorème de Turrittin  $p$ -adique.

**Lemme 7.5.** — Soit  $A$  un anneau différentiel muni d'une valeur absolue  $|\cdot|$ , soit  $\eta$  dans  $A$  tel que  $|\eta| > \|D\|_{\text{op},A}$  et soit  $L(X) = \sum a_i X^i$  un polynôme de  $A[X]$ . On pose

$$\begin{aligned} L(X + \eta) &= \sum a_i (X + \eta)^i = \sum b_i X^i \quad \text{dans } A[X], \\ L(D + \eta) &= \sum a_i (D + \eta)^i = \sum c_i D^i \quad \text{dans } A\langle D \rangle. \end{aligned}$$

Alors on a  $|b_i| |\eta|^i \leq |L|_{|\eta|}$  et  $|c_i - b_i| |\eta|^i < |L|_{|\eta|}$ . En particulier,  $|c_i| |\eta|^i \leq |L|_{|\eta|}$  et  $|c_0 - L(\eta)| < |L|_{|\eta|}$ .

*Preuve.* — Pour traiter le cas des monômes  $L(X) = X^d$ , posons

$$(D + \eta)^d = \sum_{i=0}^d c_{i,d} D^i, \quad (X + \eta)^d = \sum_{i=0}^d b_{i,d} X^i$$

et montrons par récurrence sur  $d$  que, pour  $0 \leq i \leq d$ , on a

$$(32) \quad |b_{i,d}| \leq |\eta|^{d-i}, \quad |c_{i,d} - b_{i,d}| < |\eta|^{d-i}.$$

Pour  $d = 0$ , c'est évident car  $b_{0,0} = c_{0,0} = 1$ . Supposant les majorations (32) satisfaites, on trouve :

$$\begin{aligned} (X + \eta)^{d+1} &= (X + \eta) \left( \sum_{i=0}^d b_{i,d} X^i \right) = \sum_{i=0}^d (b_{i,d} X + \eta b_{i,d}) X^i, \\ (D + \eta)^{d+1} &= (D + \eta) \left( \sum_{i=0}^d c_{i,d} D^i \right) = \sum_{i=0}^d (D(c_{i,d}) + c_{i,d} D + \eta c_{i,d}) D^i. \end{aligned}$$

Avec la convention  $b_{-1,d} = c_{-1,d} = 0$ , on obtient

$$b_{i,d+1} = b_{i-1,d} + \eta b_{i,d}, \quad c_{i,d+1} = D(c_{i,d}) + c_{i-1,d} + \eta c_{i,d}$$

ce qui donne les majorations à l'ordre  $d + 1$  :

$$\begin{aligned} |b_{i,d+1}| &\leq \max \{ |\eta|^{d-i+1}, |\eta| |\eta|^{d-i} \} = |\eta|^{d+1-i} \\ |c_{i,d+1} - b_{i,d+1}| &= |D(c_{i,d}) + c_{i-1,d} - b_{i-1,d} + \eta(c_{i,d} - b_{i,d})| \\ &\leq \max \{ \|D\|_{\text{op},A} |\eta|^{d-i}, |c_{i-1,d} - b_{i-1,d}|, |\eta| |c_{i,d} - b_{i,d}| \} < |\eta|^{d+1-i}. \end{aligned}$$

Pour un polynôme  $L$  quelconque, on trouve alors

$$\begin{aligned} |b_i| &= \left| \sum_{d \geq i} a_d b_{i,d} \right| \leq \max_{d \geq i} |a_d| |\eta|^{d-i} \leq |L|_{|\eta|} |\eta|^{-i} \\ |c_i - b_i| &= \left| \sum_{d \geq i} a_d (c_{i,d} - b_{i,d}) \right| < \max_{d \geq i} |a_d| |\eta|^{d-i} \leq |L|_{|\eta|} |\eta|^{-i} \quad \square \end{aligned}$$

## 7.2. Topologie quotient. —

**Définition 7.6.** — Soit  $\mathcal{M}$  un  $A$ -module différentiel. Une *présentation* de  $\mathcal{M}$  est un morphisme surjectif  $A\langle D \rangle^\nu \xrightarrow{\delta} \mathcal{M} \rightarrow 0$  de  $A\langle D \rangle$ -modules. A une présentation, on associe l'image  $\mathfrak{e}$  de la base canonique de  $A\langle D \rangle^\nu$  par l'application  $\delta$ . On obtient ainsi une bijection entre l'ensemble des présentations et l'ensemble des familles génératrices de  $\mathcal{M}$  en tant que  $A\langle D \rangle$ -module.

Les exemples fondamentaux de présentation sont ceux de (22) (avec  $\nu = \mu$  et  $\mathfrak{e}$  une  $A$ -base de  $\mathcal{M}$ ) et de (26) (avec  $\nu = 1$  et  $\mathfrak{e}$  constituée d'un vecteur cyclique de  $\mathcal{M}$ ).

Etant donné une norme de  $K$ -algèbre  $\|\cdot\|$  sur  $A\langle D \rangle$ , on la prolonge à  $A\langle D \rangle^\nu$  en posant

$$\|(P_1, \dots, P_\nu)\| = \max_{1 \leq i \leq \nu} \|P_i\|.$$

Pour chaque présentation, on obtient ainsi une *semi-norme quotient* sur  $\mathcal{M}$ .

**Définition 7.7.** — Soit  $\mathfrak{e}$  une famille génératrice de  $\mathcal{M}$  et soit  $m$  dans  $\mathcal{M}$ . On pose

$$\|m\|_{\mathfrak{e}, Q} = \inf_{m = \sum_{i=1}^{\nu} P_i \mathfrak{e}_i} \|(P_1, \dots, P_\nu)\| = \inf_{m = \sum_{i=1}^{\nu} P_i \mathfrak{e}_i} \max_{1 \leq i \leq \nu} \|P_i\|.$$

Il est facile (et classique) de vérifier que  $\|\cdot\|_{\mathfrak{e}, Q}$  est une semi-norme sur le  $K$ -espace vectoriel  $\mathcal{M}$ .

**Proposition 7.8.** — Les semi-normes  $\|\cdot\|_{\mathfrak{e}, Q}$ , définies par les différentes familles génératrices  $\mathfrak{e}$  du module différentiel  $\mathcal{M}$ , sont équivalentes.

*Preuve.* — Soit  $\mathfrak{e}$  et  $\mathfrak{f}$  deux familles génératrices de  $\mathcal{M}$ . Pour  $m$  dans  $\mathcal{M}$  et  $\varepsilon > 0$  donné, par définition des semi-normes  $\|\cdot\|_{\mathfrak{e}, Q}$  et  $\|\cdot\|_{\mathfrak{f}, Q}$ , il existe des polynômes différentiels  $P_i$  et  $Q_{i,j}$  de  $A\langle D \rangle$  tels que

$$\begin{aligned} m &= \sum_i P_i(\mathfrak{e}_i) \quad , \quad \max_i \|P_i\| < \|m\|_{\mathfrak{e}, Q} + \varepsilon \\ \mathfrak{e}_i &= \sum_j Q_{i,j}(\mathfrak{f}_j) \quad , \quad \max_j \|Q_{i,j}\| < \|\mathfrak{e}_i\|_{\mathfrak{f}, Q} + \varepsilon \end{aligned}$$

On a  $m = \sum_{i,j} (P_i Q_{i,j})(\mathfrak{f}_i)$ . et,  $\|\cdot\|$  étant une norme d'algèbre, on trouve

$$\|m\|_{\mathfrak{f}, Q} \leq \max_{i,j} \|P_i Q_{i,j}\| \leq \max_i \|P_i\| \max_{i,j} \|Q_{i,j}\| \leq (\|m\|_{\mathfrak{e}, Q} + \varepsilon) \max_i (\|\mathfrak{e}_i\|_{\mathfrak{f}, Q} + \varepsilon).$$

Ceci ayant lieu pour tout  $\varepsilon$ , on obtient finalement

$$\|m\|_{\mathfrak{f}, Q} \leq \|m\|_{\mathfrak{e}, Q} \max_i \|\mathfrak{e}_i\|_{\mathfrak{f}, Q}.$$

En échangeant le rôle de  $\mathfrak{e}$  et  $\mathfrak{f}$ , on obtient une inégalité dans l'autre sens et donc l'équivalence des deux semi-normes.  $\square$

On pourra donc parler de la *topologie quotient* induite sur  $\mathcal{M}$  par la norme d'algèbre  $\|\cdot\|$  sur  $A\langle D \rangle$ .

Plus généralement, si une topologie localement convexe sur  $A\langle D \rangle$  peut être définie par une famille de normes d'algèbre, on pourra parler de la topologie quotient induite sur  $\mathcal{M}$  : c'est la topologie définie par la famille des semi-normes quotient pour une présentation fixée de  $\mathcal{M}$ .

Par exemple, pour  $I \subset [0, 1[$ ,  $A = \mathcal{A}(I)$  et  $\lambda < 1$ , on peut munir l'anneau  $A\langle D \rangle$  de la famille des normes d'algèbre

$$\|P\|_{\rho, \rho^\lambda} \stackrel{\text{déf}}{=} \|P\|_{\text{op}, \mathcal{B}_{t_\rho}(\rho^\lambda)}$$

pour  $\rho$  dans  $I$ . Nous notons  $\mathcal{T}_\lambda$  la topologie correspondante. Il est facile de voir que cette topologie peut être définie par une famille dénombrable de normes (en choisissant une suite  $(\rho_n)$  de  $I$  ayant les bornes de  $I$  comme valeurs d'adhérence. Il en résulte que l'espace  $(A\langle D \rangle, \mathcal{T}_\lambda)$  est métrisable (remarque 1.20). Par contre il n'est pas complet ce qui est une source importante de difficultés.

**Proposition 7.9** ([15]). — *L'espace  $(A\langle D \rangle, \mathcal{T}_\lambda)$  n'est pas une limite inductive d'espaces de Fréchet (espaces  $\mathcal{LF}$ ). En particulier il n'est pas complet.*

*Preuve.* — Notons  $\mathcal{A}\langle D \rangle_n$  le sous-espace des polynômes différentiels de degré strictement inférieur à  $n$ . Il est isomorphe à  $\mathcal{A}^n$  et donc muni de la topologie produit  $\mathcal{T}^n$  et c'est un espace métrisable complet. Donc  $\mathcal{A}\langle D \rangle = \varinjlim \mathcal{A}\langle D \rangle_n$  est un espace  $\mathcal{LF}$ . Nous notons  $\mathcal{T}^\infty$  la topologie correspondante.

L'inclusion  $(\mathcal{A}\langle D \rangle_n, \mathcal{T}^\infty) \rightarrow (\mathcal{A}\langle D \rangle, \mathcal{T}_\lambda)$  est clairement continue. Donc l'application identité  $(\mathcal{A}\langle D \rangle, \mathcal{T}^\infty) \xrightarrow{i} (\mathcal{A}\langle D \rangle, \mathcal{T}_\lambda)$  est continue. Supposons que  $\mathcal{T}_\lambda$  soit un espace  $\mathcal{LF}$ . D'après Grothendieck [30], le théorème des homomorphismes (toute application linéaire continue et bijective a un inverse continu), est vrai pour les espaces  $\mathcal{LF}$ . Appliqué à  $i$  il affirmerait que  $\mathcal{T}^\infty = \mathcal{T}_\lambda$ . Mais  $\varinjlim \mathcal{A}\langle D \rangle_n$  est une limite stricte : la topologie  $\mathcal{T}^n$  est la restriction à  $\mathcal{A}\langle D \rangle_n$  de la topologie  $\mathcal{T}^\infty$  (et d'ailleurs aussi de la topologie  $\mathcal{T}_\lambda$ ). C'est donc un espace régulier c'est-à-dire qu'une partie bornée pour  $\mathcal{T}^\infty$  appartient à l'un des  $\mathcal{A}\langle D \rangle_n$ . Par conséquent, la partie  $\{x^{\lambda m} D^m/m!; m \in \mathbb{N}\}$  n'est pas bornée pour  $\mathcal{T}^\infty$ . Or elle est bornée pour  $\mathcal{T}_\lambda$  car

$$\|x^{\lambda m} D^m/m!\|_{\rho, \rho^\lambda} = \rho^{\lambda m} (\rho^\lambda)^{-m} = 1. \quad \square$$

**7.3. Lemme de Hensel pour les polynômes différentiels.** — Soit  $F$  un corps différentiel muni d'une valeur absolue  $|\cdot|$  pour laquelle il est complet. Si  $D$  est une dérivation de  $F$ , rappelons que

$$\|D\|_{\text{op}, F} = \sup_{a \in F^*} \frac{|D(a)|}{|a|}$$

désigne la norme de l'opérateur  $D$  agissant sur  $F$ . Par exemple, pour  $K(x) \subset F \subset E_\rho$  et  $|\cdot| = |\cdot|_\rho$ , on constate (voir proposition 3.4) que

$$\left\| \frac{d}{dx} \right\|_{\text{op}, F} = \frac{1}{\rho} \quad \text{et} \quad \left\| \frac{xd}{dx} \right\|_{\text{op}, F} = 1.$$

Pour  $\gamma \geq \|D\|_{\text{op},F}$ , on munit  $F\langle D \rangle$  de la  $\gamma$ -norme de Gauss  $\|\cdot\|_\gamma$  définie en (31). Si on pose  $v(a) \stackrel{\text{déf}}{=} -(|a|)$ , de telle sorte que  $v$  soit une valuation sur  $F$ , on a ainsi muni  $F\langle D \rangle$  de la valuation :

$$v_\gamma\left(\sum_{i=0}^{\mu} a_i D^i\right) := -\log\left(\left|\sum_{i=0}^{\mu} a_i D^i\right|_\gamma\right) = \min_{0 \leq i \leq \mu} (v(a_i) - i \log(\gamma))$$

On appelle *polygone de Newton* du polynôme différentiel  $L = \sum_{i=0}^{\mu} a_i D^i$ , l'enveloppe convexe de l'ensemble des points  $(i, v(a_i))$ , pour  $0 \leq i \leq \mu$ , auxquels on ajoute le point à l'infini  $(0, \infty)$ . Le nombre réel  $v_\gamma(a_i D^i) = v(a_i) - i \log(\gamma)$  est l'ordonnée de l'intersection de la droite de pente  $\log(\gamma)$  passant par le point  $(i, v(a_i))$  avec l'axe des ordonnées (figure 5). On constate que  $v_\gamma(L)$  est l'ordonnée de l'intersection de l'axe

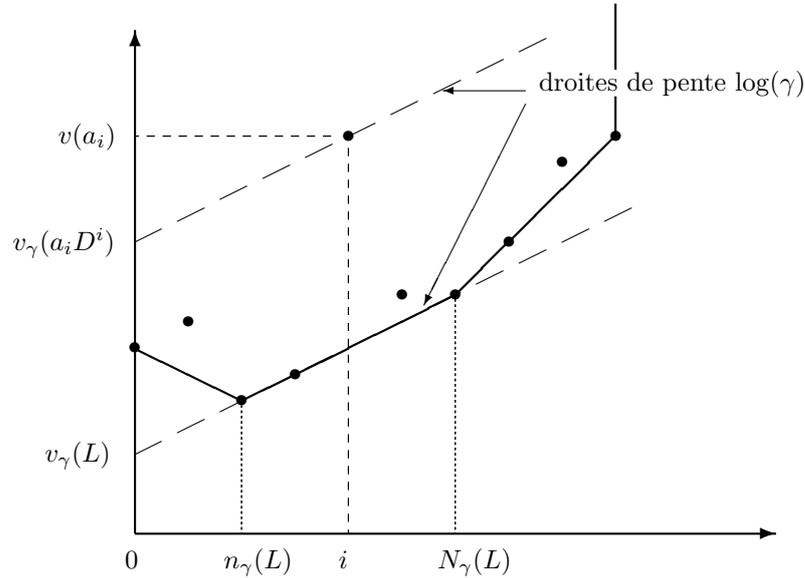


FIGURE 5. Un polygone de Newton

des ordonnées avec la droite de pente  $\log(\gamma)$  s'appuyant sur le polygone de Newton de  $L$ .

**Définition 7.10.** — Pour  $L = \sum a_i D^i$  dans  $F\langle D \rangle$ , on note  $n_\gamma(L)$  (resp.  $N_\gamma(L)$ ) le plus petit (resp. plus grand) indice  $i$  tel que  $v_\gamma(L) = v(a_i) - i \log(\gamma)$ .

En particulier, on a  $N_\gamma(L) = n_\gamma(L)$  si et seulement si le polygone de Newton de  $L$  n'a pas de coté de pente  $\log(\gamma)$ .

**Lemme 7.11.** — Si  $\|D\|_{\text{op},F} \leq \gamma = |D|_\gamma$ , la  $\gamma$ -norme de Gauss  $|\cdot|_\gamma$  est une valeur absolue. De plus, pour  $Q$  et  $R$  dans  $F\langle D \rangle$ , on a

$$N_\gamma(QR) = N_\gamma(Q) + N_\gamma(R) \quad \text{et} \quad n_\gamma(QR) = n_\gamma(Q) + n_\gamma(R).$$

*Preuve.* — La démonstration est analogue à celle du lemme 2.4. On remarque que la condition imposée à  $\gamma$  implique

$$|D^i(a)D^j|_\gamma \leq \|D\|_{\text{op},F}^i |a| |D|_\gamma^j \leq |a| |D|_\gamma^{i+j} = |aD^{i+j}|_\gamma.$$

On en déduit que la norme  $|\cdot|_\gamma$  est multiplicative sur les mônomes :

$$|aD^i bD^j|_\gamma = \left| abD^{i+j} + \sum_{k=1}^i \binom{i}{k} aD^k(b)D^{j+i-k} \right|_\gamma = |aD^i|_\gamma |bD^j|_\gamma.$$

Maintenant, quand on calcule le produit  $QR$  de deux éléments de  $F\langle D \rangle$ , le coefficient du monôme de degré  $N_\gamma(Q) + N_\gamma(R)$  en  $D$  contient un seul terme de valeur absolue maximum ; c'est celui qui provient des coefficients de degré  $N_\gamma(Q)$  de  $Q$  et de degré  $N_\gamma(R)$  de  $R$ .

De même, dans le produit  $QR$ , le coefficient de degré  $n_\gamma(Q) + n_\gamma(R)$  contient un seul terme de valeur absolue maximum, c'est celui qui provient des coefficients de degré  $n_\gamma(Q)$  de  $Q$  et  $n_\gamma(R)$  de  $R$ .

Si  $Q = \sum a_i D^i$  et  $R = \sum b_j D^j$ , on trouve alors

$$\begin{aligned} |QR|_\gamma &= |a_{N_\gamma(Q)} b_{N_\gamma(R)} D^{N_\gamma(Q)+N_\gamma(R)}|_\gamma \\ &= |a_{N_\gamma(Q)} D^{N_\gamma(Q)}|_\gamma |b_{N_\gamma(R)} D^{N_\gamma(R)}|_\gamma = |Q|_\gamma |R|_\gamma. \end{aligned} \quad \square$$

**Proposition 7.12 (Lemme de Hensel à droite).** — *Si  $\|D\|_{\text{op},F} \leq \gamma = |D|_\gamma$ , alors, pour tout polynôme différentiel  $P$  de  $F\langle D \rangle$ , il existe deux polynômes différentiels  $Q$  et  $R$  de  $F\langle D \rangle$  tels que*

1.  $P = QR$
2.  $\deg_D(Q) = N_\gamma(Q) = N_\gamma(P)$ .

*Preuve.* — Posons pour simplifier  $d = \deg(P)$  et  $N = N_\gamma(P)$ .

Nous notons  $P = \sum_{i=0}^d a_i D^i$  et appliquons la proposition 2.16 avec :

- $U = \{u \in F\langle D \rangle; \deg_D(u) < N\}$ ,
- $V = \{v \in F\langle D \rangle; \deg_D(v) \leq d - N\}$ ,
- $W = \{u \in F\langle D \rangle; \deg_D(u) < d\}$ ,
- $c=P$ ,  $a = \sum_{i=0}^N a_i D^i$  et  $b = 1 + \frac{a_d}{a_N} D^{d-N}$ .

Les deux premières conditions de la proposition 2.16 sont évidentes avec  $A = F\langle D \rangle$ . Pour la condition 3) Il suffit de remarquer que

$$a_N D^N \frac{a_d}{a_N} D^{d-N} = a_d D^d + \text{des termes de degré au plus } d-1 \text{ en } D.$$

Pour la condition 4) on remarque que  $N_\gamma(b) = 0$  car

$$\left| \frac{a_d}{a_N} D^{d-N} \right|_\gamma = \frac{|a_d D^d|_\gamma}{|a_N D^N|_\gamma} < 1.$$

On en déduit  $|c - ab|_\gamma = \left| \sum_{i>N} a_i D^i + \sum_{i=0}^N a_i D^i \frac{a_d}{a_N} D^{d-N} \right|_\gamma < |P|_\gamma$ .

Montrons maintenant la condition 6). Comme  $N_\gamma(a) = N$  et  $N_\gamma(b) = 0$ , pour  $u$  dans

$U$  et  $v$  dans  $V$ , on trouve :

$$N_\gamma(av) = N + N_\gamma(v) \geq N > \deg(u) \geq N_\gamma(u) = N_\gamma(ub).$$

On constate que les termes de plus grande norme dans les deux produits  $av$  et  $bu$  ne pouvant pas être les mêmes, il ne peut y avoir de compensation quand on fait la somme. Il en résulte que l'on a bien  $|au + vb|_\gamma = \max(|au|_\gamma, |vb|_\gamma)$ .

En particulier, on constate que l'application  $\ell(u, v) = av + ub$  est une injection de  $U \times V$  dans  $W$ . Ces deux  $F$ -espaces vectoriels étant de dimension finie, on pourrait en conclure immédiatement que la condition 5) est satisfaite, c'est-à-dire que l'application  $\ell : (u, v) \mapsto av + ub$  est bijective si cette dernière était  $F$ -linéaire. Ce n'est malheureusement pas vrai. On contourne cette difficulté en passant aux gradués pour la filtration par le degré en  $D$ . Cela revient à remplacer l'anneau non-commutatif  $F\langle D \rangle$  par l'anneau commutatif  $F[D]$  et les ensembles  $U$ ,  $V$  et  $W$  par les espaces de polynômes commutatifs correspondant. Dans cette situation commutative, il est facile de constater que l'application  $\ell$  devient  $F$ -linéaire donc bijective. Maintenant, comme les graduations concernées sont finies car les polynômes considérés sont de degré borné, on vérifie facilement que l'application  $\ell$  qui est bijective sur les espaces gradués est aussi bijective sur les espaces eux-mêmes.

On peut donc appliquer la proposition 2.16 ce qui termine la démonstration.  $\square$

Dans tous ces calculs, on peut indifféremment faire les produits à gauche ou à droite. On obtient le résultat suivant :

**Proposition 7.13 (Lemme de Hensel à gauche).** — *Si  $\|D\|_{op, F} \leq r = |D|_\gamma$ , alors, pour tout polynôme différentiel  $P$  de  $F\langle D \rangle$ , il existe deux polynômes différentiels  $Q$  et  $R$  de  $F\langle D \rangle$  tels que*

1.  $P = RQ$
2.  $\deg_D(Q) = N_\gamma(Q) = N_\gamma(P)$ .

## 8. Rayon de convergence

La grande différence entre la théorie des équations différentielles dans le plan complexe et la théorie des équations différentielles  $p$ -adiques (cas  $p \neq 0$ ) est qu'une solution  $p$ -adique ne converge pas jusqu'à la première singularité contrairement à une solution complexe. L'exemple de la fonction exponentielle  $\exp(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} x^s$  solution de l'équation différentielle  $y' = y$  est caractéristique de cette situation. En effet, dans le cas complexe, cette fonction est entière mais, d'après la proposition 1.5, pour  $p \neq 0$  elle ne converge que dans le disque de rayon  $\omega$ . Il est donc naturel d'introduire le rayon de convergence des solutions au voisinage d'un point.

Dans tout ce paragraphe, on considère un anneau  $A$  tel que  $K[x] \subset A \subset E_\rho$ , muni de la valeur absolue  $|\cdot|_\rho$  et de la dérivation  $D = \frac{d}{dx}$ . L'exemple fondamental sera celui de l'anneau  $A = \mathcal{A}(I)$  pour un intervalle  $I$  qui contient  $\rho$ .

**8.1. Définition.** — Soit  $\mathcal{M}$  un  $A$ -module différentiel. A toute base  $\epsilon = \{\epsilon_i\}$  de  $\mathcal{M}$ , on associe la norme  $\|\cdot\|_{\epsilon,\rho}$ <sup>(8)</sup> sur  $\mathcal{M}$  définie par

$$\left\| \sum a_i \epsilon_i \right\|_{\epsilon,\rho} = \max |a_i|_\rho.$$

Si  $G$  est un  $K$ -opérateur sur  $\mathcal{M}$ , on note

$$\|G\|_{\epsilon,\rho} = \sup_{m \in \mathcal{M}^\vee} \frac{\|G(m)\|_{\epsilon,\rho}}{\|m\|_{\epsilon,\rho}}$$

sa norme d'opérateur. C'est, par construction, une norme d'algèbre.

Dans le cas particulier où  $\mathcal{M} = A^\mu$  muni de sa base canonique, c'est-à-dire muni de la norme

$$\|(a_1, \dots, a_\mu)\|_\rho = \max |a_i|_\rho,$$

on omettra d'indiquer la base. Par exemple, si  $G$  est une matrice de  $\text{Mat}(\mu, A)$ , on note

$$\|G\|_\rho = \max_{1 \leq i, j \leq \mu} |G_{ij}|_\rho$$

sa norme en tant qu'opérateur sur l'espace  $A^\mu$ . De même, pour l'opérateur  $D$  agissant sur  $\mathcal{M} = A$  muni de sa base canonique  $\epsilon = \{1\}$ , la proposition 3.4 montre que

$$\|D^n\|_\rho = |n!|_\rho^{-n}$$

car l'inégalité de cette proposition devient évidemment une égalité pour  $f = x^n$ .

La *norme spectrale* de l'opérateur  $G$  agissant sur  $\mathcal{M}$  est définie par :

$$\|G\|_{\text{Sp},\epsilon,\rho} = \limsup_{s \rightarrow \infty} \|G^s\|_{\epsilon,\rho}^{1/s}.$$

Dans le cas  $\mathcal{M} = A$  muni de la base canonique  $\epsilon = \{1\}$ , en utilisant le lemme 1.7, on constate que :

$$\|D\|_{\text{Sp},\epsilon,\rho} \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{s \rightarrow \infty} \|D^s\|_\rho^{1/s} = \lim_{s \rightarrow \infty} |s!|_\rho^{1/s} \rho^{-1} = \omega \rho^{-1}.$$

Nous montrons que la norme spectrale est, en fait, largement indépendante de la base  $\epsilon$  choisie. Ceci va nous permettre de définir le rayon de convergence du module différentiel,

**Proposition-définition 8.1.** — Soit  $\epsilon$  une base du  $A$ -module différentiel  $\mathcal{M}$  et soit  $G$  (resp.  $G_s$ ) la matrice de l'opérateur  $D$  (resp.  $D^s$ ) dans la base  $\epsilon$ . Le nombre

$$\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\omega}{\|D\|_{\text{Sp},\epsilon,\rho}} = \min \left( \rho, \liminf_{s \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{s!} G_s \right\|_\rho^{-1/s} \right)$$

est indépendant de la base  $\epsilon$ . On l'appelle rayon de convergence de  $\mathcal{M}$  en  $\rho$ .

<sup>(8)</sup>différente de la semi-norme quotient  $\|\cdot\|_{\epsilon,Q}$  définie en 7.7. On a évidemment  $\|\cdot\|_{\epsilon,Q} \leq \|\cdot\|_{\epsilon,\rho}$

*Preuve.* — Soit  $m = [m]\mathbf{e}$  un vecteur de  $\mathcal{M}$ . on a :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{s!} D^s(m) \right\|_{\mathbf{e}, \rho} &= \left\| \sum_{k=0}^s \frac{1}{(s-k)!} D^{s-k}([m]) \frac{1}{k!} D^k(\mathbf{e}) \right\|_{\mathbf{e}, \rho} \\ &\leq \max_{0 \leq k \leq s} \left\{ \rho^{-s+k} \|[m]\|_{\rho} \left\| \frac{1}{k!} G_k \right\|_{\rho} \right\} \\ &\leq \rho^{-s} \max_{0 \leq k \leq s} \left\{ \rho^k \left\| \frac{1}{k!} G_k \right\|_{\rho} \right\} \|m\|_{\mathbf{e}, \rho}. \end{aligned}$$

Par définition de la matrice  $G_s$  on trouve :

$$(33) \quad \left\| \frac{1}{s!} G_s \right\|_{\rho} = \max_{1 \leq i \leq \mu} \left\| \frac{1}{s!} D^s(\mathbf{e}_i) \right\|_{\mathbf{e}, \rho} \leq \left\| \frac{1}{s!} D^s \right\|_{\mathbf{e}, \rho} \leq \rho^{-s} \max_{0 \leq k \leq s} \left\{ \rho^k \left\| \frac{1}{k!} G_k \right\|_{\rho} \right\}.$$

Maintenant, par définition de la limite supérieure, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un entier  $S$  tel que, pour tout  $s > S$ , on ait :

$$\left\| \frac{1}{s!} G_s \right\|_{\rho}^{1/s} \leq \limsup_{s \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{s!} G_s \right\|_{\rho}^{1/s} + \epsilon$$

c'est-à-dire

$$\rho^s \left\| \frac{1}{s!} G_s \right\|_{\rho} \leq \rho^s \left( \limsup_{s \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{s!} G_s \right\|_{\rho}^{1/s} + \epsilon \right)^s$$

Si  $\limsup_{s \rightarrow \infty} \rho \left\| \frac{1}{s!} G_s \right\|_{\rho}^{1/s} < 1$ , en prenant  $\epsilon$  assez petit, on en déduit que la suite  $\rho^s \left\| \frac{1}{s!} G_s \right\|_{\rho}$  est bornée.

Si  $\limsup_{s \rightarrow \infty} \rho \left\| \frac{1}{s!} G_s \right\|_{\rho}^{1/s} \geq 1$ , on trouve, pour  $s$  assez grand

$$\max_{0 \leq k \leq s} \left\{ \rho^k \left\| \frac{1}{k!} G_k \right\|_{\rho} \right\} \leq \rho^s \left( \limsup_{s \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{s!} G_s \right\|_{\rho}^{1/s} + \epsilon \right)^s$$

d'où, pour tout  $\epsilon > 0$  et donc pour  $\epsilon = 0$  :

$$\limsup \left( \max_{0 \leq k \leq s} \left\{ \rho^k \left\| \frac{1}{k!} G_k \right\|_{\rho} \right\} \right)^{1/s} \leq \max \left\{ 1, \rho \left( \limsup_{s \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{s!} G_s \right\|_{\rho}^{1/s} + \epsilon \right) \right\}$$

En prenant la limite supérieure dans la relation (33), on obtient :

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{s!} G_s \right\|_{\rho}^{1/s} \leq \frac{1}{\omega} \|D\|_{\text{Sp}, \mathbf{e}, \rho} \leq \max \left\{ \rho^{-1}, \limsup_{s \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{s!} G_s \right\|_{\rho}^{1/s} \right\}.$$

Pour vérifier l'invariance par changement de base, on utilise la relation :

$$\frac{1}{s!} F_s = \left( \sum_{i=0}^s \frac{1}{(s-i)!} D^{s-i}(H) \frac{1}{i!} G_i \right) H^{-1}$$

reliant les matrices représentant  $D^s$  dans les deux bases et on fait un calcul analogue au précédent.  $\square$

**8.2. Solutions au voisinage du point générique.** — Le rayon de convergence d'un module différentiel doit son nom au fait qu'il s'interprète comme le rayon de convergence des solutions de ce module différentiel au voisinage du *point générique*.

Soit  $A \subset E_\rho$  un anneau qui contient  $K(x)$  et soit  $\mathcal{M}$  un  $A$ -module différentiel. On munit  $A$  de la valeur absolue  $|\cdot|_\rho$ .

Pour  $0 < r \leq \rho$ , l'anneau  $\mathcal{A}_{t_\rho}(r)$  est un  $A\langle D \rangle$ -module. On peut donc considérer les solutions de  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{A}_{t_\rho}(r)$  c'est-à-dire les éléments de  $\text{Hom}_{A\langle D \rangle}(\mathcal{M}, \mathcal{A}_{t_\rho}(r))$ . Pour étudier ces solutions, nous introduisons la *résolvante* du système différentiel  $D(X) = GX$  c'est-à-dire la matrice dépendant de deux variables

$$(34) \quad Y_G(x, y) = \sum_{s=0}^{\infty} G_s(y) \frac{(x-y)^s}{s!}.$$

où les matrices  $G_s$  sont définies par la récurrence (17). Si on a  $|G_s(y)| \leq \|G_s\|_\rho$ , par exemple parce que  $y$  appartient à  $D(t_\rho, \rho)$ , elle est définie pour  $|x-y| < \text{Ray}(\mathcal{M}, \rho)$ . En particulier, lorsque  $A = \mathcal{A}(I)$ , c'est une matrice analytique sur le domaine

$$\Delta_{\mathcal{M}} = \{(|x|, |y|) \in I^2; |x-y| < \text{Ray}(\mathcal{M}, |x|)\}.$$

**Lemme 8.2.** — *Une fonction non identiquement nulle  $w$  de  $\mathcal{A}_{t_\rho}(r)$  telle que  $D(w) = fw$  pour une fonction  $f$  de  $\mathcal{A}_{t_\rho}(r)$  est inversible dans  $\mathcal{A}_{t_\rho}(r)$*

*Preuve.* — Si  $w$  avait un zéro d'ordre  $n$  en un point  $\alpha$  du disque  $D(t_\rho, r)$ , on aurait  $w = (x-\alpha)^n v$  avec  $v$  dans  $\mathcal{A}_{t_\rho}(r)$  et  $v(\alpha) \neq 0$ .

On trouverait alors  $D(w) = n(x-\alpha)^{n-1}v + (x-\alpha)^n D(v) = (x-\alpha)^n v f$  c'est-à-dire  $v(\alpha) = 0$  ce qui n'est pas. Donc  $w$  ne s'annule pas et est inversible.  $\square$

**Proposition 8.3.** — *Lorsque la matrice  $Y_G$  est définie aux points  $(x, y)$  et  $(x, z)$  elle vérifie les relations*

$$(35a) \quad Y_G(x, x) = \mathbf{I}$$

$$(35b) \quad \frac{\partial}{\partial y} Y_G(x, y) = -Y_G(x, y) G(y)$$

$$(35c) \quad Y_G(x, y) Y_G(y, z) = Y_G(x, z)$$

$$(35d) \quad \frac{\partial}{\partial x} Y_G(x, y) = G(x) Y_G(x, y)$$

*En particulier,  $Y_G$  appartient à  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}_{t_\rho}(\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho)))$  et  $Y_G^{-1}(x, y) = Y_G(y, x)$ .*

*Preuve.* — La condition (35a) est évidente.

Pour établir la relation (35b) il suffit de calculer :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} Y_G(x, y) &= \sum_{s=0}^{\infty} D(G_s)(y) \frac{(x-y)^s}{s!} - \sum_{s=1}^{\infty} G_s(y) \frac{(x-y)^{s-1}}{(s-1)!} \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} (D(G_s)(y) - G_{s+1}(y)) \frac{(x-y)^s}{s!} \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} -G_s(y) G(y) \frac{(x-y)^s}{s!} = -Y_G(x, y) G(y). \end{aligned}$$

Maintenant, on constate que le déterminant  $w(x, y)$  de la matrice  $Y(x, y)$  est non identiquement nul car  $w(y, y) = 1$  d'après (35b) et satisfait l'équation différentielle d'ordre un  $\frac{\partial}{\partial y} w = \text{tr}(G) w$  (voir lemme 6.7). Il est donc inversible d'après le lemme 8.2 et la matrice  $Y(x, y)$  est inversible dans l'anneau des matrices à coefficients dans l'anneau  $\mathcal{A}_x(\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho))$ .

On calcule maintenant pour  $y$  et  $z$  dans le disque  $D(x, \text{Ray}(\mathcal{M}))$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} (Y(x, y) Y^{-1}(z, y)) &= -Y(x, y) G(y) Y^{-1}(z, y) + \\ &Y(x, y) (Y^{-1}(z, y) Y(z, y) G(y) Y^{-1}(z, y)) = 0. \end{aligned}$$

Ce produit est donc constant. En prenant sa valeur en  $y = x$  et  $y = z$ , il vient

$$Y^{-1}(z, x) = Y(x, z) = Y(x, y) Y^{-1}(z, y)$$

d'où la relation (35c) se déduit facilement.

Finalement (35d) s'obtient à partir des relations (35b) et  $Y(x, y) = Y^{-1}(y, x)$ .  $\square$

On déduit de ces résultats une nouvelle interprétation du rayon de convergence. Le rayon de convergence d'une matrice à coefficients analytiques au voisinage d'un point désignera le plus petit des rayons de convergence de ses coefficients.

**Proposition 8.4.** — *Soit  $\mathcal{M}$  un  $A$ -module différentiel, soit  $G$  la matrice qui représente la dérivation dans une base de  $\mathcal{M}$ , soit  $a$  un point du corps  $\Omega$  tel que  $|a| = \rho$  et tel que les coefficients de la matrice  $G$  soient analytiques dans le disque  $D(a, \rho)$  et soit  $X$  une matrice (à  $\mu$  lignes et un nombre quelconque de colonnes) qui vérifie la relation  $D(X) = GX$  et dont les coefficients sont analytiques dans un disque  $D(a, r)$ . Alors*

1. *la matrice  $X$  a un rayon de convergence au moins égal à  $\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho)$ ,*
2. *si  $a = t_\rho$  et si  $X$  est inversible, le rayon de convergence des matrices  $X$  et  $X^{-1}$  est au moins égal à  $\liminf_{s \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{s!} G_s \right\|_\rho^{-1/s}$ .*  
*Il est exactement égal à ce nombre si celui-ci est inférieur à  $\rho$ .*
3.  *$\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho)$  est le plus grand des nombres réels  $r \leq \rho$  pour lesquels le module différentiel  $\mathcal{M}$  est entièrement soluble dans  $\mathcal{A}_{t_\rho}(r)$ .*

*Preuve.* — Un calcul simple montre que  $D(Y_G(a, x) X(x)) = 0$ . On en déduit que

$$X(x) = Y_G(x, a) X(a) = \sum_{s=0}^{\infty} G_s(a) \frac{(x-a)^s}{s!} X(a).$$

On trouve alors une minoration du rayon de convergence des coefficients de la matrice  $X$  en remarquant que

$$\left\| \frac{1}{s!} G_s(a) X(a) \right\| \leq \left\| \frac{1}{s!} G_s(a) \right\| \|X(a)\| \leq \left\| \frac{1}{s!} G_s \right\|_{|a|} \|X(a)\|,$$

c'est-à-dire, si  $X$  n'est pas nulle,

$$\liminf_{s \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{s!} G_s(a) X(a) \right\|^{-1/s} \geq \liminf_{s \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{s!} G_s \right\|_{|a|}^{-1/s} \geq \text{Ray}(\mathcal{M}, |a|).$$

Si  $X$  est inversible, à la multiplication (à droite) par une matrice constante près, on peut supposer que  $X(a) = \mathbf{I}$ . Si en plus on a  $a = t_\rho$ , il vient  $X_{t_\rho}(x) = Y_G(x, t_\rho)$  et  $X_{t_\rho}^{-1}(x) = Y_G(t_\rho, x)$ . Les matrices  $G_s$  appartiennent à  $\text{Mat}(\mu, E_\rho)$  et comme, pour  $|x - t_\rho| < \rho$ ,

$$\left\| \frac{1}{s!} G_s(x) \right\| = \left\| \frac{1}{s!} G_s(t_\rho) \right\| = \left\| \frac{1}{s!} G_s \right\|_\rho,$$

les coefficients des matrices  $X$  et  $X^{-1}$  ont le rayon de convergence annoncé.

Le dernier résultat résulte de ce que chacune des  $\mu$  colonnes de la matrice  $X_{t_\rho}$  donne les images des éléments de la base choisie par un élément de  $\text{Hom}_{A\langle D \rangle}(\mathcal{M}, \mathcal{A}_{t_\rho}(r))$ . Les  $\mu$  éléments de  $\text{Hom}_{A\langle D \rangle}(\mathcal{M}, \mathcal{A}_{t_\rho}(r))$  ainsi construits sont linéairement indépendants (sur  $K$ ) car  $X$  est inversible. Ils forment donc une base et

$$\dim_K \left( \text{Hom}_{A\langle D \rangle}(\mathcal{M}, \mathcal{A}_{t_\rho}(r)) \right) = \dim_A(\mathcal{M}). \quad \square$$

Cette interprétation du rayon de convergence d'un module différentiel permet de démontrer la proposition suivante.

**Proposition 8.5.** — *Soit  $0 \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow 0$  une suite exacte de MLC  $(A)$ . On a  $\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho) = \min(\text{Ray}(\mathcal{N}, \rho), \text{Ray}(\mathcal{Q}, \rho))$ .*

*Preuve.* — On choisit une base  $\mathbf{e}_\mathcal{N}$  de  $\mathcal{N}$  que l'on complète en une base  $\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_\mathcal{N}, \mathbf{e}_\mathcal{Q}\}$  de  $\mathcal{M}$ . Dans ces conditions les images des éléments de  $\mathbf{e}_\mathcal{Q}$  forment une base  $\bar{\mathbf{e}}_\mathcal{Q}$  de  $\mathcal{Q}$ . Si  $G_\mathcal{N}$  (resp.  $G_\mathcal{Q}$ ,  $G$ ) est la matrice qui représente la dérivation  $D$  dans la base  $\mathbf{e}_\mathcal{N}$  (resp.  $\bar{\mathbf{e}}_\mathcal{Q}$ ,  $\mathbf{e}$ ), on a :

$$G = \begin{pmatrix} G_\mathcal{N} & 0 \\ H & G_\mathcal{Q} \end{pmatrix}.$$

La proposition 8.4 montre que  $\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho) \geq r$  si et seulement s'il existe une matrice  $X$  de  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}_{t_\rho}(r))$  telle que  $D(X) = G X$ . Si on impose en outre que  $X(t_\rho) = \mathbf{I}$ , on trouve que

$$X = \begin{pmatrix} X_\mathcal{N} & 0 \\ Y & X_\mathcal{Q} \end{pmatrix}.$$

avec :  $D(X_\mathcal{N}) = G_\mathcal{N} X_\mathcal{N}$ ,  $D(X_\mathcal{Q}) = G_\mathcal{Q} X_\mathcal{Q}$ ,  $D(Y) = H X_\mathcal{N} + G_\mathcal{Q} Y$

Comme la primitive d'une fonction analytique au voisinage du point  $t_\rho$  a le même

rayon de convergence que la fonction, la méthode de variation de la constante (voir proposition 6.24) permet de conclure.  $\square$

**8.3. Majoration de la dérivation dans une base cyclique.** — Le résultat suivant a eu de nombreux avatars ([43], [5], [50], [13],...) depuis son apparition dans la démonstration de Katz du théorème de Turrittin [33]. Il montre l'intérêt des bases cycliques. Malheureusement, comme il fait intervenir de telles bases, il nécessite de travailler sur le corps des quotients  $F$  de l'anneau  $A$ . Comme  $E_\rho$  lui-même est un corps cela ne pose pas de problème a priori.

**Théorème 8.6.** — *Soient  $\mathcal{M}$  un  $A$ -module différentiel de rang  $\mu$  et  $m$  un vecteur cyclique de  $F \otimes_A \mathcal{M}$ . Si, dans la décomposition  $D^\mu(m) = a_{\mu-1}D^{\mu-1}(m) + \dots + a_0m$ , l'un des coefficients  $a_i$  ( $0 \leq i < \mu$ ) vérifie  $|a_i|_\rho > \rho^{i-\mu}$  alors*

$$\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho) = \omega \min_{0 \leq i < \mu} |a_i|_\rho^{-1/(\mu-i)} < \omega\rho$$

*Preuve.* — Prenons un élément  $\alpha$  dans une extension  $K'$  du corps  $K$  tel que  $|\alpha| = \max_{0 \leq i < \mu} |a_i|_\rho^{1/(\mu-i)} > \rho^{-1}$ . Puisque  $K' \otimes_K \mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}$  ont même rayon de convergence, on peut supposer que  $K' = K$ . La dérivation  $D$  est représentée dans la base  $\{m, \alpha^{-1}D(m), \dots, \alpha^{1-\mu}D^{\mu-1}(m)\}$  par la matrice :

$$G = \alpha G', \quad G' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & & 1 \\ b_0 & \dots & & & b_{\mu-1} \end{pmatrix}$$

avec  $b_i = \alpha^{i-\mu}a_i$  de telle sorte que  $\|G'\|_\rho = \max |b_i|_\rho = 1$ . Il en résulte que la matrice  $\overline{G'}$ , image de  $G'$  dans le corps des restes pour la norme  $\|\cdot\|_\rho$ , n'est pas nilpotente. Donc  $\|G'^s\|_\rho = \|G'\|_\rho^s$  pour tout entier  $s$ . Par ailleurs, on a  $\|D\|_\rho = \rho^{-1} < |\alpha| = \|G\|_\rho$  et on en déduit par récurrence en utilisant la formule (17) que  $\|G_s\|_\rho = \|G^s\|_\rho = |\alpha|^s$  c'est-à-dire  $\text{Ray}(\mathcal{M}) = \omega|\alpha|^{-1}$ .  $\square$

**Corollaire 8.7 (petit rayon de convergence).** — *Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}(I)$ -module différentiel de rang  $\mu$ . Si  $\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho) < \omega\rho$ , il existe une extension finie  $K'$  de  $K$  et une base  $\epsilon$  de  $K' \otimes_K F \otimes_A \mathcal{M}$  telle que  $\|D\|_{\epsilon, \rho} = \frac{\omega}{\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho)} > \frac{1}{\rho}$ .*

*Preuve.* — Il suffit de prendre une base cyclique du module différentiel  $F \otimes_A \mathcal{M}$  et d'utiliser la base pseudo-cyclique  $\{m, \alpha^{-1}D(m), \dots, \alpha^{1-\mu}D^{\mu-1}(m)\}$  construite dans le théorème.  $\square$

**Corollaire 8.8 (grand rayon de convergence).** — *Soit  $\mathcal{M}$  un  $A$ -module différentiel de rang  $\mu$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- 1)  $\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho) \geq \omega\rho$ .
- 2) Pour tout vecteur cyclique  $m$  de  $F \otimes_A \mathcal{M}$ , on a  $D^\mu(m) = a_{\mu-1}D^{\mu-1}(m) + \dots + a_0m$  avec  $|a_i|_\rho \leq \rho^{i-\mu}$ .
- 3) Dans une (et alors dans toute) base cyclique  $\mathfrak{m}$  de  $F \otimes_A \mathcal{M}$ , on a  $\|D\|_{\mathfrak{m}, \rho} \leq 1/\rho$  (et par suite  $\|x^s D^s\|_{\mathfrak{m}, \rho} \leq 1$  pour tout  $s \geq 0$ ).

4) Dans une (et alors dans toute) base  $\mathfrak{e}$  de  $\mathcal{M}$ , la suite  $\rho^s \|D^s\|_{\mathfrak{e}, \rho}$  est bornée.

*Preuve.* — Il s'agit de l'affirmation contraposée de celle du théorème.  $\square$

**Remarque 8.9.** — Dans le cas  $p = 0$ , on a  $\omega = 1$ . Le théorème et ses deux corollaires permettent alors de trouver le rayon de convergence d'un module différentiel dès qu'on en a trouvé une base cyclique.

Il n'en est plus du tout de même lorsque  $p > 0$ . Pour préciser la valeur du rayon de convergence lorsqu'il est "grand", c'est-à-dire lorsque  $\omega\rho \leq \text{Ray}(\mathcal{M}, \rho) \leq \rho$ , il faudra utiliser des moyens beaucoup plus puissants. C'est essentiellement la structure de Frobenius qui nous les fournira.

## 9. $\mathcal{R}$ -modules différentiels solubles

### 9.1. La catégorie MLC ( $\mathcal{A}(I)$ ). —

**Lemme 9.1.** — Soit  $J$  un intervalle fermé et soit  $M$  un  $\mathcal{A}(J)$ -module de type fini muni d'une action  $K$  linéaire de la dérivation  $D = d/dx$ . Alors  $M$  est libre.

*Preuve.* — Notons  $\mathcal{T}$  le sous-module de torsion de  $M$ . Soit  $m$  dans  $\mathcal{T}$  donc tel que  $am = 0$  avec  $a$  dans  $\mathcal{A}(J)^{\neq 0}$ . La relation  $a^2 D(m) = a D(am) - D(a)am = 0$  montre que  $\mathcal{T}$  est stable par l'action de  $D$ .

Comme  $M$  est de type fini, il existe un polynôme  $P$  de  $K[x]$  tel que  $Pm = 0$  pour tout  $m$  dans  $\mathcal{T}$ . Choisissons un polynôme de degré minimum ayant cette propriété. On trouve que  $D(P)m = D(Pm) - PD(m) = 0$ . Comme le polynôme  $D(P)$  est de degré inférieur strictement à celui de  $P$ , on en déduit que  $D(P) = 0$ . Donc  $P$  est constant,  $\mathcal{T}$  est le module nul et  $M$  est libre.  $\square$

**Théorème 9.2.** — Si l'intervalle  $I$  est fermé ou bien si le corps  $K$  est sphériquement complet, la catégorie MLC ( $\mathcal{A}(I)$ ) est abélienne.

*Preuve.* — Soit  $\mathcal{N} \xrightarrow{u} \mathcal{M}$  un morphisme de  $\mathcal{A}(I)$ -modules libres de type fini. Le  $\mathcal{A}(I)$ -module  $\text{Im}(u)$  est de type fini. Comme c'est un sous-module du module libre de type fini  $\mathcal{M}$ , il est libre de type fini d'après le corollaire 4.43. Choisissons une base  $\mathfrak{e}$  de  $\text{Im}(u)$  et, pour chaque élément  $\mathfrak{e}_i$  de cette base, un élément  $\mathfrak{f}_i$  de  $\mathcal{N}$  tel que  $u(\mathfrak{f}_i) = \mathfrak{e}_i$ . Il est facile de voir que le sous- $\mathcal{A}(I)$ -module de  $\mathcal{N}$  engendré par les  $\mathfrak{f}_i$  est isomorphe à  $\text{Im}(u)$  et que le noyau de  $u$  est, en ce sens, isomorphe à  $\mathcal{N}/\text{Im}(u)$  donc de type fini. Comme c'est un sous-module du module libre de type fini  $\mathcal{N}$ , il est libre de type fini d'après le corollaire 4.43.

Le conoyau d'un morphisme de  $\mathcal{A}(I)$ -modules libres de type fini est évidemment de type fini mais, en général, n'est pas libre (il peut être de torsion !). Pour un morphisme de  $\mathcal{A}(I)$ -modules différentiels, si l'intervalle  $I$  est fermé, le lemme 9.1 montre qu'il est libre car muni d'une connexion. Nous allons étendre ce résultat au cas d'un intervalle non fermé.

Pour chaque intervalle fermé  $J \subset I$ , on pose  $\mathcal{M}(J) = \mathcal{A}(J) \otimes_{\mathcal{A}(I)} \mathcal{M}$  (resp.  $\tilde{\mathcal{N}}(J) = \mathcal{A}(J) \otimes_{\mathcal{A}(I)} \mathcal{N}/\ker(u)$ ) et on définit un  $\mathcal{A}(J)$ -module  $\mathcal{Q}(J)$  par la suite exacte

$$0 \longrightarrow \tilde{\mathcal{N}}(J) \xrightarrow{\text{Id} \otimes u} \mathcal{M}(J) \longrightarrow \mathcal{Q}(J) \longrightarrow 0.$$

Il est facile de vérifier que  $\text{Id} \otimes u$  est un morphisme de  $\mathcal{A}(J)$ -modules différentiels. Le  $\mathcal{A}(J)$ -module  $\mathcal{Q}(J)$  est muni de l'action quotient de  $D$ . Le lemme 9.1 montre qu'il est libre. Les systèmes  $(\tilde{\mathcal{N}}(J))$  et  $(\mathcal{M}(J))$  sont, par construction, des faisceaux cohérents sur la couronne  $\mathcal{C}(I)$ . Il en résulte que le système  $(\mathcal{Q}(J))$  est un faisceau cohérent sur cette couronne. On vient de voir qu'il est localement libre, il est donc libre d'après le théorème 4.40. Maintenant le théorème 4.35-A montre que la suite

$$0 \longrightarrow \tilde{\mathcal{N}} = \tilde{\mathcal{N}}(I) \xrightarrow{u} \mathcal{M} = \mathcal{M}(I) \longrightarrow \mathcal{Q}(I) \longrightarrow H^1(\mathcal{C}(I), \tilde{\mathcal{N}}) = 0$$

est exacte. Autrement dit,  $\text{coker}(u) = \mathcal{Q}(I)$  est un  $\mathcal{A}(I)$  module libre.  $\square$

**9.2. Fonction rayon de convergence.** — Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}(I)$ -module différentiel. Pour chaque nombre  $\rho$  de  $I \cap ]0, \infty[$ , on a défini le rayon de convergence  $\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho)$ . Nous nous proposons d'étudier la manière dont celui-ci dépend de  $\rho$ .

**Proposition 9.3.** — *Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}(I)$ -module différentiel de rang  $\mu$ . La fonction  $\rho \mapsto \text{Ray}(\mathcal{M}, \rho)$  est continue, logarithmiquement (définition 2.7) concave et logarithmiquement affine par morceaux (avec éventuellement une infinité de "morceaux") sur l'intervalle  $I$ .*

*Plus précisément, il existe une partition  $I = \bigcup I_i$ , des nombres réels positifs  $\alpha_i$  et des nombres  $\beta_i$  rationnels de dénominateur inférieur ou égal à  $\mu$  tels que, pour  $\rho$  dans  $I_i$ , on ait  $\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho) = \alpha_i \rho^{\beta_i}$ .*

*Preuve.* — La concavité est une conséquence facile de la convexité logarithmique de la fonction  $\rho \rightarrow |f|_\rho$  (voir exercice 2.8). La continuité sur l'intérieur de l'intervalle  $I$  s'en déduit immédiatement. La continuité aux extrémités éventuelles de l'intervalle  $I$  nécessite l'utilisation du théorème de majoration explicite de Dwork-Robba [23].

Lorsque la condition (\*) :  $\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho) < \omega \rho$  est satisfaite pour tout nombre  $\rho$  de l'intervalle  $I$ , l'affinité par morceaux et le résultat sur la pente de chaque morceau est une conséquence facile de la proposition 8.6.

Le cas général se ramène à ce cas particulier : localement, à l'aide du théorème 20.15 on construit un antécédent de Frobenius qui satisfait la majoration (\*). Ceci montre que la fonction rayon de convergence a localement les propriétés voulues. Mais la démonstration complète comporte des difficultés techniques que nous n'aborderons pas.  $\square$

**9.3. Plus grande pente d'un module différentiel soluble.** — Par définition de  $\mathcal{R}$ , si  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{R}$ -module différentiel, pour  $\alpha$  dans  $]0, 1[$  et suffisamment proche de 1, il existe un  $\mathcal{A}(I_\alpha)$ -module différentiel  $\mathcal{M}_\alpha$  tel que

$$(36) \quad \mathcal{M} = \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{A}(I_\alpha)} \mathcal{M}_\alpha.$$

Deux modules différentiels  $\mathcal{M}_\alpha$  vérifiant la relation (36) deviennent isomorphes après, éventuellement, tensorisation par  $\mathcal{A}(I_{\alpha'})$  pour  $\alpha < \alpha' < 1$ . Nous ferons donc comme si  $\mathcal{M}_\alpha$  était unique.

De même, tout morphisme  $\mathcal{N} \xrightarrow{u} \mathcal{M}$  de  $\text{MLC}(\mathcal{R})$  vient d'un morphisme  $\mathcal{N}_\alpha \xrightarrow{u_\alpha} \mathcal{M}_\alpha$  de  $\text{MLC}(\mathcal{A}(I_\alpha))$  pour  $\alpha$  suffisamment proche de 1.

**Corollaire 9.4.** — Si le corps  $K$  est sphériquement complet, la catégorie  $\text{MLC}(\mathcal{R})$  est abélienne.

*Preuve.* — Pour montrer que l'image et le noyau d'un morphisme de  $\text{MLC}(\mathcal{R})$  sont libres de type fini, on peut reprendre la même démonstration que pour  $\text{MLC}(\mathcal{A}(I))$ . Pour le conoyau il faut travailler un petit peu plus. Un morphisme  $\mathcal{N} \xrightarrow{u} \mathcal{M}$  de  $\text{MLC}(\mathcal{R})$  provient d'un morphisme  $\mathcal{N}_\alpha \xrightarrow{u_\alpha} \mathcal{M}_\alpha$  de  $\text{MLC}(\mathcal{A}(I_\alpha))$ . Pour tout idéal  $\mathfrak{a}$  de type fini (donc principal) de  $\mathcal{A}(I_\alpha)$  l'application  $\mathfrak{a} \otimes \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  est injective. Donc  $\mathcal{R}$  est plat sur  $\mathcal{A}(I_\alpha)$  et  $\text{coker}(u) = \text{coker}(u_\alpha) \otimes \mathcal{R}$  (resp.  $\text{Im}(u) = \text{Im}(u_\alpha) \otimes \mathcal{R}$ ,  $\ker(u) = \ker(u_\alpha) \otimes \mathcal{R}$ ).  $\square$

**Exemple 9.5.** — C'est l'exemple fondamental qui a suggéré la forme du théorème de décomposition.

Soit  $\pi$  ("le  $\pi$  de Dwork") une racine  $(p-1)$ -ième de  $-p$ . On a  $|\pi| = \omega$ . Considérons la série  $f(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \pi^{-s} s! x^s$ . L'encadrement du lemme 1.6 montre que la fonction  $f$  est analytique et non bornée dans le disque  $|x| < 1$ . Par ailleurs elle satisfait l'équation inhomogène  $x(f + xf') = \pi(f - 1)$  et donc l'équation différentielle homogène  $L(f) = 0$  avec  $L = D(x^2D + x - \pi) = x^2D + (3x - \pi)D + 1$ .

Il est facile de vérifier que les solutions dans  $\mathcal{R}$  de l'équation  $L(f) = 0$  sont de la forme  $\lambda f$ . Formellement, cela se traduit par le fait que  $L$  est divisible à droite par  $D - f'/f$ . La difficulté vient de ce que la fonction  $f$ , n'étant pas bornée, a une infinité de zéros dans toute couronne  $\mathcal{C}(I_\alpha)$ ; la différentielle logarithmique  $f'/f$  n'appartient donc pas à  $\mathcal{R}$ . Nous considérons le morphisme de  $\text{MLC}(\mathcal{R})$  :

$$\mathcal{M} = \mathcal{R}\langle D \rangle / \mathcal{R}\langle D \rangle \cdot L \xrightarrow{u} \mathcal{R}, \quad P \mapsto P(f).$$

Le théorème 9.4 affirme alors que l'image et le noyau de  $u$  sont des  $\mathcal{R}$ -modules libres ce que nous allons vérifier directement.

Comme  $L$  est un polynôme unitaire dans  $\mathcal{R}\langle D \rangle$ , tout polynôme différentiel  $P$  de  $\mathcal{R}\langle D \rangle$  s'écrit  $P = QL + aD + b$  avec  $a$  et  $b$  dans  $\mathcal{R}$ . Autrement dit,  $\text{Im}(u) = \mathcal{R}f + \mathcal{R}f'$ . Mais comme les zéros de  $f$  sont simples, les diviseurs de  $f$  et  $f'$  sont premiers entre eux, si bien que

$$\text{Im}(u) = \mathcal{R}f + \mathcal{R}f' = \mathcal{R}.$$

Par ailleurs, si  $u(P) = 0$ , alors  $a f' + b f = 0$  et on en déduit qu'il existe  $c$  dans  $\mathcal{R}$  tel que  $a = c f$  et  $b = -c f'$ . On trouve finalement

$$\ker(u) = \mathcal{R}(fD - f') \pmod{\mathcal{R}\langle D \rangle L}.$$

Soit maintenant  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{R}$ -module différentiel et soit  $\mathcal{M}_\alpha$  un  $\mathcal{A}(I_\alpha)$ -module différentiel qui vérifie la relation (36). Le germe en 1 de la fonction  $\rho \mapsto \text{Ray}(\mathcal{M}_\alpha, \rho)$  ne dépend pas du choix de  $\mathcal{M}_\alpha$ . Par abus de notation, pour  $\rho$  suffisamment proche de 1, nous écrirons  $\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho)$  au lieu de  $\text{Ray}(\mathcal{M}_\alpha, \rho)$ .

La concavité montre que la limite  $\text{Ray}(\mathcal{M}, 1^-) \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{\rho \rightarrow 1^-} \text{Ray}(\mathcal{M}, \rho)$  existe. Par construction  $\text{Ray}(\mathcal{M}, 1^-) \leq 1$ .

**Définition 9.6.** — Nous dirons que  $\mathcal{M}$  est *soluble* si  $\text{Ray}(\mathcal{M}, 1^-) = 1$ .

On note  $\text{MLCS}(\mathcal{R})$  la catégorie des  $\mathcal{R}$ -modules différentiels solubles.

**Proposition 9.7.** — *La catégorie  $\text{MLCS}(\mathcal{R})$  est abélienne.*

*Preuve.* — C’est une conséquence de la proposition 8.5 et du théorème 9.4.  $\square$

**Théorème 9.8 (Existence de la plus grande pente).** — *Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{R}$ -module différentiel soluble de rang  $\mu$ . Il existe un nombre rationnel  $\beta \geq 0$ , de dénominateur inférieur ou égal à  $\mu$ , tel que, pour  $\rho$  proche de 1, on ait  $\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho) = \rho^{\beta+1}$ .*

*Preuve.* — Ce résultat s’obtient facilement à partir de la proposition 9.3 : d’une part les pentes des “morceaux” d’une fonction concave affine par morceaux forment une suite décroissante et, d’autre part, une suite minorée (par 0) et décroissante de nombres rationnels de dénominateurs bornés est stationnaire.  $\square$

**Définition 9.9.** — Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{R}$ -module différentiel soluble. Le nombre rationnel  $\beta$  du théorème précédent s’appelle la *plus grande pente* de  $\mathcal{M}$  et se note  $\text{pt}(\mathcal{M})$ .

## CHAPITRE IV LA THÉORIE FORMELLE

Dans cette section, le corps  $K$  est muni de la valuation triviale et nous munissons le corps  $K((x))$  de sa valuation  $x$ -adique notée  $v_x$ . Notre but est d’étudier les  $K((x))$ -modules différentiels. Pour alléger les notations, nous poserons  $\mathfrak{D} = K((x))\langle D \rangle$  ou  $\mathfrak{D}_K = K((x))\langle D \rangle$  en précisant le corps des constantes en cas de besoin.

**Remarque 9.10.** — Pour insister sur les analogies avec le reste de ce cours, nous utiliserons parfois la valeur absolue de  $K((x))$  définie par  $|x|_\rho = \rho < 1$ . Les différentes valeurs du nombre  $\rho$  conduisant au même résultat, il n’y a pas de raison, ici, de le faire varier. Il sera fixé une fois pour toute dans cette section. Avec ces conventions, on a  $|a|_\rho = \rho^{v_x(a)}$ , pour  $a$  dans  $K((x))$ .

### 10. Modules différentiels singuliers-réguliers

**Définition 10.1.** — On dit que le  $K((x))$ -module différentiel  $\mathcal{M}$  est *singulier-régulier* si son rayon de convergence  $\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho)$  est maximum, c’est-à-dire égal à  $\rho$ .

Dans ce cas particulier, le corollaire 8.8 s’écrit

**Proposition 10.2.** — *Soit  $\mathcal{M}$  un  $K((x))$ -module différentiel de rang  $\mu$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- 1)  $\mathcal{M}$  est singulier-régulier,
- 2) L’équation différentielle  $D^\mu(m) = a_{\mu-1}D^{\mu-1}(m) + \dots + a_0m$  satisfaite par un (et alors par tout) vecteur cyclique  $m$  de  $\mathcal{M}$  vérifie  $v_x(a_i) \geq i - \mu$  (condition de Fuchs) .
- 3) Si  $G_s$  est la matrice qui représente  $D^s$  dans une base cyclique de  $\mathcal{M}$ , on a  $v_x(x^s G_s) \geq 0$  pour tout  $s \geq 0$ .

4) Si  $G_s$  est la matrice qui représente  $D^s$  dans une base quelconque de  $\mathcal{M}$ , il existe une constante  $c$  (négative en général) telle que  $v_x(x^s G_s) \geq c$  pour tout  $s \geq 0$ .

**Remarque 10.3.** — La condition 2) est la définition classique d'un point singulier-régulier.

La condition 3) signifie que  $\mathcal{M}$  a une base dans laquelle la matrice qui représente la dérivation  $xD$  a ses coefficients dans  $K[[x]]$ .

**Théorème 10.4.** — Tout  $K((x))$ -module différentiel singulier-régulier  $\mathcal{M}$  possède une base dans laquelle la dérivation  $xD$  est représentée par une matrice constante.

*Preuve.* — D'après la condition 3) de la proposition 10.2, il existe une base  $\epsilon$  de  $\mathcal{M}$  dans laquelle la dérivation  $xD$  est représentée par une matrice :

$$xG = \sum_{i=0}^{\infty} A_i x^i.$$

On cherche une base de  $\mathcal{M}$  dans laquelle la dérivation  $xD$  est représentée par la matrice constante  $A_0$ . D'après la formule (21), il suffit pour cela de trouver une matrice  $H$ , inversible dans  $\text{Mat}(\mu, K((x)))$ , telle que  $xD(H) = xG H - H A_0$ . On la cherche sous la forme  $H = \mathbf{I} + \sum_{i=1}^{\infty} H_i x^i$ . Elle est alors inversible par construction et, pour tout  $i \geq 0$  on doit avoir :

$$(37) \quad i H_i = A_0 H_i - H_i A_0 + \sum_{j=0}^{i-1} A_{i-j} H_j.$$

Cette relation est trivialement vérifiée pour  $i = 0$  et permet de trouver la matrice  $H_i$  par récurrence à condition que l'application  $H \mapsto (i \mathbf{I} - A_0)H - H A_0$  soit, pour chaque indice  $i > 0$ , une bijection de l'ensemble  $\text{Mat}(\mu, K)$ , des  $\mu \times \mu$  matrices à coefficients dans  $K$ , dans lui-même.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier le résultat "classique" suivant :

- Soit  $P$  et  $Q$  deux matrices de  $\text{Mat}(\mu, K)$  et  $\text{Mat}(\nu, K)$  respectivement. L'endomorphisme  $H \mapsto PH - HQ$ , du  $K$ -espace vectoriel des  $\mu \times \nu$  matrices à coefficients dans  $K$ , a pour valeurs propres les  $\mu\nu$  différences entre une des  $\mu$  valeurs propres de  $P$  et une des  $\nu$  valeurs propres de  $Q$ .

En remarquant qu'un endomorphisme est bijectif si (et seulement si) aucune de ses valeurs propres n'est nulle, on constate que le théorème sera démontré si nous pouvons choisir la base  $\epsilon$  de telle sorte qu'aucune des différences des valeurs propres de la matrice  $A_0$  ne soit un entier non nul.

Pour cela il suffit de faire un certain nombre de changements de base qui gardent les propriétés de la matrice  $G$  tout en diminuant de 1 l'une des valeurs propres  $\lambda$  de la matrice  $A_0$ . Ces changements de base sont appelés *transformations de cisaillement*. Si le corps  $K$  est algébriquement clos, Ils consistent à faire successivement les changements de base qui transforment la matrice représentant la dérivation  $xD$  de la façon suivante :

1.  $xG \mapsto xC^{-1}GC$  où la matrice constante  $C$  est inversible et choisie pour que matrice  $C^{-1}A_0C$  soit sous la forme réduite  $\begin{pmatrix} \Gamma & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}$ , la matrice  $\Gamma$  (resp.  $\Delta$ ) correspondant au bloc de Jordan de la valeur propre  $\lambda$  (resp. des autres valeurs propres).
2.  $xG \mapsto xH^{-1}(GH - D(H))$  avec  $H = \begin{pmatrix} x\mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}$ . Un calcul simple montrant que la nouvelle matrice de dérivation est de la forme que nous cherchions :  

$$xG = \begin{pmatrix} \Gamma - \mathbf{I} & \star \\ 0 & \Delta \end{pmatrix} + xA_1 + \dots$$

(il peut arriver au cours de ce processus que la valeur propre de  $\Gamma$  devienne égale à une valeur propre de  $\Delta$ . Dans ce cas, on ne pourra peut-être pas faire disparaître la matrice constante du terme que nous avons noté  $\star$ ).

Dans le cas où le corps  $K$  n'est pas algébriquement clos, on peut faire les mêmes opérations mais en traitant simultanément les valeurs propres qui sont algébriques conjuguées.  $\square$

**Exercice 10.5.** — On suppose le corps  $K$  algébriquement clos.

1. Vérifier que le changement de base associé à la matrice  $H = x^{-n}\mathbf{I}$  permet d'augmenter toutes les valeurs propres de la matrice  $A_0$  de  $n$ .
2. En déduire que, dans le théorème 10.4, on peut imposer, en plus, que la matrice constante a ses valeurs propres dans un système  $\mathfrak{S}$  de représentant de  $K/\mathbb{Z}$  fixé à l'avance.
3. Montrer que si, dans deux bases de  $\mathcal{M}$ , la dérivation est représenté par des matrices constantes  $A$  et  $B$  dont les valeurs propres appartiennent à  $\mathfrak{S}$ , ces deux matrices sont semblables sur  $K$  (il existe une matrice constante et inversible  $H$  telle que  $B = H^{-1}AH$ ).
4. Soit  $\mathfrak{e}$  une base de  $\mathcal{M}$  dans laquelle la dérivation  $xD$  est représentée par une matrice :  $xG = \sum_{i=0}^{\infty} A_i x^i$ . Montrer que les valeurs propres de la matrice  $A_0$  sont, modulo  $\mathbb{Z}$  et à l'ordre près, indépendantes de la base  $\mathfrak{e}$ .

**Définition 10.6.** — Soit  $\mathfrak{e}$  une base de  $\mathcal{M}$  dans laquelle la dérivation  $xD$  est représentée par une matrice  $xG = \sum_{i=0}^{\infty} A_i x^i$ . Les valeurs propres, modulo  $\mathbb{Z}$  et à l'ordre près, de la matrice  $A_0$  sont appelés *exposants* du module différentiel  $\mathcal{M}$ .

**Théorème 10.7.** — Si le corps  $K$  est algébriquement clos, tout  $K((x))$ -module différentiel singulier-régulier  $\mathcal{M}$  est isomorphe à la somme directe de modules

$$\mathfrak{D}/\mathfrak{D}(xD - \lambda)^{\nu_\lambda}$$

où les  $\lambda$  sont des exposants (pas forcément tous différents) de  $\mathcal{M}$  et où la somme des  $\nu_\lambda$  correspondant à un même exposant est égal à l'ordre de cet exposant (comme valeur propre de la matrice  $A_0$ ).

*Preuve.* — Il suffit, par un changement de base constant, de mettre la matrice constante représentant la dérivation sous forme de Jordan.  $\square$

### 11. Le polygone de Newton d'un polynôme différentiel

Nous appliquons les résultats du paragraphe 7.3. Rappelons que le corps différentiel  $F = K((x))$  est muni de la valeur absolue  $|\cdot|_\rho$  associée à valuation  $x$ -adique et normalisée par  $|x| = \rho < 1$ . En particulier, on a

On munit donc  $\mathfrak{D} = K(x)\langle D \rangle$  de la valeur absolue  $|\cdot|_{\rho,r}$ .

**Définition 11.1.** — Soit  $L = \sum_{i=0}^\mu a_i D^i$  un polynôme différentiel de  $\mathfrak{D}$ . A chacun des monômes  $a_i D^i$ , nous associons le point  $(i, v_x(a_i) - i)$ . Le *polygone de Newton* de  $L$  est l'enveloppe convexe de ces points auxquels on ajoute les points  $(0, \min_i v_x(a_i) - i)$  et  $(0, \infty)$ .

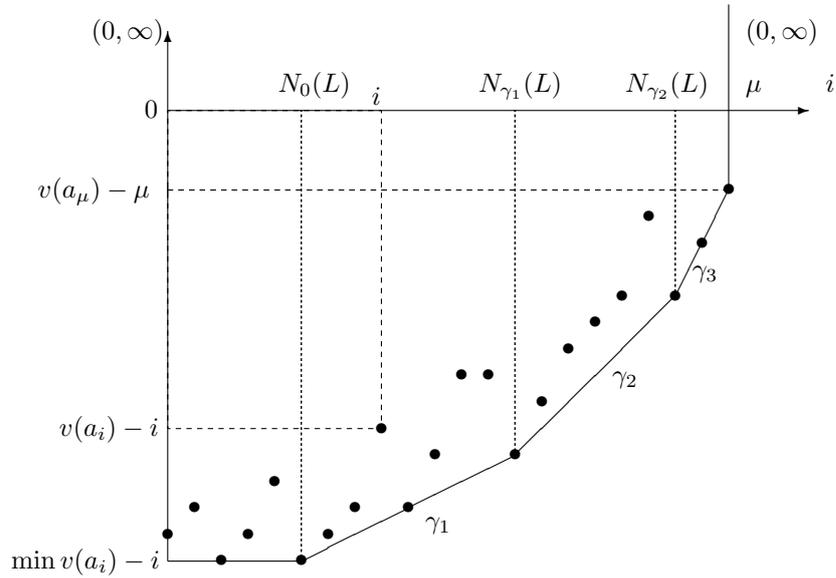


FIGURE 6. Un polygone de Newton qui a 4 pentes

C'est aussi l'enveloppe convexe de l'ensemble des points  $\{(i - j, v_x(a_i) - i + k)\}$  pour  $0 \leq j \leq i \leq \mu$  et  $k \geq 0$ .

**Exercice 11.2.** — Vérifier que, si  $L = \sum_{i=0}^\mu a_i D^i = \sum_{i=0}^\mu b_i (xD)^i$ , Le polygone de Newton de  $L$  est l'enveloppe convexe des points  $(i, v_x(b_i))$  auxquels on ajoute les points  $(0, \min_i v_x(b_i))$  et  $(0, \infty)$ .

**Définition 11.3.** — Les *pentés*  $\gamma_i$  de  $L$  sont les pentés des cotés non verticaux de son polynôme de Newton. La *multiplicité* de  $\gamma_i$  est la longueur du côté de pente  $\gamma_i$ .

Par définition, les pentés sont des nombres rationnels positifs ou nuls.

Dans la théorie formelle, le corps des restes  $K$  est de caractéristique nulle, donc  $\omega = 1$  et on peut toujours appliquer le théorème 8.6. Ceci permet de relier le rayon de

convergence et la plus grande des pentes du polygone de Newton associé à une base cyclique. Cela montrera en particulier que cette plus grande pente ne dépend pas de la base cyclique.

**Proposition 11.4.** — *Soit  $\mathcal{M}$  un  $K((x))$ -module différentiel. Si, en choisissant une base cyclique, on écrit  $\mathcal{M} = \mathfrak{D}/\mathfrak{D}L$  avec  $L$  dans  $\mathfrak{D}$ , alors la plus grande pente  $r(L)$  du polygone de Newton de  $L$  est égale à  $-\log_\rho(\frac{1}{\rho} \text{Ray}(\mathcal{M}, \rho)) \geq 0$ .*

*Preuve.* — On peut toujours choisir le polynôme différentiel  $L$  unitaire. Dans ce cas, on a  $v_x(a_\mu) = 0$  et la plus grande pente du polygone de Newton de  $L$  est égale à

$$\max_{0 \leq i < \mu} \frac{(v_x(a_\mu) - \mu) - (v_x(a_i) - i)}{\mu - i} = \max_{0 \leq i < \mu} \frac{-v_x(a_i)}{\mu - i} - 1.$$

et, en remarquant que  $v_x(a) = -\log_\rho(|a|_\rho)$ , le théorème 8.6 s'écrit :

$$\log_\rho(\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho)) = \min_{0 \leq i < \mu} \frac{v_x(a_i)}{\mu - i}. \quad \square$$

**Remarque 11.5.** — La condition 2) de la proposition 10.2 dit que le module différentiel  $\mathcal{M} = \mathfrak{D}/\mathfrak{D}L$  est singulier-régulier si et seulement si le polynôme différentiel  $L$  a une seule pente qui est nulle.

**Proposition 11.6.** — *L'ensemble des pentes d'un produit  $L = PQ$  est la réunion des pentes de  $P$  et de  $Q$ . La multiplicité d'une pente dans  $L$  est la somme des multiplicités qu'elle a dans  $P$  et dans  $Q$ .*

*Preuve.* — Il est facile de vérifier que les pentes de  $L$  sont les nombres  $\gamma_i$  pour lesquels  $N_{\gamma_i}(L) > n_{\gamma_i}(L)$  (voir définition 7.10), la multiplicité de  $\gamma_i$  étant  $N_{\gamma_i}(L) - n_{\gamma_i}(L)$ . La proposition est alors une conséquence immédiate du lemme 7.11.  $\square$

## 12. Décomposition suivant les pentes

**Proposition 12.1.** — *Soit  $L$  un polynôme différentiel de  $\mathfrak{D}$  et soit  $\gamma$  l'une de ses pentes. On note  $\nu$  la multiplicité de la pente  $\gamma$ . Alors il existe quatre polynômes différentiels  $P, P', Q$  et  $Q'$  de  $\mathfrak{D}$  tels que*

1. on a  $L = PQ = Q'P'$ .
2.  $P$  et  $P'$  sont de degré  $\nu$  en  $D$  et ont une unique pente égale à  $\gamma$  (cette pente est alors évidemment de multiplicité  $\nu$ ),
3. les pentes de  $Q$  et  $Q'$  sont toutes différentes de  $\gamma$ ,

Dans ces conditions, on a  $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}L = \mathfrak{D}/\mathfrak{D}Q \oplus \mathfrak{D}/\mathfrak{D}P = \mathfrak{D}/\mathfrak{D}Q' \oplus \mathfrak{D}/\mathfrak{D}P'$ .

*Preuve.* — Avec les notations du paragraphe 7.3 on a  $\|D\|_\gamma = \rho^{-\gamma} \geq 1 = \|D\|$ , on peut donc utiliser le lemme de Hensel à droite pour le polynôme différentiel  $L$  et le nombre  $\gamma$  (proposition 7.12). On obtient une décomposition  $L = P_1Q_1$  avec  $\deg_D(P_1) = N_\gamma(P_1) = N_\gamma(L)$ .

Si  $\gamma = 0$  c'est fini. Sinon, pour  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit, on a  $N_{\gamma-\varepsilon}(P_1) = n_\gamma(P_1) = n_\gamma(L)$ . Le lemme de Hensel à gauche pour le polynôme différentiel  $P_1$  le nombre  $\gamma - \varepsilon$  (proposition 7.13) donne une décomposition  $P_1 = PQ_2Q_1$  avec  $\deg_D(Q_2) =$

$N_{\gamma-\varepsilon}(P_1) = n_\gamma(L)$  et donc  $\deg_D(P) = \deg_D(P_1) - \deg_D(Q_2) = N_\gamma(L) - n_\gamma(L) = \nu$ . Par ailleurs, par construction, les pentes de  $Q_1$  sont toutes strictement supérieures à  $\gamma$  et celles de  $Q_2$  sont toutes inférieures à  $\gamma - \varepsilon$ . Donc, d'après la proposition 11.6, le polynôme  $Q = Q_2Q_1$  n'a aucune pente égale à  $\gamma$ . Ceci montre l'existence de la décomposition  $L = PQ$  avec les propriétés voulues. Pour la décomposition  $L = Q'P'$ , on fait la même preuve en échangeant gauche et droite.

Pour montrer la décomposition en somme directe, on remarque que les deux décompositions  $L = PQ = Q'P'$  correspondent à deux suites exactes :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathfrak{D}/\mathfrak{D}P \xrightarrow{\delta} \mathfrak{D}/\mathfrak{D}L \xrightarrow{\theta} \mathfrak{D}/\mathfrak{D}Q \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow \mathfrak{D}/\mathfrak{D}Q' \xrightarrow{\delta'} \mathfrak{D}/\mathfrak{D}L \xrightarrow{\theta'} \mathfrak{D}/\mathfrak{D}P' \rightarrow 0 \end{aligned}$$

(l'application  $\theta$  est la projection naturelle et l'application  $\delta'$  est donnée par  $S \mapsto SP'$ ).

Soit  $S$  un polynôme différentiel dont l'image  $\bar{S}$  dans  $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}Q'$  vérifie  $\theta_*\delta'(\bar{S}) = 0$ . Cela signifie que  $SP'$  appartient à  $\mathfrak{D}Q$ . L'ensemble des polynômes différentiels vérifiant cette condition est un idéal à gauche  $\mathfrak{J}$  de  $\mathfrak{D}$  qui contient  $Q'$  car  $Q'P' = L = PQ$ . L'anneau  $\mathfrak{D}$  est euclidien (il y a une division euclidienne non commutative) donc principal. Soit  $R$  un générateur de l'idéal  $\mathfrak{J}$ . Comme le polynôme différentiel  $R$  divise  $Q'$ , il ne peut avoir de pente égale à  $\gamma$  (proposition 11.6). Comme, par définition il existe  $T$  tel que  $RP' = TQ$ , on a

$$\begin{aligned} N_\gamma(T) - n_\gamma(T) &= N_\gamma(TQ) - n_\gamma(TQ) \\ &= N_\gamma(RP') - n_\gamma(RP') = N_\gamma(P') - n_\gamma(P') = \deg_D(P') \end{aligned}$$

D'où  $\deg_D(T) \geq \deg_D(P')$  c'est-à-dire  $\deg_D(R) \geq \deg_D(Q) = \deg_D(Q')$  et donc  $R = aQ'$  pour un élément  $a$  de  $K((x))$ .

On vient de démontrer que  $Q'$  est un générateur de  $\mathfrak{J}$ . Cela signifie que  $\theta_*\delta'(\bar{S}) = 0$  implique  $\bar{S} = 0$  et donc l'application  $\mathfrak{D}$ -linéaire  $\theta_*\delta'$ , entre deux  $\mathfrak{D}$ -modules libres de dimension finie, est injective et par suite surjective. L'application  $\delta'_*(\theta_*\delta')^{-1}$  est un relèvement de  $\theta$  ce qui montre que la première suite exacte est scindée. On fait de même pour la deuxième.  $\square$

**Corollaire 12.2.** — Soit  $\mathcal{M}$  un  $K((x))$ -module différentiel. Il existe des polynômes différentiels  $P_i$  ayant chacun une seule pente  $\gamma_i$  avec  $\gamma_i \neq \gamma_j$  pour  $i \neq j$ , tels que  $\mathcal{M} = \bigcup_i \mathfrak{D}/\mathfrak{D}P_i$ .

*Preuve.* — On utilise le théorème du vecteur cyclique pour se trouver dans la situation  $\mathcal{M} = \mathfrak{D}/\mathfrak{D}L$  dans laquelle une utilisation répétée de la proposition précédente permet de conclure.  $\square$

**Remarque 12.3.** — Les nombres  $\gamma_i$  sont les *pent*es du module différentiel  $\mathcal{M}$ . Ce sont les pentes d'un polynôme différentiel  $L$  tel que  $\mathcal{M} = \mathfrak{D}/\mathfrak{D}L$ . On vérifie qu'elles ne dépendent pas du choix de  $L$  en remarquant que l'injection  $0 \rightarrow \mathfrak{D}/\mathfrak{D}P_i \rightarrow \mathfrak{D}/\mathfrak{D}L$  implique que  $L = P_iQ_i$  et donc que  $\gamma_i$  est une pente de  $L$  de multiplicité au moins  $\deg_D(P_i)$ . Comme la somme des multiplicités doit être égale à  $\deg_D(L)$ , le "au moins" est aussi un "au plus".

### 13. Le théorème de Turrittin

Rappelons le résultat principal sur les extensions algébriques d'un corps de séries formelles en caractéristique nulle (voir [24] par exemple)

**Théorème 13.1 (Puiseux).** — Soit  $K$  un corps de caractéristique nulle et soit  $P(X)$  un polynôme (commutatif) de degré  $n$  à coefficients dans  $K((x))$ . Il existe un nombre  $e \geq 1$ , une extension finie  $H$  de  $K$  et un élément  $\eta$  de  $H((y))$  avec  $y^e = x$  tel que  $P(\eta) = 0$ . Si  $e > 1$ , on a aussi  $P(\zeta\eta) = 0$  pour n'importe quelle racine  $e$ -ième de l'unité  $\zeta$ .

Ceci va nous permettre de trouver la structure des  $K((x))$ -modules différentiels.

**Théorème 13.2.** — Soit  $\mathcal{M}$  un  $K((x))$ -module différentiel de rang  $\mu$ . Il existe une extension finie  $H$  de  $K$ , un nombre  $e$  (qui divise  $\mu!$ ), des polynômes différentiels  $P_i$  de  $H((y))\langle D \rangle$ , avec  $y^e = x$ , satisfaisant la condition de Fuchs (proposition 10.2-2) c'est-à-dire ayant une seule pente qui est nulle, et des éléments  $\eta_i$  de  $H((y))$  tels que

$$\mathcal{M} = \bigoplus_i H((y))\langle D \rangle / H((y))\langle D \rangle P_i(D - \eta_i)$$

*Preuve.* — Puisque  $K((x))$  est un corps,  $\mathcal{M}$  a une base cyclique et peut se mettre sous la forme  $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}L$  où  $L$  est un polynôme différentiel unitaire ( $L = \sum_{i=0}^{\mu} a_i D^i$  avec  $a_{\mu} = 1$ ).

Par construction,  $v_x(a_i)$  est un entier. Donc la plus grande pente  $r(L)$  du polygone de Newton de  $L$  appartient à  $\frac{1}{d}\mathbb{Z}$  avec  $d \leq \mu$ . On démontre le théorème par une double récurrence sur les couples  $(\deg_D(L), r(L))$  ordonnés par l'ordre lexicographique.

Pour  $r(L) = 0$ , le module différentiel  $\mathcal{M}$  est singulier-régulier et  $L$  satisfait la condition de Fuchs donc le résultat est évident.

Pour  $\deg_D(L) = 1$ , le résultat est aussi évident car on a  $L = D - \eta = P(D - \eta)$  avec  $P$  satisfaisant évidemment la condition de Fuchs.

D'après le corollaire 12.2, on peut supposer que  $L$  n'a qu'une seule pente  $\gamma > 0$ . D'après le théorème 13.1, le polynôme (commutatif)  $L(X)$  a toutes ses racines dans une extension  $H((y))$  du corps  $K((x))$ . Soit  $\eta$  une racine de  $L(X)$ .

Puisque  $L$  n'a qu'une seule pente  $\gamma$ , pour  $0 \leq i \leq \mu$ , on a  $v_x(a_i) - i \geq \gamma i + v_x(a_0) - 0$  avec égalité pour  $i = 0$  et  $i = \mu$ . De  $v_x(a_{\mu}) = 0$ , on tire  $v_x(a_0) = -(\gamma + 1)\mu$  et  $v_x(a_i) \geq (\gamma + 1)(i - \mu)$  puis  $v_x(\eta)\mu = v_x(a_0)$  c'est-à-dire  $v_x(\eta) = -(\gamma + 1) < -1$ .

Considérons l'anneau  $A = H((y))$  muni de la valeur absolue  $|\cdot| = \mathfrak{Efp}(-v_x(\cdot))$  et de la dérivation  $D = d/dx$ . On a  $|y| = \mathfrak{Efp}(-1/e)$ ,  $|\eta| = \mathfrak{Efp}(1 + \gamma)$  et  $D(y) = \frac{1}{e}y^{1-e}$  si bien que  $|D(y)| = \mathfrak{Efp}1 - 1/e = \mathfrak{Efp}(1)|y|$ . Il vient  $\|D\|_{\text{op},A} = \mathfrak{Efp}(1) < |\eta|$ . On peut donc appliquer le lemme 7.5 à  $\eta$  et à l'anneau  $H((y))$ . Comme, par construction,  $L(\eta) = 0$ , ce lemme affirme, en particulier, que le terme constant  $c_0$  du polynôme différentiel  $L(D + \eta)$  est de valuation  $x$ -adique strictement plus grande que celui de  $L$ .

Deux cas peuvent se produire :

1) Le polygone de Newton du polynôme différentiel  $L(D + \eta)$  (qui appartient à  $H((y))\langle D \rangle$ ) a au moins deux pentes.

D'après le corollaire 12.2, on peut décomposer le module différentiel associé en une

somme directe de modules différentiels de dimension strictement inférieure à  $\deg_D(L)$ . Pour chacun de ceux-ci, le résultat résulte de l'hypothèse de récurrence. Le résultat pour  $\mathcal{M}$  s'en déduit par un calcul simple.

2) Le polygone de Newton du polynôme différentiel  $L(D + \eta)$  a une seule pente.

Dans ce cas cette pente est strictement inférieure à la pente  $\gamma$  du polygone de Newton de  $L$ . On ne peut pas encore conclure car les pentes sont des nombres rationnels et une suite strictement décroissante de nombres rationnels ne tend pas forcément vers 0 ! Il faut donc pouvoir contrôler la ramification.

On remarque que, dans le cas 2), le polynôme (commutatif)  $L(X + \eta)$  a, lui aussi, des pentes plus petites que  $\gamma$  (l'analogue commutatif du lemme 7.5 est facile). Si  $\eta'$  est une autre racine de l'équation  $L(X) = 0$ , on a  $v_x(\eta' - \eta) > v_x(\eta) = -(\gamma + 1)$ . Ce cas ne peut se produire que si  $y = x$  (cas non ramifié). En effet, sinon,  $\eta'(y) = \eta(\zeta y)$  pour  $\zeta^e = 1$  est aussi racine de l'équation  $L(X) = 0$  et a même valuation que  $\eta$ . On constate donc que la plus grande pente a diminué d'au moins  $\frac{1}{\mu}$  ce qui permet de conclure.  $\square$

**Remarque 13.3.** — On peut montrer que la décomposition du théorème est unique à permutation et isomorphisme près. En particulier, les pentes de  $\mathcal{M}$  sont données par les valuations  $x$ -adiques des  $\eta_i$  (avec  $v_x(y) = 1/d$ ).

**Corollaire 13.4 (Turrittin).** — Soit  $\mathcal{M}$  un  $K((x))$ -module différentiel de rang  $\mu$  et soit  $G$  la matrice de  $D$  dans une base quelconque de  $\mathcal{M}$ . Il existe une extension finie  $H$  de  $K$ , un nombre  $d$  (qui divise  $\mu!$ ), une matrice inversible  $A$  à coefficients dans  $H((y))$  avec  $y^d = x$ , une matrice constante  $C$  mise sous forme de Jordan et une matrice diagonale  $P$  qui commute avec la matrice  $C$  et dont les coefficients (de la diagonale) sont des polynômes à coefficients dans  $H$  nuls en 0 tels que la matrice

$$X(y) = A(y) y^C \exp\left(P\left(\frac{1}{y}\right)\right)$$

soit solution de l'équation différentielle  $D(X) = GX$ .

*Preuve.* — La matrice  $A$  représente un changement de base.

Le théorème 13.2 permet (après un changement de base) de se ramener au cas du module différentiel  $H((y))\langle D \rangle / H((y))\langle D \rangle L(D - \eta)$  avec  $L$  satisfaisant la condition de Fuchs. Le théorème 10.4 montre que, dans une base convenable, le module différentiel  $H((y))\langle D \rangle / H((y))\langle D \rangle L(D)$  a une solution de la forme  $y^C$ .

Notons  $\int \eta$  une primitive de  $\eta$ . On a  $(D - \eta)(f \exp(\int \eta)) = D(f) \exp(\int \eta)$ , d'où

$$L(D - \eta)(f \exp(\int \eta)) = L(D)(f) \exp(\int \eta),$$

et on constate que le module différentiel  $H((y))\langle D \rangle / H((y))\langle D \rangle L(D - \eta)$  a bien, dans une base convenable, une solution de la forme  $y^C \exp(\int \eta)$ .

Il ne reste plus qu'à remarquer que  $\int \eta = \frac{1}{y}P\left(\frac{1}{y}\right) + c + \eta^+$  où  $P$  est un polynôme, où  $c$  est une constante et où  $\eta^+$  appartient à  $yH[[y]]$  de telle sorte que  $\exp(\eta^+)$  appartient aussi à  $H[[y]]$  et correspond à un changement de base autorisé. De son côté,  $c$  est une constante d'intégration que l'on peut choisir nulle.  $\square$

## CHAPITRE V

### LA THÉORIE DE DWORK-ROBBA

Nous présentons les principaux résultats obtenus par Dwork et Robba concernant la catégorie  $\text{MLC}(E_\rho)$ . Dans ce chapitre,  $K$  est un corps valué complet de caractéristique nulle. On utilisera aussi l'extension  $\Omega$  de  $K$  introduite au paragraphe 3.3 pour parler des points génériques.

#### 14. Décompositions liées au rayon de convergence

Le premier résultat remarquable montre qu'un  $E_\rho$ -module différentiel dont les solutions au voisinage du point générique n'ont pas toutes le même rayon de convergence n'est pas irréductible.

Pour  $0 < r \leq \rho$ , on munit l'anneau  $E_\rho\langle D \rangle$  de la norme d'algèbre

$$\left\| \sum_i a_i(x) D^i \right\|_{\text{op}, \rho, r} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_i |i! a_i|_\rho r^{-i}.$$

C'est la norme d'opérateur sur l'anneau  $\mathcal{B}_{t_\rho}(r)$  des fonctions analytiques bornées dans le disque  $D(t_\rho, r)$ , à coefficients dans le corps  $\Omega$ , muni de la valeur absolue  $|f|_r = \sup_{x \in D(t_\rho, r)} |f(x)|$ . En particulier, c'est une norme d'algèbre.

Soit  $\mathcal{M}$  un  $E_\rho$ -module différentiel. Pour faire les calculs, nous devons choisir une présentation de  $\mathcal{M}$  c'est-à-dire une famille génératrice  $\mathfrak{e}$  du  $E_\rho\langle D \rangle$ -module  $\mathcal{M}$ . Comme  $E_\rho$  est un corps, le théorème du vecteur cyclique 6.14 dit que l'on peut prendre une famille à un élément. C'est le choix qui a été fait dans les travaux originaux de Dwork [20], de Robba [42] et dans [11] mais cela ne facilite pas vraiment les démonstrations. Nous trouvons plus avantageux de faire le choix suivant

$\mathfrak{e}$  est une base du  $E_\rho$ -espace vectoriel  $\mathcal{M}$ .

Notons  $\|\cdot\|_{\rho, r, \mathfrak{e}}$  la semi-norme sur  $\mathcal{M}$  quotient de la norme  $\|\cdot\|_{\text{op}, \rho, r}$  et  $\mathcal{T}_{\rho, r}$  la topologie associée. En vertu de la proposition 7.8, cette topologie est indépendante du choix de la famille génératrice  $\mathfrak{e}$ .

**Remarque 14.1.** — Pour  $m = \sum P_i \mathfrak{e}_i$  dans  $\mathcal{M}$  et  $a$  dans  $E_\rho$ , on a

$$\|am\|_{\rho, r, \mathfrak{e}} \leq \max_i \|a P_i\|_{\text{op}, \rho, r} = |a|_\rho \max_i \|P_i\|_{\text{op}, \rho, r}.$$

On en déduit que  $\|am\|_{\rho, r, \mathfrak{e}} \leq |a|_\rho \|m\|_{\rho, r, \mathfrak{e}}$ . Comme  $E_\rho$  est un corps, cette inégalité est en fait une égalité et  $\|\cdot\|_{\rho, r, \mathfrak{e}}$  est une  $E_\rho$ -semi-norme.

En général, la topologie  $\mathcal{T}_{\rho, r}$  n'est pas séparée. Notons

$$\overline{\mathcal{O}}_{\rho, r}(\mathcal{M}) = \{m \in \mathcal{M}; \|m\|_{\rho, r, \mathfrak{e}} = 0\}$$

l'adhérence de 0 pour  $\mathcal{T}_{\rho, r}$ . Pour  $m = \sum P_i \mathfrak{e}_i$  dans  $\mathcal{M}$  et  $P$  dans  $E_\rho\langle D \rangle$ , on a

$$\|Pm\|_{\rho, r, \mathfrak{e}} = \left\| \sum P P_i \mathfrak{e}_i \right\|_{\rho, r, \mathfrak{e}} \leq \max_i \|P P_i\|_{\text{op}, \rho, r} \leq \|P\|_{\text{op}, \rho, r} \max_i \|P_i\|_{\text{op}, \rho, r}.$$

En prenant la borne inférieure sur tous les  $(P_i)$  possibles, on trouve

$$\|Pm\|_{\rho,r,\epsilon} \leq \|P\|_{\text{op},\rho,r} \|m\|_{\rho,r,\epsilon}.$$

En particulier, on constate que  $\overline{O}_{\rho,r}(\mathcal{M})$  est un  $E_\rho\langle D \rangle$ -module et un sous- $E_\rho$ -espace vectoriel de  $\mathcal{M}$ . Comme  $\mathcal{M}$  est de dimension finie sur  $E_\rho$ , il en est de même de  $\overline{O}_{\rho,r}(\mathcal{M})$ . On constate donc que  $\overline{O}_{\rho,r}(\mathcal{M})$  est un  $E_\rho$ -sous-module différentiel de  $\mathcal{M}$  (le fait que  $E_\rho$  soit un corps est ici essentiel). Le résultat suivant repose sur le fait que  $E_\rho$  est complet.

**Théorème 14.2** ([20],[42]). — Soit  $0 < r \leq \rho$  et soit  $\mathcal{M}$  un  $E_\rho$ -module différentiel.

1.  $\text{Hom}_{E_\rho\langle D \rangle}(\mathcal{M}/\overline{O}_{\rho,r}(\mathcal{M}), \mathcal{B}_{t_\rho}(r))$  est isomorphe à  $\text{Hom}_{E_\rho\langle D \rangle}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{t_\rho}(r))$ .
2.  $\mathcal{M}/\overline{O}_{\rho,r}$  est soluble dans  $\mathcal{B}_{t_\rho}(r)$  et donc  $\text{Ray}(\mathcal{M}/\overline{O}_{\rho,r}(\mathcal{M}), \rho) \geq r$ .
3. On a  $\overline{O}_{\rho,r}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$  si et seulement si  $\text{Hom}_{E_\rho\langle D \rangle}(\mathcal{M}, \mathcal{A}_{t_\rho}(r)) = 0$ .

*Preuve.* —

1.– La suite exacte (de  $\text{MLC}(E_\rho)$ )  $0 \rightarrow \overline{O}_{\rho,r}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/\overline{O}_{\rho,r}(\mathcal{M}) \rightarrow 0$  donne une suite exacte de  $\Omega$ -espaces vectoriels :

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{E_\rho\langle D \rangle}(\mathcal{M}/\overline{O}_{\rho,r}(\mathcal{M}), \mathcal{B}_{t_\rho}(r)) \rightarrow \text{Hom}_{E_\rho\langle D \rangle}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{t_\rho}(r)) \xrightarrow{\tau} \text{Hom}_{E_\rho\langle D \rangle}(\overline{O}_{\rho,r}(\mathcal{M}), \mathcal{B}_{t_\rho}(r))$$

où  $\tau$  est la restriction des solutions. Pour démontrer le point 1., il suffit de montrer que cette restriction est nulle c'est-à-dire que toute solution  $s$  de  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{B}_{t_\rho}(r)$  s'annule sur  $\overline{O}_{\rho,r}(\mathcal{M})$ .

Soit  $m$  un élément de  $\overline{O}_{\rho,r}(\mathcal{M})$  et  $s$  une solution, c'est-à-dire un homomorphisme de  $E_\rho\langle D \rangle$ -module, de  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{B}_{t_\rho}(r)$ . Par définition de la norme quotient, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe des polynômes différentiels  $P_i$  de  $E_\rho\langle D \rangle$  tel que  $m = \sum P_i \mathbf{e}_i$  et  $\max_i \|P_i\|_{\text{op},\rho,r} \leq \epsilon$ . il vient alors :

$$|s(m)|_r = \left| \sum P_i s(\mathbf{e}_i) \right|_r \leq \max_i \{ \|P_i\|_{\text{op},\rho,r} |s(\mathbf{e}_i)|_r \} \leq \epsilon \max_i |s(\mathbf{e}_i)|_r.$$

Ceci ayant lieu pour tout  $\epsilon$ , on constate que  $|s(m)|_r = 0$ , c'est-à-dire  $s(m) = 0$ , ce que nous voulions démontrer.

2.– Si  $m$  appartient à  $\mathcal{M}$ , on note  $\overline{m}$  son image dans  $\mathcal{M}/\overline{O}_{\rho,r}(\mathcal{M})$ . Les images  $\overline{\mathbf{e}}_i$  des  $\mathbf{e}_i$  forment une famille génératrice de  $\mathcal{M}/\overline{O}_{\rho,r}(\mathcal{M})$ . Soit  $\overline{m} = \sum P_i \overline{\mathbf{e}}_i$ , avec  $P_i$  dans  $E_\rho\langle D \rangle$ , un élément de  $\mathcal{M}/\overline{O}_{\rho,r}(\mathcal{M})$ . Choisissons un élément  $m$  de  $\mathcal{M}$  dont  $\overline{m}$  est l'image. Par construction,  $m - \sum P_i \mathbf{e}_i$  appartient à  $\overline{O}_{\rho,r}(\mathcal{M})$  et on peut l'écrire  $\sum Q_i \mathbf{e}_i$  avec des polynômes différentiels  $Q_i$  de norme aussi petite qu'on veut. Si  $\overline{m} \neq 0$ , les  $P_i$  ne sont pas tous nuls et on peut imposer  $\|Q_i\|_{\text{op},\rho,r} < \max_j \|P_j\|_{\text{op},\rho,r}$ . La décomposition  $m = \sum (P_i + Q_i) \mathbf{e}_i$  montre alors que

$$\|m\|_{\rho,r,\epsilon} \leq \max_i \|P_i + Q_i\|_{\text{op},\rho,r} = \max_i \|P_i\|_{\text{op},\rho,r}.$$

En prenant la borne inférieure sur toutes les décompositions  $\overline{m} = \sum P_i \overline{\mathbf{e}}_i$ , on trouve :

$$\|m\|_{\rho,r,\epsilon} \leq \|\overline{m}\|_{\rho,r,\overline{\mathbf{e}}}$$

(on vérifie facilement que l'on a en fait égalité) et on en déduit que

$$\|\bar{m}\|_{\rho,r,\bar{\epsilon}} = 0 \implies \|m\|_{\rho,r,\epsilon} = 0 \implies m \in \overline{O}_{\rho,r}(\mathcal{M}) \implies \bar{m} = 0.$$

La semi-norme  $\|\cdot\|_{\rho,r,\epsilon}$  est donc une norme sur le  $E_\rho$ -espace vectoriel de dimension finie  $\mathcal{M}/\overline{O}_{\rho,r}(\mathcal{M})$ . Comme le corps  $E_\rho$  est complet, d'après le théorème 1.14 elle est équivalente à n'importe quelle autre norme sur  $\mathcal{M}/\overline{O}_{\rho,r}(\mathcal{M})$ . Par exemple à la norme associée à la base  $\epsilon$ :

$$\left\| \sum a_i \bar{\epsilon}_i \right\|_\epsilon \stackrel{\text{déf}}{=} \max_i |a_i|_\rho$$

Il existe donc une constante  $\kappa$  telle que, pour tout  $\bar{m}$  dans  $\mathcal{M}/\overline{O}_{\rho,r}(\mathcal{M})$  on ait

$$(38) \quad \|\bar{m}\|_\epsilon \leq \kappa \|\bar{m}\|_{\rho,r,\epsilon}.$$

La majoration dans l'autre sens est moins profonde. En effet, la restriction de la norme  $\|\cdot\|_{\text{op},\rho,r}$  à  $E_\rho$  n'est autre que la valeur absolue  $|\cdot|_\rho$  et la décomposition  $\bar{m} = \sum a_i \bar{\epsilon}_i$  est une décomposition particulière de  $\bar{m}$  dans la famille  $E_\rho\langle D \rangle$ -génératrice  $\bar{\epsilon}$  si bien que l'on a

$$\|\bar{m}\|_{\rho,r,\epsilon} \leq \|\bar{m}\|_\epsilon.$$

La majoration (38) donne pour tout entier  $n$

$$\left\| \frac{1}{n!} D^n(\bar{\epsilon}_i) \right\|_\epsilon \leq \kappa \left\| \frac{1}{n!} D^n(\bar{\epsilon}_i) \right\|_{\rho,r,\epsilon} \leq \kappa \left\| \frac{1}{n!} D^n \right\|_{\text{op},\rho,r} = \kappa r^{-n}.$$

Autrement dit, il existe des éléments analytiques  $a_{i,j}$  de  $E_\rho$  tels que

$$\frac{1}{n!} D^n(\bar{\epsilon}_i) = \sum_j a_{i,j} \bar{\epsilon}_j \quad , \quad |a_{i,j}|_\rho \leq \kappa r^{-n}.$$

Soit maintenant  $s$  une solution de  $\mathcal{M}/\overline{O}_{\rho,r}(\mathcal{M})$  dans l'anneau  $\Omega[[x - t_\rho]]$ . Posons

$$s(\bar{\epsilon}_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{i,n} (x - t_\rho)^n.$$

On trouve :

$$\begin{aligned} \alpha_{i,n} &= \frac{1}{n!} D^n(s(\bar{\epsilon}_i))(t_\rho) = s\left(\frac{1}{n!} D^n(\bar{\epsilon}_i)\right)(t_\rho) \\ &= s\left(\sum_j a_{i,j} \bar{\epsilon}_j\right)(t_\rho) = \left(\sum_j a_{i,j} s(\bar{\epsilon}_j)\right)(t_\rho) = \sum_j a_{i,j}(t_\rho) s(\bar{\epsilon}_j)(t_\rho) \end{aligned}$$

ce qui donne la majoration

$$\begin{aligned} |\alpha_{i,n}| &\leq \max_j \left\{ |a_{i,j}(t_\rho)| |s(\bar{\epsilon}_j)(t_\rho)| \right\} = \max_j \left\{ |a_{i,j}|_\rho |\alpha_{j,0}| \right\} \\ &\leq \kappa r^{-n} \max_j |\alpha_{j,0}| \end{aligned}$$

et on constate que les séries entières  $s(\bar{\epsilon}_i)$  appartiennent à  $\mathcal{B}_{t_\rho}(r)$ . On constate donc que  $s$  est une solution dans  $\mathcal{B}_{t_\rho}(r)$ .

3.- Si  $\text{Hom}_{E_\rho\langle D \rangle}(\mathcal{M}, \mathcal{A}_{t_\rho}(r)) = 0$ , on a  $\text{Hom}_{E_\rho\langle D \rangle}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{t_\rho}(r)) = 0$  et donc, d'après le résultat 1,  $\text{Hom}_{E_\rho\langle D \rangle}(\mathcal{M}/\overline{O}_{\rho,r}(\mathcal{M}), \mathcal{B}_{t_\rho}(r)) = 0$ . Or, d'après le résultat 2, la

dimension sur  $\Omega$  de  $\text{Hom}_{E_\rho\langle D \rangle}(\mathcal{M}/\overline{\mathcal{O}}_{\rho,r}(\mathcal{M}), \mathcal{B}_{t_\rho}(r))$  est égale à la dimension sur  $E_\rho$  de  $\mathcal{M}/\overline{\mathcal{O}}_{\rho,r}(\mathcal{M})$ . Donc  $\mathcal{M}/\overline{\mathcal{O}}_{\rho,r}(\mathcal{M}) = 0$  et  $\overline{\mathcal{O}}_{\rho,r}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ .

Réciproquement, si  $\overline{\mathcal{O}}_{\rho,r}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ , les  $\mathbf{e}_i$  appartiennent à  $\overline{\mathcal{O}}_{\rho,r}(\mathcal{M})$  et  $\|\mathbf{e}_i\|_{\rho,r,\epsilon} = 0$ . En particulier, il existe des polynômes différentiels  $P_{i,j}$  dans  $E_\rho\langle D \rangle$  tels que

$$\mathbf{e}_i = \sum_j P_{i,j} \mathbf{e}_j \quad \text{et} \quad |P_{i,j}|_{\rho,r} < 1 \quad (\forall i, j).$$

Maintenant, si  $s$  est une solution de  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{A}_{t_\rho}(r)$ , pour tout nombre  $r' < r$  et tout indice  $i$ ,  $s(\mathbf{e}_i)$  appartient à  $\mathcal{B}_{t_\rho}(r')$ . Si les fonctions  $s(\mathbf{e}_i)$  n'étaient pas toutes nulles, on trouverait:

$$|s(\mathbf{e}_i)|_{r'} = \left| \sum_j P_{i,j}(s(\mathbf{e}_i)) \right|_{r'} \leq \max_j |P_{i,j}|_{\text{op},\rho,r'} |s(\mathbf{e}_j)|_{r'} < \max_j |s(\mathbf{e}_j)|_{r'}$$

ce qui n'est pas. Donc  $s(\mathbf{e}_j) = 0$  pour tout indice  $i$  et  $s = 0$ .

On a donc  $\text{Hom}_{E_\rho\langle D \rangle}(\mathcal{M}, \mathcal{A}_{t_\rho}(r)) = 0$ . □

**Corollaire 14.3.** — Soit  $0 < r \leq \rho$  et soit  $\mathcal{M}$  un  $E_\rho$ -module différentiel.

Si  $\text{Hom}_{E_\rho\langle D \rangle}(\mathcal{M}, \mathcal{A}_{t_\rho}(r)) \neq 0$ , alors  $\text{Hom}_{E_\rho\langle D \rangle}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{t_\rho}(r)) \neq 0$ .

En particulier, un opérateur différentiel  $L$  de  $E_\rho\langle D \rangle$  qui n'est pas injectif dans  $\mathcal{A}_{t_\rho}(r)$  n'est pas injectif dans  $\mathcal{B}_{t_\rho}(r)$ .

*Preuve.* — D'après le théorème 14.2-3., la condition si  $\text{Hom}_{E_\rho\langle D \rangle}(\mathcal{M}, \mathcal{A}_{t_\rho}(r)) \neq 0$  implique  $\mathcal{M}/\overline{\mathcal{O}}_{\rho,r}(\mathcal{M}) \neq 0$ . Mais les conditions 1 et 2 du même théorème montrent alors que  $\text{Hom}_{E_\rho\langle D \rangle}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{t_\rho}(r)) = \text{Hom}_{E_\rho\langle D \rangle}(\mathcal{M}/\overline{\mathcal{O}}_{\rho,r}(\mathcal{M}), \mathcal{B}_{t_\rho}(r)) \neq 0$ .

La traduction pour l'opérateur différentiel  $L$  s'obtient en considérant le module différentiel  $\mathcal{M} = E_\rho\langle D \rangle / E_\rho\langle D \rangle L$ . □

Comme nous l'avons vérifié, la topologie quotient passe au quotient ! mais il n'y a aucune raison qu'elle donne la topologie quotient des sous-modules différentiels. En général, le module différentiel  $\overline{\mathcal{O}}_{\rho,r}(\mathcal{M})$  a encore des solutions non nulles dans  $\mathcal{B}_{t_\rho}(r)$ . En itérant le processus, on obtient le résultat suivant.

**Corollaire 14.4.** — Soit  $\mathcal{M}$  un  $E_\rho$ -module différentiel. Pour  $0 < r \leq \rho$ , il existe un sous-module différentiel  $\mathcal{N}_r$  de  $\mathcal{M}$  tel que toute application horizontale de  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{A}_\rho(r)$  s'annule sur  $\mathcal{N}_r$  et tel que

$$\text{Ray}(\mathcal{M}/\mathcal{N}_r) \geq r \text{ et } \dim_{E_\rho}(\mathcal{M}/\mathcal{N}_r) = \dim_K \left( \text{Hom}_{E_\rho\langle D \rangle}(\mathcal{M}, \mathcal{A}_{t_\rho}(r)) \right).$$

*Preuve.* — On construit une filtration décroissante  $\mathcal{M}^{[i]}$  dans  $\mathcal{M}$  en posant  $\mathcal{M}^{[0]} = \mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}^{[i]} = \overline{\mathcal{O}}_{\rho,r}(\mathcal{M}^{[i-1]})$  pour  $i \geq 1$ . D'après la propriété 14.2-2. les quotients successifs  $\mathcal{M}^{[i-1]}/\mathcal{M}^{[i]}$  sont solubles dans  $\mathcal{B}_{t_\rho}(r)$ . La méthode de variation des constantes (proposition 6.24) montre, par récurrence sur  $i$ , que le quotient  $\mathcal{M}/\mathcal{M}^{[i]}$  est soluble dans l'anneau  $\mathcal{A}_{t_\rho}(r)$  (plus petit anneau contenant  $\mathcal{B}_{t_\rho}(r)$  et sur lequel  $D$  est surjectif). Les dimensions des  $\mathcal{M}^{[i]}$  étant décroissantes, le processus s'arrête lorsque  $\mathcal{M}^{[i]} = \mathcal{M}^{[i-1]}$  c'est-à-dire lorsque le sous-module différentiel (éventuellement nul)  $\mathcal{N}_r \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{M}^{[i]}$  n'a pas de solution non nulle dans  $\mathcal{A}_\rho(r)$  (d'après 14.2-3.). □

Autrement dit cette décomposition sépare les solutions de rayon de convergence  $\geq r$  de celles des solutions de rayon  $< r$ .

**Corollaire 14.5.** — Soit  $A$  un anneau tel que  $A \subset \mathcal{A}([0, \rho]) \cap E_\rho$  et soit  $\mathcal{M}$  un  $A$ -module différentiel. Alors, pour  $r \leq \rho$ ,

$$\mathrm{Hom}_{A\langle D \rangle}(\mathcal{M}, \mathcal{A}_{t_\rho}(r)) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Hom}_{A\langle D \rangle}(\mathcal{M}, \mathcal{B}([0, r])) = 0.$$

*Preuve.* — Par hypothèse et d'après (27), on a

$$\mathrm{Hom}_{E_\rho\langle D \rangle}(\mathcal{M} \otimes E_\rho, \mathcal{A}_{t_\rho}(r)) = \mathrm{Hom}_{A\langle D \rangle}(\mathcal{M}, \mathcal{A}_{t_\rho}(r)) = 0.$$

Donc la propriété 14.2-3 dit que

$$\mathcal{M} \otimes \mathcal{E}_\rho = \overline{O}_{\rho,r}(\mathcal{M} \otimes E_\rho).$$

En particulier, si  $\mathbf{e}$  est une famille génératrice du  $A\langle D \rangle$ -module  $\mathcal{M}$ , par exemple une base du  $A$ -module  $\mathcal{M}$ , les  $\mathbf{e}_i \otimes 1$  appartiennent à  $\overline{O}_{\rho,r}(\mathcal{M} \otimes E_\rho)$ . Comme la topologie  $\mathcal{T}_{\rho,r}$  est donnée, entre autre, par la semi-norme  $\|\cdot\|_{\rho,r,\mathbf{e}}$  sur  $\mathcal{M} \otimes E_\rho$ , celle-ci est identiquement nulle. Soit maintenant  $s$  une solution de  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{A}([0, r])$ . Par définition de la norme  $\|\cdot\|_{\rho,r,\mathbf{e}}$ , il existe des polynômes différentiels  $P_{i,j}$  dans  $E_\rho\langle D \rangle$  tels que

$$\mathbf{]}_i = \sum_j P_{i,j}(\mathbf{e}_j) \quad , \quad \max_{i,j} |P_{i,j}|_{\mathrm{op},\rho,r} = \kappa < 1.$$

Il vient alors

$$|s(\mathbf{e}_i)|_r = \left| \sum_j P_{i,j}(s(\mathbf{e}_j)) \right|_r \leq \max_j |P_{i,j}|_{\mathrm{op},\rho,r} |s(\mathbf{e}_j)|_r \leq \kappa \max_j |s(\mathbf{e}_j)|_r$$

ce qui donne  $\max_i |s(\mathbf{e}_i)|_r \leq \kappa \max_i |s(\mathbf{e}_i)|_r$  et, montre que les fonctions  $s(\mathbf{e}_i) = 0$  sont toutes nulles et donc que la solution  $s$  est nulle.  $\square$

**Exemple 14.6.** — Soit  $a$  un nombre de  $\mathbb{Z}_p$ . Monsky a proposé le polynôme différentiel suivant :

$$M_a \stackrel{\mathrm{d\acute{e}f}}{=} px D^2 + (1-x)D + a.$$

Pour que la série  $f = \sum a_n x^n$  soit solution de  $M_a$ , c'est-à-dire telle que  $M_a(f) = 0$ , on doit avoir

$$(pn+1)(n+1)a_{n+1} = (n+a)a_n. \quad (9)$$

Notant  $(a)_n \stackrel{\mathrm{d\acute{e}f}}{=} a(a+1)\cdots(a+n-1)$  le *symbole de Pochhammer*, on trouve que les solutions de  $M_a$  analytiques en 0 forment un  $K$ -espace vectoriel de dimension 1 engendré par la fonction

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{p^n \binom{1}{p}_n n!} x^n.$$

Il est clair que  $|p^n \binom{1}{p}_n| = \prod |1+pi| = 1$  et facile de voir que  $|(a)_n| \leq |(1)_n| = |n!|$ . Autrement dit,  $f$  appartient à  $\mathcal{B}([0, 1])$ . Le corollaire 14.5 dit alors que

<sup>(9)</sup>Un polynôme différentiel de  $K[x, D]$  qui, comme  $M_a$ , correspond à une relation du type  $P(n)a_{n+1} = Q(n)a_n$  avec  $P$  et  $Q$  polynômes de  $K[n]$  est dit *hypergéométrique*.

$\text{Hom}_{A\langle D \rangle}(\mathcal{M}, \mathcal{A}_{t_1}(1)) \neq 0$ . D'un autre coté, si  $f$  et  $g$  sont deux solutions de  $M_a$ , le *wronskien*  $w = fD(g) - D(f)g$  satisfait l'équation  $pxD(w) = (1-x)w$  (voir lemme 6.7). Le théorème 8.6 montre que la solution de cette équation différentielle au voisinage du point  $t_1$  a un rayon de convergence exactement égal à  $\omega \left| \frac{1-x}{px} \right|_1^{-1} = \omega^p$ .

On en conclut que  $\text{Hom}_{A\langle D \rangle}(\mathcal{M}, \mathcal{A}_{t_1}(1)) \neq 0$  est de dimension (sur  $K$ ) exactement égale à 1.

D'après le corollaire 14.4, le  $E_\rho$ -module différentiel  $E_\rho\langle D \rangle / E_\rho\langle D \rangle M_a$  contient un sous  $E_\rho$ -module différentiel de rang 1. Par contre, on montre que, si  $a$  n'est pas dans  $\mathbb{Z}$ , le  $K(x)$ -module différentiel  $K(x)\langle D \rangle / K(x)\langle D \rangle M_a$  est irréductible c'est-à-dire ne contient pas de sous  $K(x)$ -module différentiel de rang 1.

On en trouvera une étude détaillée de cet exemple dans [42]-4.26 et surtout dans [22] § 7. Il montre que, même pour un  $K(x)$ -module différentiel, la décomposition du corollaire 14.4 n'a pas lieu dans  $K(x)$ . Par contre Dwork et Robba ont montré ([22] §4), que, si on part d'un  $\mathcal{E}^\dagger \cap E_1$ -module différentiel, la décomposition du corollaire 14.4 a toujours lieu dans  $\mathcal{E}^\dagger \cap E_1$ . Ce résultat est très délicat mais ne nous sera pas utile.

Une analyse soigneuse de la démonstration du corollaire 14.4 montre que les solutions de rayon  $r$  dans le disque générique du module différentiel  $\mathcal{M}$  s'obtiennent par, au plus,  $\mu - 1$  primitives à partir de fonctions bornées (une primitive à chaque application de la méthode de variation de la constante. Cela implique qu'elles aient une "croissance logarithmique au plus  $\mu - 1$ " au bord de leur disque de convergence. Dwork et Robba ont donné une démonstration directe et effective de ce résultat.

**Proposition 14.7 (Majorations explicites [23]).** — *S'il existe une matrice inversible  $X$  à coefficients dans  $\mathcal{A}_{t_\rho}(r)$  telle que  $D(X) = GX$  et si les matrices  $G_s$  sont définies par la récurrence (17), alors on a :*

$$\left\| \frac{1}{s!} G_s \right\|_\rho \leq c s^{\mu-1} r^{-s}$$

où  $c$  est une constante donnée explicitement à partir des normes  $\|G_s\|_\rho$  pour  $s < \mu$ .

### 15. Foncteur "solutions dans le disque générique"

En étudiant l'indice des opérateurs différentiels dans  $\mathcal{B}_{t_\rho}(r)$  et  $\mathcal{A}_{t_\rho}(r)$ , Robba a montré que l'action d'un opérateur différentiel de  $E_\rho\langle D \rangle$  sur  $\mathcal{A}_{t_\rho}(r)$  est surjective. Ceci est remarquable car, en général, un tel opérateur n'est pas trivialisable sur cet anneau.

On suppose que le corps  $K$  est de caractéristique résiduelle  $p > 0$ .

**Proposition 15.1.** — *Soit  $a$  un nombre d'une extension  $\Omega$  de  $K$  et soit  $r$  un nombre de  $|\Omega^*|$ . Il existe un  $\Omega$ -espace vectoriel  $V$  de dimension infinie contenu dans  $\mathcal{A}_a(r)$  tel que  $V \cap \mathcal{B}_a(r) = 0$  et  $D(V) \subset \mathcal{B}_a(r)$ . Autrement dit, l'opérateur  $D$  n'a pas d'indice dans  $\mathcal{B}_a(r)$ .*

*Preuve.* — On choisit un nombre  $\lambda$  de  $\Omega$  tel que  $|\lambda| = r$ . Pour  $1 \leq i$ , on pose  $u_i = \sum_{h=0}^{\infty} p^{-hi} \left(\frac{x-a}{\lambda}\right)^{p^{hi}}$ . Par construction, les fonctions  $D(u_i) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(x-a)^{p^{hi}-1}}{\lambda p^{hi}}$  appartiennent à  $\mathcal{B}_a(r)$ . Soit alors  $f = \sum_{i=\ell}^k \alpha_i u_i$  une fonction du  $\Omega$ -espace vectoriel  $V$  engendré par les  $u_i$ . On peut supposer que  $\alpha_\ell \neq 0$ . On trouve :

$$g = \sum_{i=\ell}^k \alpha_i \sum_{h=0}^{\infty} p^{-hi} \left(\frac{x-a}{\lambda}\right)^{p^{hi}}.$$

c'est-à-dire

$$g = \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s \left(\frac{x-a}{\lambda}\right)^{p^s} \quad \text{avec, pour } s \geq 0, \quad \beta_s = \sum_{i|s, \ell \leq i \leq k} \alpha_i p^{-s}$$

Pour  $\ell < i \leq k \leq m$ , le nombre  $\ell + m!$  n'est pas divisible par  $i$ . On a donc

$$|\beta_{\ell+m!}| = |\alpha_\ell p^{-(\ell+m!)}| = |\alpha_\ell| |p|^{-(\ell+m!)}.$$

On constate que  $\lim_{m \rightarrow \infty} |\beta_{\ell+m!}| = \infty$  donc la fonction  $g(\lambda x + a)$  n'appartient pas à  $\mathcal{B}_0(1)$  et la fonction  $g$  n'appartient pas à  $\mathcal{B}_a(r)$ . Le  $\Omega$ -espace vectoriel  $V$  vérifie les propriétés demandées.

Maintenant  $\text{coker}(D, \mathcal{B}_a(a))$  a une dimension infinie, car il contient un sous-espace vectoriel isomorphe à  $V$ , et  $D$  n'a pas d'indice dans  $\mathcal{B}_a(r)$ .  $\square$

**Lemme 15.2.** — Soit  $u$  une fonction de  $\mathcal{B}_{t_\rho}(r)$  et  $f$  une fonction de  $\mathcal{A}_{t_\rho}(r)$ . Si la fonction  $uf$  appartient à  $\mathcal{B}_{t_\rho}(r)$  alors la fonction  $f$  appartient à  $\mathcal{B}_{t_\rho}(r)$ .

*Preuve.* — Pour tout nombre  $\alpha < r$ , on a  $|uf|_\alpha = |u|_\alpha |f|_\alpha$ . Fixons un nombre  $\alpha_0 < r$ . Pour  $\alpha_0 < \alpha < r$ , il vient :

$$|f|_\alpha = \frac{|uf|_\alpha}{|u|_\alpha} \leq \frac{|uf|_r}{|u|_{\alpha_0}}$$

ce qui montre que la fonction  $f$  est bornée dans le disque  $D(t_\rho, r)$ .  $\square$

**Corollaire 15.3.** — Soit  $r$  un réel tel que  $0 < r \leq \rho$ . Un polynôme différentiel  $L$  de  $E_\rho \langle D \rangle$  qui n'est pas injectif dans  $\mathcal{A}_{t_\rho}(r)$ , n'a pas d'indice dans  $\mathcal{B}_{t_\rho}(r)$ .

*Preuve.* — Comme  $L$  n'est pas injectif dans  $\mathcal{A}_{t_\rho}(r)$ , donc dans  $\mathcal{B}_{t_\rho}(r)$  d'après le corollaire 14.3, il existe  $u$  dans  $\mathcal{B}_{t_\rho}(r)$  tel que  $L(u) = 0$ . La formule de Leibniz s'écrit  $D^n(uf) = D^n(u)f + \sum_{i=1}^n b_i D^i(f)$  avec  $b_i = \binom{n}{i} D^{n-i}(u)$  dans  $\mathcal{B}_{t_\rho}(r)$ . Il existe donc un polynôme différentiel  $P$  de  $\mathcal{B}_{t_\rho}(r) \langle D \rangle$  tel que  $L(uf) = L(u)f + P D(f)$  c'est-à-dire tel que  $Lu = PD$ .

D'après la proposition 15.1 il existe un  $\Omega$ -espace vectoriel  $V$  de dimension infinie, contenu dans  $\mathcal{A}_{t_\rho}(r)$ , tel que  $D(V) \subset \mathcal{B}_{t_\rho}(r)$  et  $V \cap \mathcal{B}_{t_\rho}(r) = 0$ . Le  $\Omega$ -espace vectoriel  $uV$  est contenu dans  $\mathcal{A}_{t_\rho}(r)$ , est de dimension infinie (car  $u \neq 0$ ) et vérifie  $L(uV) = PD(V) \subset \mathcal{B}_{t_\rho}(r)$  et, d'après le lemme 15.2,  $uV \cap \mathcal{B}_{t_\rho}(r) = V \cap \mathcal{B}_{t_\rho}(r) = 0$ . Maintenant le  $\Omega$ -espace vectoriel  $\text{coker}(L, \mathcal{B}_{t_\rho}(r))$  contient le sous-espace vectoriel  $L(uV)/L(uV) \cap L(\mathcal{B}_{t_\rho}(r))$  qui est isomorphe à  $uV/\ker(L) \cap uV$  et donc de dimension infinie car  $\ker L$  est de dimension finie. Donc  $L$  n'a pas d'indice dans  $\mathcal{B}_{t_\rho}(r)$ .  $\square$

**Corollaire 15.4.** — Soit  $r$  un réel tel que  $0 < r \leq \rho$ . Un polynôme différentiel  $L$  de  $E_\rho\langle D \rangle$  qui est surjectif dans  $\mathcal{B}_{t_\rho}(r)$  est injectif dans  $\mathcal{A}_{t_\rho}(r)$ .

*Preuve.* — L'opérateur différentiel  $L$  étant surjectif dans  $\mathcal{B}_{t_\rho}(r)$  a un conoyau de dimension nulle. Comme son noyau est de dimension finie, il a un indice dans  $\mathcal{B}_{t_\rho}(r)$ . Donc, par contraposée du corollaire 15.3, il est injectif dans  $\mathcal{A}_{t_\rho}(r)$ .  $\square$

**Théorème 15.5 (Robba [42]).** — Soit  $r$  un réel tel que  $0 < r \leq \rho$  et soit  $L$  un polynôme différentiel de  $E_\rho\langle D \rangle$  qui est injectif dans  $\mathcal{A}_{t_\rho}(r)$ . Alors  $L$  est surjectif dans  $\mathcal{B}_{t_\rho}(r)$  et dans  $\mathcal{A}_{t_\rho}(r)$ .

*Preuve.* — Posons  $\mathcal{M} = E_\rho\langle D \rangle / E_\rho\langle D \rangle L$  et notons  $\epsilon$  l'image dans  $\mathcal{M}$  du polynôme différentiel 1 de  $E_\rho\langle D \rangle$ . Par définition, la famille à un élément  $\epsilon$  engendre le  $E_\rho\langle D \rangle$ -module  $\mathcal{M}$ .

D'après le théorème 14.2.3, comme  $L$  est injectif dans  $\mathcal{A}_{t_\rho}(r)$ , on a  $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{O}}_{\rho,r}(\mathcal{M})$ . Donc,  $\epsilon$  lui-même appartient à  $\overline{\mathcal{O}}_{\rho,r}(\mathcal{M})$ . Comme la topologie est donnée, par exemple, par la semi-norme  $|\cdot|_\epsilon$  sur  $\mathcal{M}$ , cette qui engend, il existe  $P$  dans  $E_\rho\langle D \rangle$  tel que  $P(m) = m$ , c'est-à-dire tel que  $P = 1 + QL$ , et vérifiant  $|P|_{\rho,r} < 1$ .

On constate que  $QL = -(1 - P)$  est un opérateur inversible de  $\mathcal{B}_{t_\rho}(r)$  d'inverse  $-1 - P - P^2 - \dots$ . Donc  $Q$  qui a un inverse à droite  $-L(1 - P)^{-1}$  en tant qu'opérateur sur  $\mathcal{B}_{t_\rho}(r)$ , est surjectif : on a  $Q(b) = a$  pour  $b = -L(1 - P)^{-1}(a)$ . D'après le corollaire 15.4,  $Q$  est injectif dans  $\mathcal{A}_{t_\rho}(r)$  donc dans  $\mathcal{B}_{t_\rho}(r)$ . L'opérateur  $Q$  est donc bijectif sur  $\mathcal{B}_{t_\rho}(r)$  et il en est de même de l'opérateur  $L = -Q^{-1}(1 - P)$ .

Notons  $r'$  le plus grand nombre réel pour lequel  $L$  possède une solution dans  $\mathcal{A}_{t_\rho}(r')$ . Par hypothèse, on a  $r' < r$  et, pour  $r' < r'' < r$ , l'opérateur  $L$  est injectif dans  $\mathcal{A}_{t_\rho}(r'')$  donc surjectif dans  $\mathcal{B}_{t_\rho}(r'')$ . On trouve alors, pour  $f$  dans  $\mathcal{A}_{t_\rho}(r) = \bigcap_{r' < r'' < r} \mathcal{B}_{t_\rho}(r'')$ , qu'il existe, pour chaque  $r''$ , un unique  $g_{r''}$  de  $\mathcal{B}_{t_\rho}(r'')$  tel que  $L(g_{r''}) = f$ . L'unicité montre que tous ces  $g_{r''}$  sont égaux et appartiennent donc à  $\bigcap_{r' < r'' < r} \mathcal{B}_{t_\rho}(r'') = \mathcal{A}_{t_\rho}(r)$ . Autrement dit,  $L$  est surjectif dans  $\mathcal{A}_{t_\rho}(r)$ .  $\square$

Ce théorème peut aussi se traduire en terme de système différentiel.

**Théorème 15.6.** — Soit  $G$  une  $\mu \times \mu$ -matrice de  $\text{Mat}(E_\rho)$  et soit  $r$  un réel tel que  $0 < r \leq \rho$ . Si l'opérateur  $D - G$ , agissant à gauche sur  $\mathcal{A}_{t_\rho}(r)^\mu$ , est injectif, il est surjectif.

Pour pouvoir appliquer les corollaires du théorème de Robba aux  $\mathcal{A}(I)$ -modules différentiels, nous considérons un anneau  $A$  tel que  $K[x] \subset A \subset E_\rho$ , mais ceci n'est pas une réelle généralisation par rapport au cas  $A = E_\rho$ .

**Corollaire 15.7.** — Soit  $A$  un anneau tel que  $K[x] \subset A \subset E_\rho$ , soit  $\mathcal{M}$  un  $A$ -module différentiel et soit  $r$  un réel tel que  $0 < r \leq \rho$ . On a  $\text{Ext}_{A\langle D \rangle}^1(\mathcal{M}, \mathcal{A}_{t_\rho}(r)) = 0$ .

*Preuve.* — Notons  $G$  la matrice de la dérivation  $D$  dans une base  $\epsilon$  de  $\mathcal{M}$ .

Si  $\text{Hom}_{A\langle D \rangle}(\mathcal{M}, \mathcal{A}_{t_\rho}(r)) = 0$ , la relation (24) montre que l'opérateur  $D - G$  est injectif dans  $\mathcal{A}_{t_\rho}(r)^\mu$ . D'après le théorème 15.6, il est surjectif et d'après la relation (25), on a  $\text{Ext}_{A\langle D \rangle}^1(\mathcal{M}, \mathcal{A}_{t_\rho}(r)) = 0$ .

Le cas où  $\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho) \geq r$  est une conséquence immédiate de la méthode de variation des constantes.

Dans le cas général, d'après le corollaire 14.4, il existe, dans la catégorie  $\text{MLC}(E_\rho)$ , une suite exacte  $0 \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow E_\rho \otimes \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow 0$  dans laquelle  $\text{Hom}_{E_\rho \langle D \rangle}(\mathcal{N}, \mathcal{A}_{t_\rho}(r)) = 0$  et  $\text{Ray}(\mathcal{Q}, \rho) \geq r$ . Donc  $\text{Ext}_{E_\rho \langle D \rangle}^1(\mathcal{N}, \mathcal{A}_{t_\rho}(r)) = \text{Ext}_{E_\rho \langle D \rangle}^1(\mathcal{Q}, \mathcal{A}_{t_\rho}(r)) = 0$  ce qui entraîne  $\text{Ext}_{E_\rho \langle D \rangle}^1(E_\rho \otimes \mathcal{M}, \mathcal{A}_{t_\rho}(r)) = 0$  d'où on déduit  $\text{Ext}_{A \langle D \rangle}^1(\mathcal{M}, \mathcal{A}_{t_\rho}(r)) = 0$  (voir relation (27)).  $\square$

**Corollaire 15.8.** — *Soit  $A$  un anneau tel que  $K[x] \subset A \subset E_\rho$ . Le foncteur “solution dans  $\mathcal{A}_{t_\rho}(r)$ ”  $\mathcal{M} \mapsto \text{Hom}_{A \langle D \rangle}(\mathcal{M}, \mathcal{A}_{t_\rho}(r))$  de la catégorie  $\text{MLC}(A)$  dans la catégorie des  $\Omega$ -espaces vectoriels (de dimension finie) est exact.*

## CHAPITRE VI MODULES DIFFÉRENTIELS DE ROBBA

Il s'agit de l'analogie  $p$ -adique des modules différentiels singuliers-réguliers de la théorie formelle. Un point clef de la théorie est donc définir les exposants d'un module différentiel de Robba. L'idée naturelle serait d'utiliser une définition ressemblant à la suivante

**Définition 15.9.** — Soit  $I$  un intervalle et soit  $L$  un polynôme différentiel à coefficients dans  $\mathcal{A}(I)$ . Un nombre  $\alpha$  de  $\mathbb{Z}_p$  est appelé *exposant naïf* de  $L$  sur la couronne  $\mathcal{C}(I)$  s'il existe une fonction  $f$  de  $\mathcal{A}(I)$  telle que  $L(x^\alpha f) = 0$ .

On pourra voir dans [44] les difficultés conceptuelles auxquelles cette approche “naïve” conduit. En effet, si l'exposant d'un opérateur d'ordre un se lit directement sur ses coefficients, cela n'est plus du tout vrai pour un opérateur d'ordre  $\geq 2$  (on passe d'une situation abélienne à une situation non abélienne).

On constatera que les difficultés proviennent de l'existence de nombres de Liouville  $p$ -adiques c'est-à-dire de nombres  $\alpha$  de  $\mathbb{Z}_p$  pour lesquels l'opérateur  $xD - \alpha$  n'a pas d'indice dans  $\mathcal{A}(I)$ . Cette situation ne se produit évidemment pas dans le cas formel où les exposants apparaissent comme les racines d'un polynôme à coefficients dans le corps des constantes. Dans le cas  $p$ -adique, au contraire, les exposants vont être définis par un procédé analytique compliqué ne permettant pas leur calcul explicite. Même si cela n'est pas explicite dans la présentation adoptée ici, c'est finalement la structure de Frobenius faible (voir paragraphe 20) qui va fournir la solution.

Après avoir défini la notion “d'exposant” pour un module différentiel de Robba, nous démontrons le “théorème de monodromie locale  $p$ -adique” (analogie  $p$ -adique du théorème 10.7) selon lequel, si l'exposant d'un module différentiel de Robba “a des différences non Liouville”, il s'obtient par extensions successives de modules de rang un définis par  $xD - \alpha$  où  $\alpha$  parcourt les composantes de l'exposant. Ces nombres  $\alpha$  apparaissent donc, à la fin et dans les bons cas, comme des exposants naïfs.

**Remarque 15.10.** — Nous parlerons de l'exposant (au singulier) alors que, dans le cas formel il y a *des* exposants (définis modulo  $\mathbb{Z}$  et à l'ordre près). Cette terminologie inhabituelle est due au fait que, dans la situation  $p$ -adique, on ne peut, en général, associer à un module différentiel de Robba qu'un exposant global appartenant à un ensemble quotient compliqué. Ce n'est que lorsque cet exposant a "des différences non Liouville", qu'on peut le considérer comme une famille non ordonnée de nombres de  $\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}$ . Dans ce cas, ces nombres (les composantes de l'exposant) jouent le rôle des exposants formels.

## 16. L'ensemble des exposants

Nous commençons par définir l'ensemble dans lequel se trouvent les exposants des modules différentiels de Robba.

Dans ce paragraphe, on note  $|\alpha|_\infty = \pm\alpha$  la valeur absolue ordinaire de l'entier  $\alpha$  pour la distinguer de sa valeur absolue  $p$ -adique qui est notée  $|\alpha|$ .

**Définition 16.1.** — Pour  $\alpha$  dans  $\mathbb{Z}_p$  on note  $\alpha^{(h)}$  le représentant entier de  $\alpha$  modulo  $p^h$  qui se trouve dans l'intervalle  $[(1-p^h)/2, (1+p^h)/2[$ .

**Lemme 16.2.** — Pour  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{Z}$ , on a  $|(a+b)^{(h)}|_\infty \leq |a^{(h)}|_\infty + |b^{(h)}|_\infty$ .

*Preuve.* — On remarque que  $|a^{(h)}|_\infty$  est la distance de  $a$  à  $p^h\mathbb{Z}$ . Plus précisément,  $a^{(h)} + b^{(h)}$  étant aussi un représentant de  $a + b$  modulo  $p^h$ , on trouve :

$$|(a+b)^{(h)}|_\infty \leq |a^{(h)} + b^{(h)}|_\infty \leq |a^{(h)}|_\infty + |b^{(h)}|_\infty. \quad \square$$

**Définition 16.3.** — Un nombre  $\alpha$  de  $\mathbb{Z}_p$  est dit de Liouville s'il n'appartient pas à  $\mathbb{Z}$  et si l'une au moins des séries  $\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha-s} x^s$  ou  $\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha+s} x^s$  a un rayon de convergence strictement inférieur à 1.

**Proposition 16.4.** — Soit  $\alpha$  un nombre de  $\mathbb{Z}_p$ .

1. Si  $\alpha$  appartient à  $\mathbb{Z}$ , la suite  $\frac{1}{h}|\alpha^{(h)}|_\infty$  tend vers 0.
2. Si  $\alpha$  n'est ni un entier ni un nombre de Liouville, la suite  $\frac{1}{h}|\alpha^{(h)}|_\infty$  tend vers l'infini.
3. Si  $\alpha$  est un nombre de Liouville, la suite  $\frac{1}{h}|\alpha^{(h)}|_\infty$  a une limite inférieure finie et une limite supérieure infinie.

*Preuve.* — Si  $\alpha$  est un entier, pour  $h$  assez grand, on a  $\alpha^{(h)} = \alpha$  et la suite  $\frac{1}{h}|\alpha^{(h)}|_\infty$  tend vers 0.

Si  $\alpha$  n'est pas un entier, pour une infinité d'entiers  $h$  (ceux pour lesquels la  $h$ -ième "décimale" du développement de Hensel de  $\alpha$  n'est ni 0 ni  $p-1$ , on a  $\alpha^{(h)} \geq p^{h-1}$  et la suite  $\frac{1}{h}|\alpha^{(h)}|_\infty$  a une limite supérieure infinie.

Si  $\alpha$  n'est pas entier, à chaque entier  $s$  nous associons l'entier  $h(s)$  défini par la formule  $|\alpha - s| = |p|^{h(s)}$ . Il vient :

$$\liminf_{s \rightarrow \infty} |\alpha - s|^{1/s} = |p|^{\limsup_{s \rightarrow \infty} h(s)/s} \quad \liminf_{s \rightarrow \infty} |\alpha + s|^{1/s} = |p|^{\limsup_{s \rightarrow \infty} h(-s)/s}$$

L'une des séries  $\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha - s} x^s$  ou  $\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha + s} x^s$  a donc un rayon de convergence strictement inférieur à 1 si et seulement si  $\limsup_{s \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{1}{|s|_{\infty}} h(s) \right) > 0$  c'est-à-dire si  $\liminf_{s \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{|s|_{\infty}}{h(s)} \right) < \infty$ . Par définition, on a  $h(\alpha^{(h)}) \geq h$ . Donc

$$\liminf_{s \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{|s|_{\infty}}{h(s)} \right) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \left( \frac{|\alpha^{(h)}|_{\infty}}{h(\alpha^{(h)})} \right) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \left( \frac{|\alpha^{(h)}|_{\infty}}{h} \right)$$

Par définition de  $\alpha^{(h)}$ , pour  $|\alpha^{(h)}|_{\infty} \leq |s|_{\infty} < |\alpha^{(h+1)}|_{\infty}$ , on a  $h(s) \leq h(\alpha^{(h)})$  soit  $\frac{|s|_{\infty}}{h(s)} \geq \frac{|\alpha^{(h)}|_{\infty}}{h(\alpha^{(h)})}$ . Par ailleurs, si  $h(\alpha^{(h)}) = k > h$ , c'est que  $\alpha^{(k)} = \alpha^{(h)}$  et alors  $\frac{|\alpha^{(h)}|_{\infty}}{h(\alpha^{(h)})} = \frac{|\alpha^{(k)}|_{\infty}}{k}$ . On en déduit que

$$\liminf_{s \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{|s|_{\infty}}{h(s)} \right) \geq \liminf_{h \rightarrow \infty} \left( \frac{|\alpha^{(h)}|_{\infty}}{h(\alpha^{(h)})} \right) \geq \liminf_{h \rightarrow \infty} \left( \frac{|\alpha^{(h)}|_{\infty}}{h} \right).$$

En conclusion, le nombre  $\alpha$  est de Liouville si et seulement si

$$\liminf_{s \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{|s|_{\infty}}{h(s)} \right) = \liminf_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{h} |\alpha^{(h)}|_{\infty} < \infty. \quad \square$$

**Exercice 16.5.** — Vérifier que les nombres de  $\mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q}$  ne sont pas des nombres de Liouville.

Plus généralement, on montre que les nombres de Liouville sont transcendants sur  $\mathbb{Q}$ .

**Exercice 16.6.** — Soit  $\alpha$  un nombre de  $\mathbb{Z}_p$ . Montrer que les deux séries entières  $(1+x)^{\pm\alpha} = \sum_{s=0}^{\infty} \binom{\pm\alpha}{s} x^s$  ont un rayon de convergence égal à 1 si et seulement si le nombre  $\alpha$  n'est pas de Liouville.

Soit  $\mu$  un entier,  $\Delta = \{\Delta_1, \dots, \Delta_{\mu}\}$  un élément de  $\mathbb{Z}_p^{\mu}$  et  $\sigma$  une permutation de l'ensemble  $\{1, \dots, \mu\}$ . On pose  $\sigma(\Delta) = \{\Delta_{\sigma(1)}, \dots, \Delta_{\sigma(\mu)}\}$ ,  $\Delta^{(h)} = \{\Delta_1^{(h)}, \dots, \Delta_{\mu}^{(h)}\}$  et, si  $\Delta$  appartient à  $\mathbb{Z}^{\mu}$ ,  $\|\Delta\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq \mu} |\Delta_i|_{\infty} \leq \sum_{i=1}^{\mu} |\Delta_i|_{\infty}$ .

**Définition 16.7.** — On dit que deux éléments  $\Delta$  et  $\Delta'$  de  $\mathbb{Z}_p^{\mu}$  sont équivalents, et on note  $\Delta \stackrel{\varepsilon}{\sim} \Delta'$ , s'il existe une suite  $\sigma_h$  de permutations de l'ensemble  $\{1, \dots, \mu\}$  telles que la suite  $\|(\Delta' - \sigma_h(\Delta))^{(h)}\|_{\infty}$  soit un  $O(h)$ .

**Proposition 16.8.** — Soit  $\Delta$  et  $\Delta'$  deux éléments équivalents de  $\mathbb{Z}_p^{\mu}$ . Si aucune des différences  $\Delta_i - \Delta_j$  ( $1 \leq i < j \leq \mu$ ) n'est un nombre de Liouville, il existe une permutation  $\sigma$  telle que  $\Delta - \sigma(\Delta')$  appartienne à  $\mathbb{Z}^{\mu}$ . En particulier les différences  $\Delta'_i - \Delta'_j$  ( $1 \leq i < j \leq \mu$ ) ne sont pas des nombres de Liouville.

*Preuve.* — Par définition il existe une constante  $c$  et une suite  $\sigma_h$  de permutations de l'ensemble  $\{1, \dots, \mu\}$  telles que

$$(39) \quad \|(\Delta' - \sigma_h(\Delta))^{(h)}\|_\infty \leq ch.$$

Comme

$$(\Delta' - \sigma_{h+1}(\Delta))^{(h+1)} = p^{h+1}C_h + (\Delta' - \sigma_{h+1}(\Delta))^{(h)}$$

pour un élément  $C_h$  de  $\mathbb{Z}^\mu$  la condition  $\|(\Delta' - \sigma_{h+1}(\Delta))^{(h+1)}\|_\infty \leq c(h+1)$  implique  $p^{h+1}\|C_h\|_\infty \leq c(h+1) + \frac{1}{2}p^h$ . Comme  $\|C_h\|_\infty$  est un entier, dès que  $h$  est assez grand pour que  $p^{h+1} - p^h > ch$ , on a  $C_h = 0$  soit

$$(40) \quad \|(\Delta' - \sigma_{h+1}(\Delta))^{(h)}\|_\infty \leq c(h+1).$$

En utilisant le lemme 16.2, les majorations (39) et (40) donnent :

$$(41) \quad \begin{aligned} \|(\sigma_h(\Delta) - \sigma_{h+1}(\Delta))^{(h)}\|_\infty &\leq \|(\Delta' - \sigma_h(\Delta))^{(h)}\|_\infty + \|(\Delta' - \sigma_{h+1}(\Delta))^{(h)}\|_\infty \\ &\leq c(2h+1). \end{aligned}$$

Mais, par hypothèse, les nombres  $\Delta_i - \Delta_j$  ne sont pas de Liouville. D'après la proposition 16.4.2, il existe donc un indice  $h_0$  tel que, pour  $h > h_0$  et pour tout couple d'indice  $(i, j)$  tel que  $\Delta_i - \Delta_j$  ne soit pas entier, on ait  $\|(\Delta_i - \Delta_j)^{(h)}\|_\infty > c(2h+1)$ . La majoration 41 montre alors que, pour  $h > h_0$  et pour  $1 \leq i \leq \mu$ ,  $\Delta_{\sigma_h(i)} - \Delta_{\sigma_{h+1}(i)}$  est un entier. Autrement dit

$$\sigma_h(\Delta) - \sigma_{h+1}(\Delta) = \{\Delta_{\sigma_h(1)} - \Delta_{\sigma_{h+1}(1)}, \dots, \Delta_{\sigma_h(\mu)} - \Delta_{\sigma_{h+1}(\mu)}\} \in \mathbb{Z}^\mu.$$

Par récurrence, on en déduit que  $\sigma_h(\Delta) = \sigma_{h_0}(\Delta) \pmod{\mathbb{Z}^\mu}$ .

La majoration (39) s'écrit maintenant  $\|(\Delta' - \sigma_{h_0}(\Delta))^{(h)}\|_\infty \leq ch$ . Elle implique donc  $\limsup_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{h} \|(\Delta' - \sigma_{h_0}(\Delta))^{(h)}\|_\infty < \infty$ . D'après la proposition 16.4.2 et 3, cela entraîne que  $\Delta' = \sigma_{h_0}(\Delta) \pmod{\mathbb{Z}^\mu}$ .  $\square$

**Exercice 16.9.** — Soit  $\alpha = \sum_{h=0}^\infty p^{f(2h)}$  et  $\beta = \sum_{h=0}^\infty p^{f(2h+1)}$  où  $f$  est une fonction de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  telle que  $\lim_{h \rightarrow \infty} f(h+1)p^{-f(h)} = \infty$ .

Montrer que  $\Delta = (\alpha, -\beta)$  et  $\Delta' = (\alpha - \beta, 0)$  sont deux éléments de  $\mathbb{Z}_p^2$  équivalents et que  $\Delta - \sigma(\Delta')$  n'appartient à  $\mathbb{Z}^2$  pour aucune permutation  $\sigma$ .

**Définition 16.10.** — On note  $\mathfrak{E}_\mu$  l'ensemble quotient  $\mathbb{Z}_p^\mu / \overset{\varepsilon}{\sim}$ .

**Définition 16.11.** — On dit qu'un élément  $\tilde{\Delta}$  de  $\mathfrak{E}_\mu$  a des différences non Liouville si l'un de ses représentants  $\Delta$  vérifie la condition de la proposition 16.8 (aucune des différences  $\Delta_i - \Delta_j$  ( $1 \leq i < j \leq \mu$ ) n'est un nombre de Liouville). Tous ses représentants vérifient alors cette condition.

**Définition 16.12.** — On dit qu'un élément  $\tilde{\Delta}$  de  $\mathfrak{E}_\mu$  est non Liouville s'il a des différences non Liouville, et si, pour l'un de ses représentants  $\Delta$ , aucun des nombres  $\Delta_i$  ( $1 \leq i \leq \mu$ ) n'est de Liouville. Tous ses représentants vérifient alors cette condition.

### 17. Exposant d'un module différentiel de Robba

Nous suivons ici la méthode utilisée par Dwork dans [21]. Celle-ci est plus directe que la présentation originale de [14] car elle revient à travailler directement sur le  $h$ -ième antécédent de Frobenius au lieu de procéder pas à pas. Cela rend les démonstrations un peu moins techniques mais, évidemment, ne supprime aucune des difficultés profondes liées à l'existence de nombres de Liouville. Même si cela n'est pas absolument évident a priori, on peut vérifier que les définitions des exposants données dans [14] et [21] sont équivalentes.

**17.1. Modules différentiels de Robba.** — Robba [44] a mis en évidence certains  $\mathcal{A}(I)$ -modules différentiels, qui portent maintenant son nom, en conjecturant qu'ils devraient être l'analogue  $p$ -adique des modules singuliers réguliers de la théorie formelle.

*Définition 17.1.* — Soit  $I$  un intervalle et  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}(I)$ -module différentiel. On dit que  $\mathcal{M}$  est *de Robba* si  $\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho) = \rho$  pour tout  $\rho$  dans  $I$ .

Nous allons démontrer que l'intuition de Robba était exacte. Pour cela, nous commençons par associer à chaque module différentiel de Robba un exposant (au sens du paragraphe précédent). Le résultat fondamental est alors le suivant : si un module différentiel de Robba a un exposant qui a des différences non Liouville, alors il possède une base dans laquelle la dérivation  $xD$  est représentée par une matrice constante. Autrement dit, un module différentiel de Robba, dont l'exposant a des différences non Liouville, s'obtient en tensorisant un  $K((x))$ -module différentiel singulier régulier par  $\mathcal{A}(I)$ .

On notera  $\text{Rob}(\mathcal{A}(I))$  la sous-catégorie pleine de  $\text{MLC}(\mathcal{A}(I))$  dont les objets sont les modules différentiels de Robba. Il résulte de la proposition 8.5 que si

$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de  $\text{MLC}(\mathcal{A}(I))$ , alors  $\mathcal{M}$  est de Robba si et seulement si  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{Q}$  le sont. Le théorème 9.4 montrera alors que la catégorie  $\text{Rob}(\mathcal{A}(I))$  est abélienne.

**17.2. Cas d'une couronne fermée.** — On note  $\Gamma_h$  le groupe des racines  $p^h$ -ièmes de l'unité dans une clôture algébrique  $K^{\text{alg}}$  de  $K$  (en particulier,  $\Gamma_0 = \{1\}$ ). Pour  $\zeta$  dans  $\Gamma_h$  et  $\delta$  dans  $\mathbb{Z}_p$ , le nombre  $\zeta^\delta$  est bien défini. Si  $\Delta$  appartient à  $\mathbb{Z}_p^\mu$ , on note  $\zeta^\Delta$  la matrice diagonale dont le  $i$ -ième terme de la diagonale vaut  $\zeta^{\Delta_i}$ .

Nous commençons par établir des lemmes qui contiennent les astuces utiles pour contourner les difficultés techniques.

Rappelons qu'à une matrice  $G$  de  $\text{Mat}(\mu, \mathcal{A}(I))$  on a associé la suite  $G_s$  définie par la récurrence (17) et la résolvante  $Y_G$  définie par la formule (34). Par ailleurs, pour simplifier, nous notons  $\mathcal{M}_G$  le module différentiel "associé à  $G$ " c'est-à-dire  $\mathcal{M}_G = \mathcal{A}(I)\langle D \rangle^\mu / \mathcal{A}(I)\langle D \rangle^\mu (D\mathbf{I} - G)$  (voir (22)).

**Lemme 17.2 (Dwork).** — Soit  $I$  un intervalle, soit  $G$  une matrice de  $\text{Mat}(\mu, \mathcal{A}(I))$  et soit  $Y_G$  la résolvante définie par la formule (34). Pour  $\Delta$  dans  $\mathbb{Z}_p^\mu$  et  $h \geq 0$ , on

pose :

$$S_{G,h,\Delta}(x) = p^{-h} \sum_{\zeta \in \Gamma_h} \zeta^{-\Delta} Y_G(\zeta x, x).$$

1. Si  $\text{Ray}(\mathcal{M}_G, \rho) > \rho \omega^{p^{1-h}}$  pour tout  $\rho$  dans  $I$ ,  $S_{G,h,\Delta}$  appartient à  $\text{Mat}(\mu, \mathcal{A}(I))$
2. Si  $\text{Ray}(\mathcal{M}_G, \rho) > \rho \omega^{p^{-h}}$  pour tout  $\rho$  dans  $I$ , on a

$$(42) \quad \det(S_{G,h,\Delta}) = \sum_{v \in \{0,1,\dots,p-1\}^\mu} \det(S_{G,h+1,\Delta+p^h v})$$

*Preuve.* — La première affirmation résulte d'une part de ce que la résolvante  $Y_G(x, y)$  est définie pour  $|x - y| < \text{Ray}(\mathcal{M}_G, |y|)$  et d'autre part de ce que, si  $\zeta$  est une racine  $p^h$ -ième primitive de l'unité, avec  $h \geq 1$ , (c'est-à-dire est dans  $\Gamma_h - \Gamma_{h-1}$ ), on a  $|\zeta - 1| = |p|^{1/p^{h-1}(p-1)} = \omega^{1/p^{h-1}}$ . Par ailleurs, la matrice  $S_{G,h,\Delta}$  appartient, a priori, à  $\text{Mat}(\mu, \mathcal{A}_{K^{\text{alg}}}(I))$  puisque les racines  $p^h$ -ièmes de l'unité interviennent dans sa construction. Mais comme on prend une somme sur  $\Gamma_h$ , la matrice  $S_{G,h,\Delta}$  est invariante par tout automorphisme de  $K^{\text{alg}}/K$  et donc appartient en fait à  $\text{Mat}(\mu, \mathcal{A}_K(I))$ .

Pour démontrer la deuxième affirmation, on remarque que, si  $\zeta$  est dans  $\Gamma_{h+1}$ , alors  $\zeta^{p^h}$  est une racine  $p$ -ième de l'unité égale à 1 si et seulement si  $\zeta$  est dans  $\Gamma_h$ . On a donc :

$$\sum_{\alpha=0}^{p-1} \frac{1}{p} \zeta^{-\alpha p^h} = \begin{cases} 0 & \text{si } \zeta \notin \Gamma_h \\ 1 & \text{si } \zeta \in \Gamma_h \end{cases}$$

En notant  $[A]_i$  la  $i$ -ième ligne de la matrice  $A$ , il vient

$$\begin{aligned} [S_{G,h,\Delta}(x)]_i &= p^{-h} \sum_{\zeta \in \Gamma_h} \zeta^{-\Delta_i} [Y_G(\zeta x, x)]_i \\ &= p^{-h} \sum_{\zeta \in \Gamma_{h+1}} \zeta^{-\Delta_i} \sum_{\alpha=0}^{p-1} \frac{1}{p} \zeta^{-\alpha p^h} [Y_G(\zeta x, x)]_i \\ &= \sum_{\alpha=0}^{p-1} p^{-h-1} \sum_{\zeta \in \Gamma_{h+1}} \zeta^{-\Delta_i - \alpha p^h} [Y_G(\zeta x, x)]_i \\ &= \sum_{\alpha=0}^{p-1} [S_{G,h+1,\Delta+\alpha p^h \ell_i}(x)]_i \end{aligned}$$

où  $\ell_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$  désigne le  $i$ -ième vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^\mu$ .

La relation (42) est alors une conséquence de la multilinéarité du déterminant par rapport aux lignes de la matrice.  $\square$

**Lemme 17.3.** — Soit  $J = [\alpha, \beta]$  un intervalle fermé, soit  $f$  une fonction de  $\mathcal{A}(J)$  et soit  $\delta$  un nombre de  $\mathbb{Z}_p$ . Si, pour tout  $\zeta$  dans  $\Gamma_h$ , on a  $\zeta^\delta f(x) = f(\zeta x)$  alors on a

$$(43) \quad |f|_\rho \leq c_J(\rho)^{|\delta^{(h)}|_\infty} \|f\|_{\mathcal{C}(J)}$$

avec  $c_J(\rho) = \max\left(\frac{\alpha}{\rho}, \frac{\rho}{\beta}\right) \leq 1$  et  $\|f\|_{C(J)} = \max_{\rho \in J} |f|_{\rho} = \max(|f|_{\alpha}, |f|_{\beta})$ .  
De plus, si  $\delta = 0$  et si  $f = \sum_{s \in \mathbb{Z}} f_s x^s$ , on a

$$(44) \quad |f - f_0|_{\rho} \leq c_J(\rho)^{p^h} \|f\|_{C(J)}$$

*Preuve.* — Si  $f(x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} f_s x^s$ , on a, par hypothèse,  $\zeta^{\delta} f_s = \zeta^s f_s$  pour tout  $\zeta$  dans  $\Gamma_h$ . On en déduit que  $f_s \neq 0$  si et seulement si  $s \equiv \delta \pmod{p^h}$ . En particulier, si  $f_s \neq 0$ , alors  $|s|_{\infty} \geq |\delta^{(h)}|_{\infty}$ .

Maintenant on a

$$\begin{aligned} \text{si } s \geq 0 \quad \rho^s &= \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^s \beta^s \leq c_J(\rho)^s \beta^s = c_J(\rho)^{|s|_{\infty}} \max(\alpha^s, \beta^s) \\ \text{si } s < 0 \quad \rho^s &= \left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^{-s} \alpha^s \leq c_J(\rho)^{-s} \alpha^s = c_J(\rho)^{|s|_{\infty}} \max(\alpha^s, \beta^s) \end{aligned}$$

d'où on déduit :

$$|f|_{\rho} = \sup_{s \in \mathbb{Z}} (|f_s| \rho^s) \leq \sup_{s \in \mathbb{Z}} \left( c_J(\rho)^{|s|_{\infty}} |f_s| \max(\alpha^s, \beta^s) \right) \leq c_J(\rho)^{|\delta^{(h)}|_{\infty}} \max(|f|_{\alpha}, |f|_{\beta})$$

La relation (44) se démontre de la même manière en remarquant que, pour  $\delta = 0$  et  $s \neq 0$ , si  $f_s \neq 0$ , alors  $s$  est divisible par  $p^h$  et donc  $|s|_{\infty} \geq p^h$ .  $\square$

**Lemme 17.4.** — Soit  $J = [\alpha, \beta]$  un intervalle fermé, soit  $Q$  une matrice non nulle de  $\text{Mat}(\mu, \mathcal{A}(J))$  et soit  $\Delta$  et  $\Delta'$  des éléments de  $\mathbb{Z}_p^{\mu}$ . Si, pour tout  $\zeta$  dans  $\Gamma_h$ , on a  $\zeta^{\Delta'} Q(x) \zeta^{\Delta} = Q(\zeta x)$  alors, pour  $\alpha < \rho < \beta$ , il existe une permutation  $\sigma$  de  $\llbracket 1, \dots, \mu \rrbracket$  telle que

$$(45) \quad \sum_{i=1}^{\mu} |(\Delta'_i - \Delta_{\sigma(i)})^{(h)}|_{\infty} \leq \frac{\mu \log \|Q\|_{C(J)} - \log |\det(Q)|_{\rho}}{-\log c_J(\rho)}$$

*Preuve.* — Par hypothèse, on a  $\zeta^{\Delta'_i - \Delta_j} Q_{ij} = Q_{ij}(\zeta x)$  pour  $1 \leq i, j \leq \mu$  et pour tout  $\zeta$  dans  $\Gamma_h$ . D'après le lemme 17.3 on a donc pour  $\rho$  dans  $J$  :

$$|Q_{ij}|_{\rho} \leq c_J(\rho)^{|\Delta'_i - \Delta_j|^{(h)}|_{\infty}} \|Q_{ij}\|_{C(J)} \leq c_J(\rho)^{|\Delta'_i - \Delta_j|^{(h)}|_{\infty}} \|Q\|_{C(J)}.$$

Or la formule  $\det Q = \sum_{\sigma} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \prod_{i=1}^{\mu} Q_{i\sigma(i)}$  montre que, pour  $\rho$  fixé dans  $] \alpha, \beta [$ , il existe (au moins) une permutation  $\sigma$  telle que :

$$|\det Q|_{\rho} \leq \prod_{i=1}^{\mu} |Q_{i\sigma(i)}|_{\rho} \leq c_J(\rho)^{\sum_{i=1}^{\mu} |\Delta'_i - \Delta_{\sigma(i)}|^{(h)}|_{\infty}} \|Q\|_{C(J)}^{\mu}.$$

La formule (45) en résulte immédiatement.  $\square$

**Lemme 17.5.** — Soit  $J = [\alpha, \beta]$  un intervalle fermé, soit  $Q$  une matrice non nulle de  $\text{Mat}(\mu, \mathcal{A}(J))$  et soit  $\Delta$  un élément de  $\mathbb{Z}_p^{\mu}$ . Si, pour tout  $\zeta$  dans  $\Gamma_h$ , on a  $\zeta^{\Delta} Q(x) \zeta^{-\Delta} = Q(\zeta x)$  alors, il existe une matrice constante  $C$  de  $\text{Mat}(\mu, K)$  et une matrice  $R$  de  $\text{Mat}(\mu, \mathcal{A}(J))$  telles que

1.  $Q = C + R$ ,
2. la matrice  $C$  commute avec la matrice diagonale de diagonale  $\Delta$ ,
3. on a  $\|R\|_{\rho} \leq c_J(\rho)^{\delta(\Delta, h)} \|Q\|_{C(J)}$  avec  $\delta(\Delta, h) = p^h$  si tous les  $\Delta_i$  sont égaux et  $\delta(\Delta, h) = \min_{\Delta_i \neq \Delta_j} |(\Delta_i - \Delta_j)^{(h)}|_{\infty}$  sinon.

*Preuve.* — Nous définissons la matrice  $C$  en posant

- $C_{ij} = 0$  si  $\Delta_i \neq \Delta_j$  (de telle sorte que la condition 2 soit vérifiée)
- $C_{ij} = q_{ij,0}$  si  $\Delta_i = \Delta_j$  et  $Q_{ij} = \sum_{s \in \mathbb{Z}} q_{ij,s} x^s$ .

Par hypothèse, on a  $\zeta^{\Delta_i - \Delta_j} Q_{ij} = Q_{ij}(\zeta x)$  pour  $1 \leq i, j \leq \mu$  et pour tout  $\zeta$  dans  $\Gamma_h$ . D'après le lemme 17.3 on a donc, pour  $\rho$  dans  $J$  et  $R = Q - C$

$$\text{si } \Delta_i \neq \Delta_j \quad |R_{ij}|_\rho = |Q_{ij}|_\rho \leq c_J(\rho)^{|\Delta_i - \Delta_j|_\infty} \|Q_{ij}\|_{\mathcal{C}(J)} \leq c_J(\rho)^{\delta(\Delta, h)} \|Q\|_{\mathcal{C}(J)}$$

$$\text{si } \Delta_i = \Delta_j \quad |R_{ij}|_\rho = |Q_{ij} - C_{ij}|_\rho \leq c_J(\rho)^{p^h} \|Q_{ij}\|_{\mathcal{C}(J)} \leq c_J(\rho)^{\delta(\Delta, h)} \|Q\|_{\mathcal{C}(J)}$$

La majoration 3 en résulte immédiatement. □

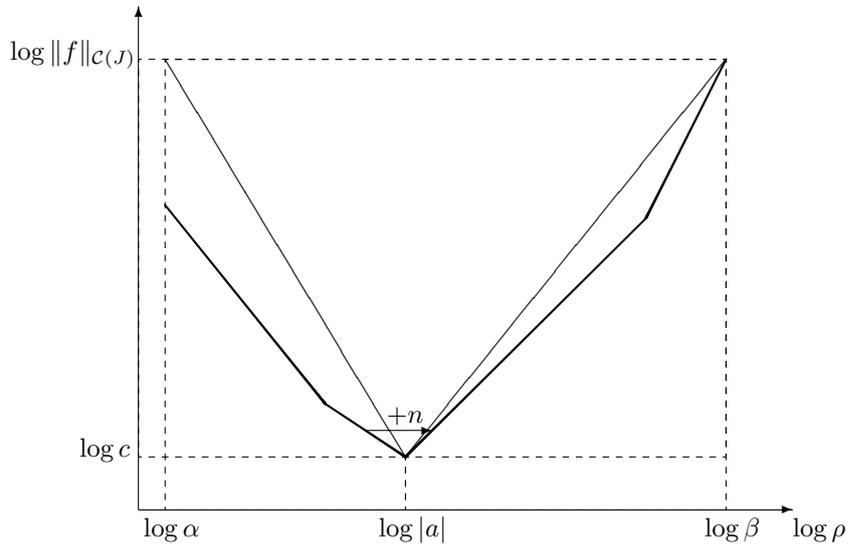


FIGURE 7.

**Lemme 17.6.** — Soit  $J = [\alpha, \beta]$  un intervalle fermé soit  $n$  un entier et soit  $f$  une fonction non nulle de  $\mathcal{A}(J)$ . Posons  $c = \min_{\rho \in J} |f|_\rho > 0$  ( $\max_{\rho \in J} |f|_\rho = \|f\|_{\mathcal{C}(J)}$ ). Si, pour chaque nombre  $\rho$  dans  $J$ , la fonction  $f$  a soit aucun soit au moins  $n$  zéros de valeur absolue  $\rho$ , alors la fonction  $f$  ne s'annule pas sur la couronne  $\mathcal{C}(I_n)$  où  $I_n = ]\alpha_n, \beta_n[$  est l'intervalle ouvert (éventuellement vide) formé des nombres  $\rho$  tels que

$$(\log \rho - \log \alpha)(\log \beta - \log \rho) > \frac{1}{n}(\log \beta - \log \alpha)(\log \|f\|_{\mathcal{C}(J)} - \log c).$$

*Preuve.* — Par hypothèse, si  $f$  a un zéro en un point  $a$  de la couronne  $\mathcal{C}(J)$ , la pente logarithmique de la fonction  $\rho \mapsto |f|_\rho$  augmente au moins de  $n$  au point  $\rho = |a|$ . Par

convexité logarithmique de ce graphe, on trouve donc (voir figure 7):

$$\frac{\log \|f\|_{\mathcal{C}(J)} - \log c}{\log \beta - \log |a|} - \frac{\log c - \log \|f\|_{\mathcal{C}(J)}}{\log |a| - \log \beta} \geq (d \log^+ |f|_{\rho} - d \log^- |f|_{\rho})_{\rho=|a|} \geq n$$

c'est-à-dire

$$(\log |a| - \log \alpha)(\log \beta - \log |a|) \leq \frac{1}{n}(\log \beta - \log \alpha)(\log \|f\|_{\mathcal{C}(J)} - \log c) = k_n.$$

Le lemme s'en déduit (voir figure 8 le graphe, en coordonnées logarithmiques, de la fonction  $\rho \mapsto (\log \rho - \log \alpha)(\log \beta - \log \rho)$ ).  $\square$

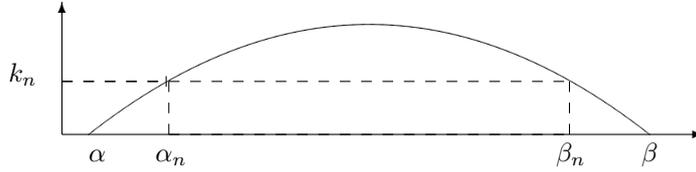


FIGURE 8.

**Théorème 17.7 (définition de l'exposant).** — Soit  $J \subset ]0, \infty[$  un intervalle fermé, soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}(J)$ -module différentiel de Robba de rang  $\mu$ , soit  $\mathfrak{e}$  une base de  $\mathcal{M}$ , soit  $G$  la matrice qui représente la dérivation  $D$  dans la base  $\mathfrak{e}$  et soit  $Y_G$  la résolvante associée (définie par la formule 34).

L'ensemble des éléments  $\Delta$  de  $\mathbb{Z}_p^\mu$  pour lesquels il existe une suite de matrices  $(S_h)$  et une constante  $c$  qui vérifient, pour tout entier  $h > 0$ , les conditions suivantes :

1.  $S_h$  appartient à  $\text{Mat}(\mu, \mathcal{A}(J))$ ,
2.  $\zeta^\Delta S_h(x) = S_h(\zeta x) Y_G(\zeta x, x)$  pour tout  $\zeta$  dans  $\Gamma_h$ ,
3.  $\|S_h\|_\rho \leq c^h$  pour tout  $\rho$  dans  $J$ ,
4. il existe  $\rho_0$  dans  $J$  pour lequel on a  $|\det(S_h)|_{\rho_0} \geq 1$ ,

est non vide, indépendant de la base  $\mathfrak{e}$  et contenu dans une classe d'équivalence pour la relation  $\overset{\mathfrak{e}}{\sim}$  (voir 16.7).

*Preuve.* — Elle se fait en plusieurs étapes

**17.2.1. Existence.** — Nous montrons que, pour une matrice  $\Delta$  bien choisie, la suite  $S_h \stackrel{\text{déf}}{=} S_{G,h,\Delta}$  définie dans le lemme 17.2 vérifie les quatre conditions demandées. En fait, les conditions 1., 2., et 3. sont vérifiées quelque soit  $\Delta$ , seule la condition 4. implique de bien choisir  $\Delta$ .

**Condition 1.** — Comme  $\mathcal{M}$  est de Robba, la condition 1 du lemme 17.2 montre que, pour tout  $h$  et tout  $\Delta$ , la matrice  $S_{G,h,\Delta}$  appartient à  $\text{Mat}(\mu, \mathcal{A}(I))$ .

*Condition 2.* — Pour  $\zeta$  fixé et  $\xi$  dans  $\Gamma_h$  l'application  $\xi \mapsto \zeta^{-1}\xi$  est une bijection de  $\Gamma_h$  et on a  $\zeta^\Delta \xi^{-\Delta} = (\zeta \xi^{-1})^\Delta$  et  $Y_G(\xi x, x) = Y_G(\xi x, \zeta x) Y_G(\zeta x, x)$ . Il vient donc :

$$\begin{aligned} \zeta^\Delta S_{G,h,\Delta}(x) &= p^{-h} \sum_{\xi \in \Gamma_h} (\zeta \xi^{-1})^\Delta Y_G(\xi x, x) \\ &= p^{-h} \sum_{\zeta^{-1}\xi \in \Gamma_h} (\zeta^{-1}\xi)^\Delta Y_G(\zeta^{-1}\xi \zeta x, \zeta x) Y_G(\zeta x, x) \\ &= S_{G,h,\Delta}(\zeta x) Y_G(\zeta x, x) \end{aligned}$$

*Condition 3.* — Puisque  $\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho) = \rho$ , pour tout  $\rho$  dans  $J$ , les majorations explicites de Dwork-Robba (proposition 14.7) s'écrivent (en supposant que  $|p| = p^{-1}$ ) :

$$\left\| \frac{x^s}{s!} G_s \right\|_\rho \leq c(\rho) s^{\mu-1}$$

avec  $c(\rho)$  donné explicitement à partir des normes  $\|G_s\|_\rho$  pour  $s < \mu$  et qui est donc en particulier une fonction continue de  $\rho$  sur l'intervalle  $J$ .

Par ailleurs, pour  $\zeta$  dans  $\Gamma_h$ , on a  $|\zeta| = 1$  et  $|\zeta - 1| \leq \omega^{p^{1-h}}$ . On en déduit :

$$\begin{aligned} \|S_{G,h,\Delta}\|_\rho &\leq |p|^{-h} \max_{\zeta \in \Gamma_h} \|Y_G(\zeta x, x)\|_\rho \\ &= |p|^{-h} \max_{\zeta \in \Gamma_h} \left\| \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^s}{s!} G_s(x) (\zeta - 1)^s \right\|_\rho \\ &\leq |p|^{-h} \sup_{0 \leq s} (c(\rho) s^{\mu-1} \omega^{sp^{1-h}}). \end{aligned}$$

La fonction  $s \mapsto s^{\mu-1} (\omega^{p^{1-h}})^s$  présente un maximum à un point où sa dérivée logarithmique s'annule, c'est-à-dire pour  $s = p^h \frac{\mu-1}{-p \log(\omega)} = \frac{(\mu-1)(p-1)}{p \log(p)}$ .

On trouve finalement :

$$\begin{aligned} \|S_{G,h,\Delta}\|_\rho &\leq |p|^{-h} c(\rho) \left( p^h \frac{(\mu-1)(p-1)}{p \log(p)} \right)^{\mu-1} e^{1-\mu} \\ &\leq p^{\mu h} c(\rho) \left( \frac{(\mu-1)(p-1)}{pe \log(p)} \right)^{\mu-1} \end{aligned}$$

La condition 3 s'en déduit facilement avec  $c = p^\mu c_1$  où

$$c_1 = \max \left\{ 1, \max_{\rho \in J} c(\rho) \left( \frac{(\mu-1)(p-1)}{pe \log(p)} \right)^{\mu-1} \right\}.$$

*Condition 4.* — On a  $S_{G,0,0} = Y_G(x, x) = \mathbf{I}$ . Pour  $\rho_0$  fixé dans  $J$ , la relation (42) permet de construire, par récurrence, une suite  $v_h$  de  $\{0, 1, \dots, p-1\}^\mu$  telle que la suite  $\Delta_h$  de  $\mathbb{Z}^\mu$  définie par  $\Delta_{h+1} = \Delta + p^h v_h$  vérifie

$$|\det(S_{G,h+1,\Delta_{h+1}})|_{\rho_0} \geq |\det(S_{G,h,\Delta_h})|_{\rho_0} \geq |\det(S_{G,0,0})|_{\rho_0} = 1$$

Cette suite converge, dans  $\mathbb{Z}_p^\mu$ , vers un élément  $\Delta$  particulier pour lequel la suite  $S_{G,h,\Delta} = S_{G,h,\Delta_h}$  vérifie la condition 4.

17.2.2. *Indépendance par rapport à la base.* — Un changement de base, de  $\mathfrak{e}$  à  $\mathfrak{f}$ , dans  $\mathcal{M}$  est représenté par une matrice  $H$  de  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}(J))$ . Les résolvantes correspondant à ces bases sont alors reliées par la relation  $Y_F(x, y) = H(x) Y_G(x, y) H^{-1}(y)$ . Supposons que la suite  $S_{G,h}$  vérifie les conditions 1. à 4. pour le  $\mu$ -uplet  $\Delta$  et la matrice  $Y_G$ , choisissons un nombre de  $K$  tel que  $|\lambda^\mu| \geq |\det H|_{\rho_0}$  et posons  $S_{F,h} = \lambda S_{G,h} H^{-1}$ .

1.  $S_{F,h}$  appartient à  $\text{Mat}(\mu, \mathcal{A}(J))$  comme produit de deux matrices de cet anneau,
2.  $\zeta^\Delta S_{F,h}(x) = \lambda S_{G,h}(\zeta x) Y_G(\zeta x, x) H^{-1}(x) = S_{F,h}(\zeta x) Y_F(\zeta x, x)$  pour  $\zeta$  dans  $\Gamma_h$   
[en effet  $Y_F(x, y) = H(x) Y_G(x, y) H^{-1}(y)$ ],
3.  $\|S_{F,h}\|_\rho \leq c^h |\lambda| \|H^{-1}\|_\rho$  pour tout  $\rho$  dans  $J$ ,
4.  $|\det(S_{F,h})|_{\rho_0} \geq |\lambda^\mu| |\det(S_{G,h})|_{\rho_0} |\det(H)^{-1}|_{\rho_0} \geq 1$ .

On constate que, quitte à changer la constante  $c$ , la suite  $S_{F,h}$  vérifie ces mêmes conditions pour  $\Delta$  et la matrice  $Y_F$ .

17.2.3. *Uniformisation de la condition 4.* — D'après la condition 3, on a  $|\det(S_h)|_\rho \leq c^{\mu h}$  pour tout  $\rho$  dans  $J$ . Le graphe, en coordonnées logarithmiques, de la fonction

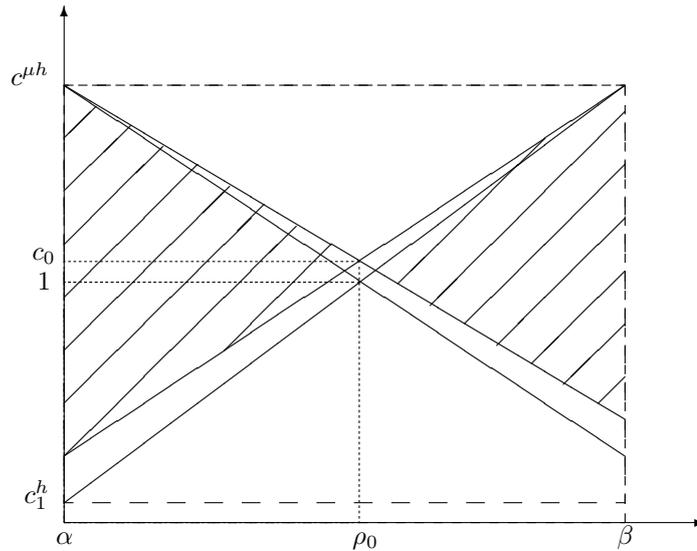


FIGURE 9.

$\rho \mapsto |\det(S_h)|_\rho$  (voir figure 9) est en dessous de la droite  $y = c^{\mu h}$  et passe par le point  $(c_0, \rho_0)$  avec  $c_0 \geq 1$  d'après la condition 4. La convexité logarithmique de ce graphe sur l'intervalle  $J$  implique qu'il se trouve dans la partie hachurée sur la figure 9. On constate qu'il existe une constante  $c_1$  telle que  $|\det(S_h)|_\rho \geq c_1^h$  pour tout  $\rho$  dans  $J$ . Plus précisément, on trouve

$$\frac{\log(c^{\mu h}) - \log(c_1^h)}{\log(\beta) - \log(\alpha)} = \frac{\log(1) - \log(c_1^h)}{\max(\log(\rho_0) - \log(\beta), \log(\rho_0) - \log(\alpha))}$$

c'est-à-dire

$$c_1 = c^{\mu k} > 0 \quad \text{avec} \quad k = \min \left( \frac{\log(\rho_0) - \log(\alpha)}{\log(\rho_0) - \log(\beta)}, \frac{\log(\rho_0) - \log(\beta)}{\log(\rho_0) - \log(\alpha)} \right) < -1$$

Après multiplication de chaque matrice  $S_h$  par  $\lambda^h$  où  $\lambda$  est une constante telle que  $|\lambda^\mu| \geq c_1$  et après changement de la constante  $c$  en  $c|\lambda|$ , on se ramène au cas où l'on peut supposer que la suite  $\{S_h\}$  vérifie les conditions 1, 2, 3 et 4' avec :

4'.  $|\det(S_h)|_\rho \geq 1$  pour tout  $\rho$  dans  $J$ .

17.2.4. *Equivalence.* — Nous nous donnons deux suites  $S_h$  et  $S'_h$  qui vérifient les conditions 1, 2, 3 et 4 respectivement pour les  $\mu$ -uplets  $\Delta$  et  $\Delta'$  et les constantes  $c$  et  $c'$  et nous montrons que  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont équivalents. En fait, comme nous venons de le voir, nous pouvons supposer que les suites  $S_h$  et  $S'_h$  vérifient la condition plus forte 4'. Le point clef de la démonstration est contenu dans le lemme suivant.

**Lemme 17.8.** — *Soit  $J'$  un intervalle fermé contenu dans  $] \alpha, \beta [$ . Pour  $h$  assez grand, la matrice  $S_h$  appartient à  $\text{Gl}(\mathcal{A}(J'))$ .*

*Preuve.* — D'après la condition 2, nous avons

$$\zeta^{\sum \Delta_i} \det S_h(x) = \det S_h(\zeta x) \det Y(\zeta x, x).$$

Pour  $y$  fixé dans la couronne  $\mathcal{C}(J)$ , la fonction  $x \mapsto \det Y(x, y)$  est solution d'une équation du premier ordre qui satisfait la condition de Robba. Comme elle vaut 1 en  $y$ , elle ne s'annule pas dans son disque de convergence c'est-à-dire dans le disque de centre  $y$  et de rayon  $|y|$ . Donc la fonction  $\det Y(x, y)$  ne s'annule pas sur son ensemble de définition  $\{x, y \in \mathcal{C}(J), |x - y| < |y|\}$ .

En particulier,  $\det Y(\zeta x, x) \neq 0$  pour tout  $x$  dans  $\mathcal{C}(J)$ . Donc, si  $\det S_h(a) = 0$  alors  $\det S_h(\zeta a) = 0$ . Autrement dit, si la fonction  $\det S_h$  a un zéro  $a$ , alors elle a  $p^h$  zéros (les  $\zeta a$  pour  $\zeta$ , dans  $\Gamma_h$ ) de même valeur absolue (car  $|\zeta a| = |a|$ ), et on constate que la fonction  $f = \det S_h$  satisfait l'hypothèse du lemme 17.6.

D'après ce lemme et la condition  $1 \leq |\det S_h|_\rho \leq \|S_h\|_\rho^\mu$ , le déterminant de la matrice  $S_h$  ne s'annule pas dans la couronne  $\mathcal{C}(I_h)$  où  $I_h$  est l'intervalle (ouvert) formé des nombres  $\rho$  satisfaisant la condition :

$$(\log \rho - \log \alpha)(\log \beta - \log \rho) > p^{-h}(\log \beta - \log \alpha)\mu h \log c =: k_h.$$

Or  $\lim_{h \rightarrow \infty} k_h = 0$ , donc  $J'$  est contenu dans l'intervalle  $I_h$  pour  $h$  assez grand. □

D'après le lemme 17.8, pour  $h$  assez grand, la matrice  $Q_h \stackrel{\text{déf}}{=} S'_h S_h^{-1}$  appartient à  $\text{Mat}(\mathcal{A}(J))$ . Par ailleurs, la condition 2 étant satisfaite par  $S_h$  et par  $S'_h$ , on a

$$\zeta^{\Delta'} Q_h(x) \zeta^{-\Delta} = Q_h(\zeta x) \quad \text{pour tout } \zeta \text{ dans } \Gamma_h.$$

On peut donc appliquer le lemme 17.4 à la matrice  $Q_h$ . Comme

$$(46) \quad \|Q_h\|_\rho \leq \|S'_h\|_\rho \|S_h^{-1}\|_\rho \leq c'^h \|S_h\|_\rho^{\mu-1} \frac{1}{|\det S_h|_\rho} \leq c'^h c^{(\mu-1)h},$$

$$(47) \quad |\det Q_h|_\rho = |\det S'_h|_\rho |\det S_h|_\rho^{-1} \geq |\det S_h|_\rho^{-1} \geq \|S_h\|_\rho^{-\mu} \geq c^{-\mu h},$$

il existe une permutation  $\sigma_h$  de  $\llbracket 1, \dots, \mu \rrbracket$  telle que

$$\begin{aligned} \left\| (\Delta' - \sigma_h(\Delta))^{(h)} \right\|_{\infty} &\leq \sum_{i=1}^{\mu} |(\Delta'_i - \Delta_{\sigma_h(i)})^{(h)}|_{\infty} \\ &\leq h \frac{\log c' + (\mu - 1) \log c - (-\mu) \log c}{-\log c_J(\rho)} = O(h) \end{aligned}$$

Si on fixe un nombre  $\rho$  intérieur à  $J$  et que l'on fait tendre  $h$  vers l'infini, on constate que les  $\mu$ -uplets  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont équivalents.  $\square$

**Définition 17.9.** — On appelle exposant de  $\mathcal{M}$  et on note  $\mathfrak{Exp}(\mathcal{M})$  la classe d'équivalence de  $\mathfrak{E}_{\mu}$  définie dans le théorème 17.7.

**Exemple 17.10 (fondamental).** — Soit  $C$  une matrice de  $\text{Mat}(\mu, K)$  dont les valeurs propres sont dans  $\mathbb{Z}_p^{(10)}$ , soit  $G \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{x} C$  et soit  $\mathcal{M}_G$  le  $\mathcal{A}([0, \infty[)$ -module différentiel associé à  $G$ .

Ecrivons  $C$  sous la forme  $C = N + D$  avec  $D = H^{-1} \Delta H$  pour  $\Delta$  diagonale,  $N$  nilpotente et  $ND = DN$ . Pour  $\zeta$  dans  $\Gamma_h$ , on a :

$$(1 + (\zeta - 1))^N = \exp(\log(\zeta)N) = \exp(0) = \mathbf{I}, \quad (1 + (\zeta - 1))^D = H^{-1} \zeta^{\Delta} H$$

On trouve :

$$Y_G(x, y) = \left( \frac{x}{y} \right)^C = \left( 1 + \frac{x - y}{y} \right)^C, \quad Y_G(\zeta x, x) = (1 + (\zeta - 1))^C = H^{-1} \zeta^{\Delta} H$$

et on constate que  $\zeta^{\Delta} H = H Y_G(\zeta x, x)$ . Autrement dit, la suite constante  $S_h = H$  satisfait la condition 2 du théorème 17.7. Quitte à multiplier  $H$  par un nombre de  $K$ , on peut supposer que  $|\det H| \geq 1$  et alors la suite  $S_h$  satisfait les quatre conditions de ce théorème avec  $c = \|H\|$ .

Par définition, l'exposant de  $\mathcal{M}_G$  est donc la classe d'équivalence du  $\mu$ -uplet des éléments de la diagonale de  $\Delta$ , c'est-à-dire des valeurs propres de la matrice  $C$ . Dans ce cas particulier d'une équation différentielle à point singulier régulier, notre définition est bien cohérente avec la définition "classique".

**17.3. Cas général.** — Soient  $J' \subset J$  deux intervalles fermés et  $\mathcal{M}$  un objet de  $\text{Rob}(\mathcal{A}(J))$ . Un  $\mu$ -uplet  $\Delta$  et une suite  $\{S_h\}$  vérifiant les conditions 1, 2, 3 et 4 du théorème 17.7 sur l'intervalle  $J$  vérifient ces mêmes conditions sur l'intervalle  $J'$ . On en déduit que l'exposant du module  $\mathcal{A}(J') \otimes_{\mathcal{A}(J)} \mathcal{M}$  est le même que celui de  $\mathcal{M}$ . Ceci justifie la définition suivante.

**Définition 17.11.** — Soit  $I$  un intervalle et  $\mathcal{M}$  un objet de  $\text{Rob} \mathcal{A}(I)$ . On appelle exposant de  $\mathcal{M}$  l'exposant du module  $\mathcal{A}(J) \otimes_{\mathcal{A}(I)} \mathcal{M}$  où  $J$  est un intervalle fermé non réduit à un point contenu dans  $I$ .

<sup>(10)</sup>Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que cette condition est nécessaire et suffisante pour que  $\mathcal{M}$  satisfasse la condition de Robba.

**17.4. Propriétés des exposants.** — Pour  $0 < \nu < \mu$ , la bijection canonique  $\mathbb{Z}_p^\nu \times \mathbb{Z}_p^{\mu-\nu} \rightarrow \mathbb{Z}_p^\mu$  définit, par passage au quotient, une application surjective  $(\tilde{\Delta}, \tilde{\Delta}') \mapsto \tilde{\Delta} \oplus \tilde{\Delta}'$  de  $\mathfrak{E}_\nu \times \mathfrak{E}_{\mu-\nu}$  sur  $\mathfrak{E}_\mu$ . Si  $\mu \geq 2$ , cette application n'est pas bijective.

Soit  $\tilde{\Delta}$  (resp.  $\tilde{\Delta}'$ ) un élément de  $\mathfrak{E}_\nu$  (resp.  $\mathfrak{E}_{\mu-\nu}$ ). Si  $\tilde{\Delta} \oplus \tilde{\Delta}'$  a des différences non Liouville (resp. est non Liouville), il en est de même de  $\tilde{\Delta}$  et  $\tilde{\Delta}'$ . La réciproque est fautive ( $\tilde{\Delta}$  et  $\tilde{\Delta}'$  peuvent avoir des différences non Liouville alors que certaines différences de  $\tilde{\Delta} \oplus \tilde{\Delta}'$  sont Liouville).

**Proposition 17.12.** — Soit  $I$  un intervalle et soit  $0 \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow 0$  une suite exacte de  $\text{Rob}(\mathcal{A}(I))$ . On a  $\mathfrak{E}\mathfrak{p}(\mathcal{M}) = \mathfrak{E}\mathfrak{p}(\mathcal{N}) \oplus \mathfrak{E}\mathfrak{p}(\mathcal{Q})$ . En particulier, si  $\mathcal{M}$  a un exposant non Liouville (resp. dont les différences sont non Liouville), il en est de même de  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{Q}$ .

*Preuve.* — On complète une base  $\mathfrak{e}$  de  $\mathcal{N}$  en une base  $(\mathfrak{e}, \mathfrak{f})$  de  $\mathcal{M}$ . Par construction, la matrice  $G$  qui représente la dérivation  $D$  dans cette base est de la forme  $\begin{pmatrix} G' & 0 \\ G_3 & G'' \end{pmatrix}$  où  $G'$  (resp.  $G''$ ) représente la dérivation  $D$  dans la base  $\mathfrak{e}$  de  $\mathcal{N}$  (resp. dans la base  $\bar{\mathfrak{f}}$  image de  $\mathfrak{f}$  dans  $\mathcal{Q}$ ).

On en déduit que  $Y_G$  est de la forme  $\begin{pmatrix} Y_{G'} & 0 \\ Y_3 & Y_{G''} \end{pmatrix}$  et que les matrices  $S_{G,h,\Delta}$  construites dans le théorème 17.7 sont de la forme  $\begin{pmatrix} S_{G',h,\Delta'} & 0 \\ S_{3,h} & S_{G'',h,\Delta''} \end{pmatrix}$  où on a posé  $\Delta = \Delta' \oplus \Delta''$  avec  $\Delta' = (\Delta_1, \dots, \Delta_\nu)$  et  $\Delta'' = (\Delta_{\nu+1}, \dots, \Delta_\mu)$  pour  $\nu$  le rang de  $\mathcal{N}$ . En particulier  $\det S_{G,h,\Delta} = \det S_{G',h,\Delta'} \det S_{G'',h,\Delta''}$  et il est maintenant facile de vérifier que la suite  $S_{G',h,\Delta'}$  (resp.  $S_{G'',h,\Delta''}$ ) satisfait les conditions du théorème 17.7 dans la base  $\mathfrak{e}$  de  $\mathcal{N}$  (resp.  $\bar{\mathfrak{f}}$  de  $\mathcal{Q}$ ) c'est-à-dire que  $\Delta'$  (resp.  $\Delta''$ ) est un représentant de l'exposant de  $\mathcal{N}$  (resp.  $\mathcal{Q}$ ).  $\square$

La multiplication par  $p$  des éléments de  $\mathbb{Z}_p^\mu$  composante par composante définit par passage au quotient une bijection de  $\mathfrak{E}_\mu$  dans lui-même que nous noterons  $p$ .

**Proposition 17.13.** — Soit  $I$  un intervalle et  $\mathcal{M}$  un objet de  $\text{Rob}(\mathcal{A}(I^p))$  avec  $I^p = \{\rho; \rho \in I\}$ . Pour  $\varphi(x) = x^p$ , le module  $\varphi^*(\mathcal{M})$  est un objet de  $\text{Rob}(\mathcal{A}(I))$  et on a  $\mathfrak{E}\mathfrak{p}(\varphi^*(\mathcal{M})) = p \mathfrak{E}\mathfrak{p}(\mathcal{M})$ .

*Preuve.* — Le fait que  $\varphi^*(\mathcal{M})$  soit de Robba est une conséquence immédiate de la proposition 20.10. Si  $Y_\mathfrak{e}(x, y)$  est la résolvante pour  $\mathcal{M}$  dans une base  $\mathfrak{e}$ , alors la résolvante pour  $\varphi^*(\mathcal{M})$  dans la base  $\varphi^*(\mathfrak{e})$  est  $Y_\mathfrak{e}(x^p, y^p)$ . Soit  $\Delta$  un  $\mu$ -uplet et  $\{S_h\}$  une suite satisfaisant les conditions du théorème 17.7 dans la base  $\mathfrak{e}$ , on constate que  $p\Delta$  et  $\{\varphi^*(S_h)\}$  vérifient ces mêmes conditions dans la base  $\varphi^*(\mathfrak{e})$  de  $\varphi^*(\mathcal{M})$ .  $\square$

### 18. Structure des modules différentiels de Robba

**Théorème 18.1.** — Soit  $I$  un intervalle ouvert. Tout  $\mathcal{A}(I)$ -module différentiel  $\mathcal{M}$  de Robba dont l'exposant  $\tilde{\Delta}$  a des différences non Liouville s'obtient par extensions successives à partir des modules de rang un  $x^{\Delta_i} \mathcal{A}(I)$  ( $1 \leq i \leq \mu$ ).

**Remarque 18.2.** — Comme les différences de  $\tilde{\Delta}$  ne sont pas Liouville, les composantes  $\Delta_i$  de l'un de ses représentants sont définies modulo  $\mathbb{Z}$  à ordre près si bien que les modules  $x^{\Delta_i} \mathcal{A}(I)$  ne dépendent pas, à ordre près, du représentant  $\Delta$  choisi. Par contre, si plusieurs des  $\Delta_i$  sont égaux, il y a plusieurs modules différentiels non isomorphes qui ont le même exposant  $\tilde{\Delta}$ .

*Preuve.* — Soit  $J$  un intervalle fermé contenu dans  $I$ . On choisit, ce qui est toujours possible, deux intervalles fermés  $J'$  et  $J''$  tels que  $J$  est contenu dans l'intérieur de  $J'$ ,  $J'$  est contenu dans l'intérieur de  $J''$  et  $J''$  est contenu dans  $I$ .

Soit  $N$  un  $\mu$ -uplet de  $\mathbb{Z}^\mu$ . Le changement de base associé à la matrice  $x^N$  fait passer du représentant  $\Delta$  de l'exposant au représentant  $\Delta + N$ . Quitte à faire un tel changement de base, on peut donc choisir un représentant  $\Delta$  de  $\tilde{\Delta}$  dont les différences ne sont pas dans  $\mathbb{Z} - \{0\}$ . Par définition de l'exposant, il existe une suite  $(S_h)$  vérifiant les conditions 1., 2., 3., et 4. du théorème 17.7 pour l'intervalle  $J''$  et le  $\mu$ -uplet  $\Delta$ .

On pose alors

$$Q_h = S_{2^{h+1}} S_{2^h}^{-1}.$$

Le lemme 17.8 montre que

- a) pour  $h$  assez grand la matrice  $Q_h$  appartient à  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}(J'))$ .

Par ailleurs, pour  $\zeta$  dans  $\Gamma_{2^h} \subset \Gamma_{2^{h+1}}$ , la condition 2. pour  $S_{2^{h+1}}$  et  $S_{2^h}$  donne

- b)  $\zeta^\Delta Q_h(x) \zeta^{-\Delta} = Q_h(\zeta x)$ .

et un calcul analogue à celui des relations (46) et (47) donne les encadrements

- c)  $\|Q_h\|_{J'} \leq c^{2^{h+1}} c^{(\mu-1)2^h} = c^{(\mu+1)2^h}$ ,  
d)  $\|\det Q_h\|_{J'} \geq c^{-\mu 2^h}$ , d'où on déduit  
e)  $\|Q_h^{-1}\|_{J'} \leq \|Q_h\|_{J'}^{\mu-1} \|\det Q_h|_{J'}^{-1}\| \leq c^{(\mu^2+\mu-1)2^h}$ .

Le lemme 17.5 s'applique et montre que  $Q_h = C_h + R_h$  où

- $C_h$  appartient à  $\text{Mat}(\mu, K)$  et commute avec  $\Delta$ ,
- $R_h$  est une matrice de  $\text{Mat}(\mu, \mathcal{A}(J'))$ ,
- $\|R_h\|_\rho \leq c_{J'}(\rho)^{\delta(\Delta, 2^h)} \|Q_h\|_{J'} \leq c_{J'}(\rho)^{\delta(\Delta, 2^h)} c^{(\mu+1)2^h}$ .

On a

$$\frac{1}{h} \delta(\Delta, h) = \begin{cases} \frac{1}{h} p^h & \text{si tous les } \Delta_i \text{ sont égaux} \\ \min_{\Delta_i \neq \Delta_j} \frac{1}{h} |(\Delta_i - \Delta_j)^{(h)}|_\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

et comme  $\Delta$  a des différences non Liouville, on constate que  $\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{h} \delta(\Delta, h) = \infty$ .

Par ailleurs, on a  $\max_{\rho \in J} c_{J'}(\rho) = \gamma < 1$ . Il en résulte que :

$$\begin{aligned} 2^{-h} \log \|R_h\|_{\mathcal{C}(J)} &\leq 2^{-h} \left( \delta(\Delta, 2^h) \log \gamma + (\mu + 1) 2^h \log c \right) \\ &= -2^{-h} \delta(\Delta, 2^h) (-\log \gamma) + (\mu + 1) \log c \xrightarrow{h \rightarrow \infty} -\infty \end{aligned}$$

Or les conditions c) et d) ci-dessus montrent que

$$2^{-h} \log \|Q_h^{-1}\|_{\mathcal{C}(J)} \leq (\mu^2 + \mu - 1) \log c.$$

Donc  $\log \|Q_h^{-1} R_h\|_{\mathcal{C}(J)} \leq \log \|Q_h^{-1}\|_{\mathcal{C}(J)} + \log \|R_h\|_{\mathcal{C}(J)}$  tend vers  $-\infty$ .

En conclusion, pour  $h$  assez grand, disons  $h \geq h_0$ , la matrice  $Q_h$  appartient à  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}(J'))$  et on a  $\|Q_h^{-1}R_h\|_{\mathcal{C}(J)} < 1$ . La matrice

$$C_h = Q_h(\mathbf{I} - Q_h^{-1}R_h)$$

est alors inversible et vérifie :

$$\|C_h\| = \|Q_h\|_{\mathcal{C}(J)} \leq c^{(\mu+1)2^h} \quad \|C_h^{-1}\| = \|Q_h^{-1}\|_{\mathcal{C}(J)} \leq c^{(\mu^2+\mu-1)2^h}$$

On considère alors la suite  $D_h$  ( $h \geq h_0$ ) de matrices inversibles définies par la récurrence

$$D_{h+1} = C_h D_h \quad D_{h_0} = \mathbf{I}.$$

En remarquant que  $\sum_{i=h_0}^{h-1} 2^i \leq 2^h$  (le fait de faire une récurrence sur les  $S_{2^h}$  au lieu des  $S_h$  se manifeste ici. Cette astuce est due à Gachet), on trouve

$$\|D_h\| \leq \prod_{i=h_0}^{h-1} \|C_h\|_{\mathcal{C}(J)} \leq c^{(\mu+1)2^h} \quad \|D_h^{-1}\| \leq \prod_{i=h_0}^{h-1} \|C_h^{-1}\|_{\mathcal{C}(J)} \leq c^{(\mu^2+\mu-1)2^h}$$

D'où on déduit (remarquer que  $D_{h+1}^{-1}C_h D_h = \mathbf{I}$  par construction)

$$\begin{aligned} 2^{-h} \log \|D_{h+1}^{-1}Q_h D_h - \mathbf{I}\|_{\mathcal{C}(J)} &= 2^{-h} \log \|D_{h+1}^{-1}R_h D_h\|_{\mathcal{C}(J)} \\ &\leq 2^{-h} \log \|D_{h+1}^{-1}\|_{\mathcal{C}(J)} + 2^{-h} \log \|R_h\|_{\mathcal{C}(J)} + 2^{-h} \log \|D_h\|_{\mathcal{C}(J)} \\ &\leq 2(\mu^2 + \mu - 1) \log c - 2^{-h} \delta(\Delta, 2^h)(-\log \gamma) + (\mu + 1) \log c + (\mu + 1) \log c \\ &= -2^{-h} \delta(\Delta, 2^h)(-\log \gamma) + 2(\mu^2 + \mu) \log c \xrightarrow{h \rightarrow \infty} -\infty \end{aligned}$$

On en déduit que la suite  $\|D_{h+1}^{-1}Q_h D_h - \mathbf{I}\|_{\mathcal{C}(J)}$  tend vers 0 quand  $h$  tend vers l'infini et donc que la suite

$$D_h^{-1} S_h = D_h^{-1} Q_{h-1} D_{h-1} D_{h-1}^{-1} Q_{h-2} D_{h-2} \cdots D_{h_0+1}^{-1} Q_{h_0} S_{h_0}$$

converge dans  $\text{Mat}(\mathcal{A}(J))$ . Notons  $S$  sa limite.

Comme  $C_h$  commute avec  $\Delta$ , les matrices  $D_h$  et  $D_h^{-1}$  commutent avec  $\zeta^\Delta$  pour  $\zeta$  dans  $\Gamma = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} \Gamma_h$ . Pour  $\zeta$  dans  $\Gamma$ , la condition 2. du théorème 17.7 donne :

$$(48) \zeta^\Delta S(x) = \lim_{h \rightarrow \infty} \zeta^\Delta D_h^{-1} S_h(x) = \lim_{h \rightarrow \infty} D_h^{-1} S_h(\zeta x) Y_G(\zeta x, x) = S(\zeta x) Y_G(\zeta x, x).$$

En particulier, si le déterminant de  $S(x)$  s'annulait en un point  $a$ , il s'annulerait en tous les points  $\zeta a$  ce qui est impossible car cette fonction analytique non nulle n'a qu'un nombre fini de zéro dans la couronne fermée  $\mathcal{C}(\{|a|\})$ . Donc  $S$  appartient à  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}(J))$ .

Faisons le changement de base associé à la matrice  $S$  et notons  $F$  la matrice qui représente la dérivation dans la base  $S\mathbf{e}$  de  $\mathcal{A}(J) \otimes_{\mathcal{A}(I)} \mathcal{M}$ . La nouvelle résolvante  $Y_F$  vérifie  $Y_F(y, x) = S(y) Y_G(yx) S^{-1}(x)$ . La relation (48) s'écrit donc

$$Y_F(\zeta x, x) = \zeta^\Delta \quad (\forall \zeta \in \Gamma)$$

d'où, en dérivant par rapport à  $x$ , on déduit que la matrice  $F$  vérifie la relation :

$$0 = \zeta F(\zeta x) Y_F(\zeta x, x) - Y_F(\zeta x, x) F(x) = \zeta F(\zeta x) \zeta^\Delta - \zeta^\Delta F(x)$$

pour tout  $\zeta$  dans  $\Gamma$ .

Ecrivant  $F = \sum_{s \in \mathbb{Z}} F_s$ , on trouve que  $F_{ij,s} = 0$  si  $\Delta_j + s + 1 - \Delta_i \neq 0$ . Puisque les différences  $\Delta_i - \Delta_j$  ne sont pas des entiers non nuls, cette relation montre que  $F_s = 0$  si  $s \neq -1$ . Autrement dit,  $F = \frac{1}{x}A$  où  $A$  est une matrice constante. Mais alors

$$Y_F(x, y) = \left(\frac{x}{y}\right)^A = \left(1 + \frac{x-y}{y}\right)^A$$

ce qui donne  $\zeta^\Delta = Y_F(\zeta x, x) = \zeta^A$  et montre que la partie semi-simple de la matrice  $A$  est la matrice diagonale de diagonale  $\Delta$ .

Pour terminer la démonstration, il suffit de “recoller” les solutions obtenues pour les différents intervalles  $J$ .

Précisons ce recollement. Pour cela nous considérons l’ensemble  $\mathfrak{N}$  des  $\mathcal{A}([0, \infty[)$ -modules différentiels  $\mathcal{N}$  possédant une base dans laquelle la dérivation est représentée par  $\frac{1}{x}A$  où  $A$  est une matrice sous forme réduite de Jordan et dont la diagonale est donnée par  $\Delta$ . Comme il n’y a qu’un nombre fini de telles matrices, l’ensemble  $\mathfrak{N}$  ne contient qu’un nombre fini de modules différentiels (à isomorphisme près).

Pour  $\mathcal{N}$  dans  $\mathfrak{N}$  et  $J$  intervalle contenu dans  $I$ , nous considérons le  $K$ -espace vectoriel (de dimension au plus  $\mu^2$ )

$$\mathcal{S}_J(\mathcal{N}) \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Hom}_{\mathcal{A}(J)\langle D \rangle} (\mathcal{A}(J) \otimes_{\mathcal{A}(I)} \mathcal{M}, \mathcal{A}(J) \otimes_{\mathcal{A}([0, \infty[)} \mathcal{N})$$

On vient de démontrer que, pour tout intervalle fermé  $J$  (contenu dans  $I$ ), il existe un module différentiel  $\mathcal{N}$  dans  $\mathfrak{N}$  tel que  $\mathcal{S}_J(\mathcal{N})$  contienne un isomorphisme (et en particulier n’est pas réduit à 0).

Maintenant, pour  $J \subset J'$ , on a une injection canonique de  $\mathcal{S}_{J'}(\mathcal{N})$  dans  $\mathcal{S}_J(\mathcal{N})$  et la dimension de  $\mathcal{S}_J(\mathcal{N})$  est décroissante en  $J$ . Elle devient donc constante quand  $J$  est assez grand, disons  $J \supset J_0$ . Comme il n’y a qu’un nombre fini de  $\mathcal{N}$  à considérer, on peut même supposer que ceci se produit pour tous les modules différentiels  $\mathcal{N}$  de  $\mathfrak{N}$ . Donc, pour  $J \supset J_0$ , l’espace  $\mathcal{S}_J(\mathcal{N})$  est indépendant de  $J$  et est aussi égal à  $\mathcal{S}_I(\mathcal{N})$ . Or il existe  $\mathcal{N}$  dans  $\mathfrak{N}$  pour lequel cet espace contient la matrice  $S$  d’un isomorphisme c’est-à-dire qui appartient à  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}(J))$ . Une telle matrice a un déterminant non nul sur la couronne  $\mathcal{C}(J)$  et est analytique dans la couronne  $\mathcal{C}(I)$  car elle appartient à  $\mathcal{S}_J(\mathcal{N}) = \mathcal{S}_I(\mathcal{N})$ . Comme ce déterminant est solution d’une équation différentielle du premier ordre et qu’il n’est pas identiquement nul, il ne s’annule pas sur la couronne  $\mathcal{C}(I)$ . La matrice  $S$  appartient donc en fait à  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}(I))$  et représente un isomorphisme entre  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{A}(I) \otimes_{\mathcal{A}([0, \infty[)} \mathcal{N}$ .  $\square$

## CHAPITRE VII DÉCOMPOSITION SUIVANT LES PENTES

Dans ce chapitre, nous démontrons le théorème de décomposition 23.2, analogue  $p$ -adique du corollaire 12.2. C’est ce résultat qui montre le rôle fondamental de l’anneau  $\mathcal{R}$  pour les équations différentielles  $p$ -adiques. En effet, comme on peut le voir sur

l'exemple 9.5, on ne peut espérer avoir un résultat semblable sur les autres anneaux que nous avons considéré, par exemple, sur le corps  $\mathcal{E}^\dagger$ .

Avant de pouvoir faire cette démonstration nous avons besoin de deux résultats techniques.

Le premier est l'analogie  $p$ -adique d'un théorème de Birkhoff. Il va permettre, entre autres, de supprimer les "singularités apparentes" de construire des "petites bases" pour les  $\mathcal{A}(I)$ -modules différentiels ayant un "grand" rayon de convergence (analogie des bases cycliques du corollaire 8.8.3).

Le second, l'existence d'un "antécédent de Frobenius", est l'outil fondamental pour étudier le rayon de convergence lorsqu'il n'est pas "petit". En effet, il permet, à partir d'un  $\mathcal{A}(I)$ -module différentiel de rayon de convergence supérieur à  $\omega\rho$  et donc invisible sur les coefficients de la matrice d'une base cyclique, de construire un tel antécédent pour lequel ce rayon de convergence devient visible.

### 19. Théorèmes de Birkhoff $p$ -adiques

Etant donnée une matrice  $H$  de  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}([0, \rho]))$ , on voudrait l'écrire comme le produit d'une matrice  $L$  de  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}([0, \rho]))$  et d'une matrice  $M$  de  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}([\rho, \infty]))$ .

On constate facilement que les matrices diagonales  $x^N$  dont les coefficients de la diagonale sont des monômes  $x^{N_i}$  avec des  $N_i$  dans  $\mathbb{Z}$  non tous nuls n'ont pas de telle décomposition. Mais ce sont essentiellement les seules. Plus précisément, il existe deux sortes de décompositions :

— celles du type "Grothendieck" qui sont de la forme  $H = Lx^N M$  et correspondent à une "trivialisation" d'un fibré vectoriel sur  $\mathbb{P}^1$  [28],

— celles du type "Birkhoff" qui sont de la forme  $H = x^N L M$  et sont liées au problème de Riemann-Hilbert pour les équations différentielles [4].

Quand le corps de base est  $\mathbb{C}$ , on démontre l'existence d'une décomposition de Grothendieck puis on en déduit facilement l'existence d'une décomposition de Birkhoff. Pour aborder ce problème sur le corps  $K$ , nous allons suivre une autre voie en démontrant directement l'existence d'une décomposition de Birkhoff. Nous obtiendrons ainsi une décomposition (unique) dans laquelle la matrice  $L$  satisfera des conditions supplémentaires de norme qui seront indispensables pour la construction de bases dans lesquelles la dérivation est petite.

#### 19.1. Théorèmes de Birkhoff algébriques. —

**Définition 19.1.** — Soit  $A$  un sous-anneau du corps  $\mathcal{F}([0, \rho])$ .

On note  $\mathcal{T}(\mu, A)$  l'ensemble des matrices  $L$  de  $\text{Gl}(\mu, A)$  telles que  $L_{ii} = 1$  pour  $1 \leq i \leq \mu$  et  $L_{ij} = 0$  pour  $j > i$ .

Pour  $\rho$  dans  $]0, \infty[$ , on note  $\mathcal{T}^\rho(\mu, A)$  l'ensemble des matrices  $L$  de  $\text{Gl}(\mu, A)$  telles que

1.  $\|L\|_\rho = \|L^{-1}\|_\rho = 1$ ,
2.  $|L_{ij}|_\rho < 1$  pour  $j > i$ .

Sous la condition 2, la condition 1 s'écrit aussi

- 1'.  $|L_{ii}|_\rho = 1$  et  $|L_{ij}|_\rho \leq 1$  pour  $j < i$ .

**Proposition 19.2.** —  $\mathcal{T}(\mu, A)$  et  $\mathcal{T}^\rho(\mu, A)$  sont des sous-groupes de  $\text{Gl}(\mu, A)$ .

*Preuve.* — Le fait que  $\mathcal{T}(\mu, A)$  et  $\mathcal{T}^\rho(\mu, A)$  soient stables par produit est facile à vérifier. Par hypothèse, une matrice  $L$  de  $\mathcal{T}(\mu, A)$  (resp.  $\mathcal{T}^\rho(\mu, A)$ ) a un déterminant égal à 1 (resp. inversible dans  $A$  et de  $\rho$ -norme égale à 1). Les formules de Cramer permettent de vérifier que les coefficients au-dessus de la diagonale de la matrice  $L^{-1}$  sont nuls (resp. sont de  $\rho$ -normes strictement inférieures à 1).  $\square$

**Définition 19.3.** — Soit  $S$  un ensemble de points fermés de  $\mathbb{A}_K = \mathcal{C}([0, \infty[)$  (resp. de  $\mathcal{C}(I)$ ), on note  $K[x]_S$  (resp.  $\mathcal{A}(I)_S$ ) le localisé de  $K[x]$  (resp.  $\mathcal{A}(I)$ ) en  $S$  c'est-à-dire l'ensemble des éléments de  $K(x)$  (resp.  $\mathcal{F}(I)$ ) qui ont tous leurs pôles dans  $S \cup \{\infty\}$ .

**Théorème 19.4 (de Birkhoff algébrique).** — Soit  $I \subset [0, \infty[$  un intervalle,  $J$  un intervalle fermé contenu dans  $I$ ,  $H$  une matrice de  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{F}(I))$ ,  $S$  un ensemble de points fermés contenu dans la couronne  $\mathcal{C}(J)$ .

On a  $H = LM$  avec  $L$  dans  $\text{Gl}(\mu, K(x))$  et  $M$  dans  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}(I)_{\mathcal{C}(I)-S})$ . De plus :

1. on peut prendre  $L$  dans  $\mathcal{T}(\mu, K[x]_S)$ ,
2. pour  $\rho > 0$  et  $\tilde{S} = S \bigcup_{a \in S - K \cap S} \mathcal{C}(|a|)$   $[\tilde{S} \subset \mathcal{C}(J)$  et  $\tilde{S} = S$  si  $S \subset K]$ ,
  - 2-a. si  $0 \notin S$  on peut prendre  $L$  dans  $\mathcal{T}^\rho(\mu, K[x]_{\tilde{S} \cup \{0\}})$ ,
  - 2-b. si  $S \subset \mathcal{C}([\rho, \infty[)$ , on peut prendre  $L$  dans  $\mathcal{T}^\rho(\mu, K[x]_{\tilde{S}})$ .
  - 2-c. si  $0 \in S$  et si  $\rho \in |K^*|$ , on peut prendre  $L$  dans  $\mathcal{T}^\rho(\mu, K[x]_{\tilde{S}})$ .

La démonstration est fortement compliquée par deux difficultés : d'une part, nous demandons que les coefficients de la matrice  $L$  soient dans  $K(x)$  alors que le corps  $K$  n'est pas supposé algébriquement clos ; d'autre part la définition de  $\mathcal{T}^\rho(\mu, K[x]_S)$  demande de normaliser la  $\rho$ -norme de Gauss de certaines fractions rationnelles ce qui n'est pas toujours possible lorsque  $\rho$  n'appartient pas à  $|K^*|$  et va nécessiter deux lemmes préliminaires. La première difficulté disparaît lorsque  $S$  est contenu dans  $K$  et la seconde lorsque  $\rho = 1$ . Il est donc conseillé, dans un premier temps, de faire ces hypothèses pour comprendre le mécanisme de la démonstration.

**Lemme 19.5.** — Soit  $P$  un polynôme de  $K[x]$  et soit  $\rho > 0$ .

- A. Il existe un entier  $d$  et un nombre  $\lambda$  de  $K$  tel, que  $|\lambda x^{-d} P|_\rho = 1$ .
- B. Si toutes les racines de  $P$  sont dans la couronne  $\mathcal{C}([\rho, \infty[)$  ou si  $\rho \in |K^*|$ , il existe un nombre  $\lambda$  de  $K$  tel que  $|\lambda P|_\rho = 1$ .
- C. Si toutes les racines de  $P$  sont de même valeur absolue  $\alpha > 0$  on peut prendre  $\lambda = \frac{1}{P(0)}$  et  $d = 0$  si  $\rho \leq \alpha$ ,  $\lambda = 1$  et  $d = \deg P$  si  $\alpha < \rho$ .

*Preuve.* — On écrit  $P(x) = \prod_a (x - a)$  où les  $a$  sont des points géométriques de la couronne  $\mathcal{C}(I)$ , pas nécessairement tous différents. Comme  $|x - a|_\rho = \max(\rho, |a|)$ , si on note  $d$  le nombre de points  $a$  tels que  $|a| < \rho$ , on trouve :

$$(49) \quad \left| x^{-d} P(x) \prod_{|a| \geq \rho} \frac{1}{a} \right|_\rho = \prod_{|a| < \rho} \left| \frac{x-a}{x} \right|_\rho \prod_{|a| \geq \rho} \left| \frac{x-a}{a} \right|_\rho = 1.$$

Il ne reste plus qu'à constater que  $\lambda = \prod_{|a| \geq \rho} \frac{1}{a}$  appartient à  $K$  pour obtenir A. et B. lorsque  $S \subset \mathcal{C}([\rho, \infty[)$ .

Pour obtenir B. lorsque  $\rho \in |K^*|$ , il suffit de remplacer dans la relation (49) la fraction  $\frac{x-a}{x}$  par  $\frac{x-a}{b}$  pour un élément  $b$  de  $K$  vérifiant  $|b| = \rho$ .

Le résultat C. résulte des égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \left| \frac{P(x)}{P(0)} \right|_\rho &= \left| \prod \frac{x-a}{a} \right|_\rho = \prod \left| \frac{x}{a} - 1 \right|_\rho = 1 && \text{si } \rho \leq \alpha \\ |x^{-\deg P} P(x)|_\rho &= \left| \prod \frac{x-a}{x} \right|_\rho = \prod \left| 1 - \frac{a}{x} \right|_\rho = 1 && \text{si } \alpha \leq \rho \quad \square \end{aligned}$$

**Lemme 19.6.** — Soit  $a$  un nombre de  $K^{alg}$ , soit  $P$  un polynôme irréductible de  $K[x]$  dont  $a$  est racine, soit  $R$  un polynôme de  $K[x]$  tel que  $\deg(R) < \deg(P)$  et soit  $g$  une fraction rationnelle de  $K(x)$  qui n'a ni pôle ni zéro de valeur absolue  $\alpha = |a|$ . Il existe un (unique) polynôme  $\Lambda$  de  $K[x]$  tel que  $\deg(\Lambda) < \deg(P)$  et  $Rg = Pf + \Lambda$  avec  $f$  dans  $\mathcal{A}([\alpha])$  et on a  $|\Lambda|_\alpha = |Rg|_\alpha$ .

*Preuve.* — Par hypothèse, le polynôme  $P$  est  $\alpha$ -extrémal et la fraction rationnelle  $Rg$ , n'ayant aucun pôle de valeur absolue  $\alpha$ , appartient à  $\mathcal{A}([\alpha, \alpha])$ . Le lemme 2.15 permet de définir le polynôme  $\Lambda$  comme le reste de la division euclidienne, dans  $\mathcal{A}([\alpha, \alpha])$ , de  $Rg$  par  $P$  et montre qu'il vérifie  $|\Lambda|_\alpha \leq |Rg|_\alpha$ .

Maintenant, on écrit la relation  $Rg = Pf + \Lambda$ , sous la forme  $\frac{\Lambda}{g} = -P \frac{f}{g} + R$ , avec  $\frac{f}{g}$  dans  $\mathcal{A}([\alpha, \alpha])$ . On constate que  $R$  est le reste de la division euclidienne de  $\frac{\Lambda}{g}$  par  $P$  et donc que  $|R|_\alpha \leq \left| \frac{\Lambda}{g} \right|_\alpha$  c'est-à-dire

$$|Rg|_\alpha = |R|_\alpha |g|_\alpha \leq \left| \frac{\Lambda}{g} \right|_\alpha |g|_\alpha = |\Lambda|_\alpha \leq |Rg|_\alpha. \quad \square$$

*Preuve du théorème 19.4.* — Les quatre résultats de l'énoncé vont être démontrés en parallèle. Posons :

$$\mathcal{T} = \begin{cases} \mathcal{T}(\mu, K[x]_S) & \text{cas 1.} \\ \mathcal{T}^\rho(\mu, K[x]_{\tilde{S} \cup \{0\}}) & \text{cas 2-a.} \\ \mathcal{T}^\rho(\mu, K[x]_{\tilde{S}}) & \text{cas 2-b. et 2-c.} \end{cases}$$

On va démontrer que l'ensemble de matrices

$$\mathcal{L} = \left\{ M \in \text{Mat}(\mu, \mathcal{A}(I)_{\mathcal{C}(I)-S}); MH^{-1} \in \mathcal{T} \right\}$$

contient une matrice de  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}(I)_{\mathcal{C}(I)-S})$ . La décomposition  $H = (MH^{-1})^{-1}M$  sera alors bien du type annoncé.

On vérifie d'abord que l'ensemble  $\mathcal{L}$  est non vide :

Comme l'intervalle  $J$  est fermé, l'anneau  $\mathcal{A}(J)$  est principal (corollaire 2.25). Plus précisément, l'idéal de  $\mathcal{A}(J)$  engendré par les dénominateurs des coefficients de la matrice  $H$  est de la forme  $P_J \mathcal{A}(J)$  pour un polynôme  $P_J$  de  $K[x]$ . Soit  $P_S$  le polynôme

unitaire de  $K[x]$  dont les racines sont les racines de  $P_J$  contenues dans  $S$ . Par construction, les coefficients de la matrice  $P_S H$  n'ont pas de pôle dans  $S$  et la matrice  $P_S \mathbf{I}$  (resp.  $x^{-d} P_S \mathbf{I}$  pour  $d$  entier) appartient à  $\text{Gl}(\mu, K[x]_S)$  (resp.  $\text{Gl}(\mu, K[x]_{S \cup \{0\}})$ ). On constate donc que :

- dans le cas 1., l'ensemble  $\mathcal{L}$  contient la matrice  $M = P_S H$ .
- dans le cas 2-a., d'après le lemme 19.5-A., il existe  $\lambda$  dans  $K$  tel que la matrice  $M = \lambda x^{-d} P_S H$  appartienne à  $\mathcal{L}$ .
- dans les cas 2-b. ou 2-c., on a soit  $\rho \in |K^*|$  soit  $S \subset \mathcal{C}([\rho, \infty[)$  et, d'après le lemme 19.5-B., il existe  $\lambda$  dans  $K$  tel que la matrice  $\lambda P_S H$  appartienne à  $\mathcal{L}$ .

On montre ensuite que  $\mathcal{L}$  contient une matrice de  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}(I)_{\mathcal{C}(I)-S})$  c'est-à-dire une matrice dont le déterminant ne s'annule pas dans  $S$  :

Soit  $M$  une matrice de  $\mathcal{L}$ . On note  $n(M)$  le nombre (c'est-à-dire le degré du diviseur) des zéros de son déterminant qui appartiennent à  $S$ . Ce nombre est fini car, d'une part, la matrice  $M = (M H^{-1}) H$  a un déterminant non identiquement nul et, d'autre part,  $S$  est contenu dans la couronne fermée  $\mathcal{C}(J)$ . On considère une matrice  $M$  de  $\mathcal{L}$  telle que  $n(M) > 0$ . Il existe un nombre  $a$  de  $K^{\text{alg}} \cap S$  (c'est-à-dire un point géométrique de  $S$ ) tel que  $\det(M)(a) = 0$  et donc des nombres  $\lambda_\ell$  du corps  $K[a]$ , non tous nuls, tels que :

$$(50) \quad \sum_{\ell=1}^{\mu} \lambda_\ell M_{\ell j}(a) = 0 \quad \text{pour } 1 \leq j \leq \mu,$$

On note  $P$  le polynôme unitaire minimal de  $a$  sur  $K$  et on pose  $\alpha = |a|$ . Le corps  $K$  étant supposé complet, les conjugués de  $a$  ont aussi une valeur absolue égale à  $\alpha$ . On en déduit que :

$$|P|_\rho = |P(0)| = \alpha^{\deg P} \quad \text{pour } \rho \leq \alpha, \quad |P|_\rho = \rho^{\deg P} \quad \text{pour } \alpha < \rho.$$

Dans chacun des cas du théorème, on va trouver un indice  $i$  et des polynômes  $\Lambda_\ell$  de  $K[x]$  ( $1 \leq \ell \leq \mu$ ) tels que, si on pose

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \frac{\Lambda_1}{P} & \cdots & & \frac{\Lambda_i}{P} & \cdots & \frac{\Lambda_\mu}{P} \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ligne } i, \quad ,$$

la matrice  $LM$  appartienne à  $\mathcal{L}$  et vérifie  $n(LM) < n(M)$ . Si on considère une matrice  $M$  de  $\mathcal{L}$  pour laquelle le nombre  $n(M)$  est minimum, supposer que  $n(M) > 0$  contredirait donc le fait que  $n(M)$  est minimum et donc  $n(M) = 0$ .

• Condition pour que les coefficients de la matrice  $LM$  soient dans  $\mathcal{A}(I)_{\mathcal{C}(I)-S}$  : Les coefficients de la matrice  $LM$  qui ne sont pas sur la  $i$ -ème ligne, sont ceux de la matrice  $M$  et appartiennent donc à  $\mathcal{A}(I)_{\mathcal{C}(I)-S}$  par hypothèse. Les coefficients de la

$i$ -ème ligne de la matrice  $LM$  sont de la forme :

$$(LM)_{ij} = \frac{1}{P} \sum_{\ell=1}^{\mu} \Lambda_{\ell} M_{\ell j}.$$

Comme les  $\Lambda_{\ell}$  sont des polynômes, ils n'ont pas de pôle dans  $S$ . Pour que les  $(LM)_{ij}$  n'aient pas de pôle dans  $S$ , il faut que le pôle en chacun des conjugués de  $a$ , introduit par le facteur  $P$  du dénominateur, soit compensé par un zéro du numérateur. Pour cela,  $P$  étant le polynôme minimal de  $a$  et donc ses racines étant simples, il suffit d'assurer que le numérateur s'annule au point  $a$ , c'est-à-dire que :

$$\sum_{\ell=1}^{\mu} \Lambda_{\ell}(a) M_{\ell j}(a) = 0 \quad \text{pour } 1 \leq j \leq \mu.$$

D'après (50), ce sera le cas si, pour une constante  $\lambda$  de  $K[a]$  indépendante de  $\ell$ , on a

$$(51) \quad \Lambda_{\ell}(a) = \lambda \lambda_{\ell}$$

- Condition pour que la matrice  $LM H^{-1}$  appartienne à  $\mathcal{T}$  :

Comme  $\mathcal{T}$  est un sous-groupe, il suffit que la matrice  $L$  appartienne à  $\mathcal{T}$ . Posons

$$\leq_{\ell} = \leq \quad \text{si } \ell \leq i, \quad \leq_{\ell} = < \quad \text{si } i < \ell,$$

Puisque le polynôme  $P$  a ses racines dans  $S \subset \tilde{S}$ , il suffit d'avoir :

$$(52) \quad \begin{array}{ll} \text{cas 1} & \Lambda_i = 1, \quad \Lambda_{\ell} = 0 \text{ pour } \ell > i; \\ \text{cas 2-a.} & \text{racines de } \Lambda_i \in \tilde{S} \cup \{0\}, \quad |\Lambda_{\ell}|_{\rho} \leq_{\ell} |\Lambda_i|_{\rho} = |P|_{\rho}; \\ \text{cas 2-b. et 2-c.} & \text{racines de } \Lambda_i \in \tilde{S}, \quad |\Lambda_{\ell}|_{\rho} \leq_{\ell} |\Lambda_i|_{\rho} = |P|_{\rho}; \end{array}$$

- Condition pour que  $n(LM) < n(M)$  :

Le polynôme  $\Lambda_i$  (resp.  $\Lambda_i = x^s \tilde{\Lambda}_i$  si  $0 \notin S$ ) a, dans  $S$ , un nombre de racines inférieur à son degré (resp. au degré de  $\tilde{\Lambda}_i$ ) et le polynôme  $P$  a toutes ses racines dans  $S$ . La formule

$$\det(LM) = \det(L) \det(M) = \frac{\Lambda_i}{P} \det(M)$$

donne  $n(LM) \leq \deg \Lambda_i - \deg P + n(M)$  (resp.  $n(LM) \leq \deg \tilde{\Lambda}_i - \deg P + n(M)$ ). Pour obtenir  $n(LM) < n(M)$ , il suffit donc d'avoir

$$(53) \quad \deg \Lambda_i < \deg P, \quad (\text{resp. } \deg \Lambda_i < \deg P + s \text{ si } 0 \notin S \text{ et } \Lambda_i = x^s \tilde{\Lambda}_i).$$

- Construction du nombre  $i$  et des polynômes  $\Lambda_{\ell}$  :

Dans le cas 1 : on définit l'indice  $i$  ( $1 \leq i \leq \mu$ ) par les conditions

$$\lambda_i \neq 0, \quad \lambda_{\ell} = 0 \quad \text{pour } \ell > i.$$

et les polynômes  $\Lambda_{\ell}$  de  $K[x]$  par les relations

$$\Lambda_{\ell}(a) = \frac{\lambda_{\ell}}{\lambda_i}, \quad \deg \Lambda_{\ell} < \deg P.$$

La condition (51) est alors vérifiée et, comme  $\Lambda_i = 1$  et  $\Lambda_{\ell} = 0$  pour  $\ell > i$ , les conditions (52) et (53) le sont également.

Dans les cas 2 : on définit des polynômes  $R_\ell$  de  $K[x]$  par les relations :

$$R_\ell(a) = \lambda_\ell, \quad \deg R_\ell < \deg P$$

et on définit l'indice  $i$  ( $1 \leq i \leq \mu$ ) par les conditions

$$|R_i|_\alpha = \max_{1 \leq \ell \leq \mu} |R_\ell|_\alpha, \quad |R_\ell|_\alpha < |R_i|_\alpha \quad \text{pour } \ell > i.$$

c'est-à-dire  $|R_\ell|_\alpha \leq |R_i|_\alpha$ . On distingue plusieurs cas.

(\*) **Si  $a$  est dans  $K$ , en particulier si  $a = 0$** , on a  $\deg P = 1$  donc  $R_\ell = \lambda_\ell$  et  $|R_\ell|_\alpha = |\lambda_\ell|$ . L'indice  $i$  est défini par la condition  $|\lambda_\ell| \leq \ell |\lambda_i|$ . On pose :

$$\Lambda_\ell = \frac{x}{\lambda_i} \lambda_\ell \quad \text{pour } a \neq 0, \quad \Lambda_\ell = \frac{b}{\lambda_i} \lambda_\ell \quad \text{pour } a = 0,$$

où  $b$  est un nombre du corps  $K$  tel que  $|b| = \rho$  (on est évidemment dans le cas 2-c.). La condition (51) est immédiate à vérifier. Il en est de même de la condition (53) pour  $a = 0$  car alors  $\deg \Lambda_i = 0 < \deg P$ . Pour  $a \neq 0$ , la condition (53) deuxième forme avec  $s = 1$  s'applique si 0 n'appartient pas à  $S$  (cas 2-a.) (nous reviendrons sur le cas 2-c. à la fin de la démonstration). La condition (52) résulte d'un calcul simple :

$$|\Lambda_\ell| = \rho \frac{|\lambda_\ell|}{|\lambda_i|} \leq \ell \rho = |\Lambda_i|_\rho = |P|_\rho$$

(\*\*) **Si  $a$  n'est pas dans  $K$** , on a  $\alpha > 0$  et on considère l'unique factorisation  $R_i = \Lambda Q$  où  $\Lambda$  (resp.  $Q$ ) est un polynôme de  $K[x]$  dont toutes les racines sont (resp. qui n'a aucune racine) de valeur absolue  $\alpha$  et où  $\Lambda$  est unitaire. Il vient :

$$|\Lambda|_\rho = |\Lambda(0)| = \alpha^{\deg \Lambda} \quad \text{pour } \rho \leq \alpha, \quad |\Lambda|_\rho = \rho^{\deg \Lambda} \quad \text{pour } \alpha < \rho.$$

En appliquant le lemme 19.6 avec  $R = R_\ell$  et  $g = \frac{x^s}{Q}$  pour un entier  $s$ , on trouve des polynômes  $\tilde{\Lambda}_\ell^{(s)}$  tels que :

$$\deg \tilde{\Lambda}_\ell^{(s)} < \deg P, \quad \tilde{\Lambda}_\ell^{(s)} = \frac{x^s R_\ell}{Q} \pmod{P}, \quad |\tilde{\Lambda}_\ell^{(s)}|_\alpha = \frac{|x^s R_\ell|_\alpha}{|Q|_\alpha}.$$

Posons  $r = \deg P - \deg \Lambda$ . Par construction, on a  $\deg \Lambda < \deg P$  et on constate que, pour  $0 \leq s < r$ , la fraction rationnelle  $\frac{x^s R_i}{Q} = x^s \Lambda$  est en fait un polynôme de degré au plus  $\deg P - 1$ . On a alors  $\tilde{\Lambda}_i^{(s)} = x^s \Lambda$  et on trouve :

$$\begin{aligned} \text{si } \rho \leq \alpha : \quad & |\tilde{\Lambda}_\ell^{(0)}|_\rho \leq |\tilde{\Lambda}_\ell^{(0)}|_\alpha = \left| \frac{R_\ell}{Q} \right|_\alpha \leq \ell \left| \frac{R_i}{Q} \right|_\alpha = |\Lambda|_\alpha = |\Lambda|_\rho = |\tilde{\Lambda}_i^{(0)}|_\rho \\ \text{si } \alpha < \rho : \quad & |\tilde{\Lambda}_\ell^{(r-1)}|_\rho \leq \left( \frac{\rho}{\alpha} \right)^{\deg \tilde{\Lambda}_\ell^{(r-1)}} |\tilde{\Lambda}_\ell^{(r-1)}|_\alpha = \left( \frac{\rho}{\alpha} \right)^{\deg P - 1} \left| \frac{x^{r-1} R_\ell}{Q} \right|_\alpha \\ & \leq \ell \left( \frac{\rho}{\alpha} \right)^{\deg P - 1} \left| \frac{x^{r-1} R_i}{Q} \right|_\alpha = \left( \frac{\rho}{\alpha} \right)^{\deg P - 1} |x^{r-1} \Lambda|_\alpha \\ & = |x^{r-1} \Lambda|_\rho = \rho^{\deg P - 1} = |\tilde{\Lambda}_i^{(r-1)}|_\rho \end{aligned}$$

Si  $\rho \leq \alpha$ , on pose  $\Lambda_\ell = \frac{P(0)}{\Lambda(0)} \tilde{\Lambda}_\ell^{(0)}$ . On a alors :

$$\Lambda_\ell(a) = \frac{P(0)}{\Lambda(0)} \tilde{\Lambda}_\ell(a) = \frac{P(0)}{\Lambda(0)} \frac{R_\ell(a)}{Q(a)} = \frac{P(0)}{\Lambda(0)Q(a)} \lambda_\ell$$

et la condition (51) est bien satisfaite. Par construction, les racines de  $\Lambda_i$  et de  $P$  sont de valeurs absolues égales à  $\alpha$  et donc dans  $\tilde{S}$  car  $a$  n'est pas dans  $K$  (mais les racines de  $\Lambda_i$  n'ont aucune raison d'être dans  $S$ , ce qui justifie l'introduction de  $\tilde{S}$ ). On a

$$\begin{aligned} |\Lambda_\ell|_\rho &= \left| \frac{P(0)}{\Lambda(0)} \right| |\tilde{\Lambda}_\ell^{(0)}|_\rho \leq \left| \frac{P(0)}{\Lambda(0)} \right| |\tilde{\Lambda}_i^{(0)}|_\rho = |\Lambda_i|_\rho \\ |\Lambda_i|_\rho &= \left| \frac{P(0)}{\Lambda(0)} \right| |\Lambda|_\rho = \left| \frac{P(0)}{\Lambda(0)} \right| |\Lambda(0)| = |P(0)| = |P|_\rho \end{aligned}$$

et la condition (52) est bien satisfaite. Finalement, comme  $\deg \Lambda_i = \deg \tilde{\Lambda}^{(0)} < \deg P$ , la condition (53) est satisfaite.

Si  $\alpha < \rho$ , on pose  $\Lambda_\ell = x \tilde{\Lambda}_\ell^{(r-1)}$ . On a alors :

$$\Lambda_\ell(a) = a \tilde{\Lambda}_\ell^{(r-1)}(a) = a \frac{a^{r-1} R_\ell(a)}{Q(a)} = \frac{a^r}{Q(a)} \lambda_\ell$$

et la condition (51) est bien satisfaite. Les racines de  $\Lambda_i$  et de  $P$  sont de valeur absolue nulle ou égale à  $\alpha$ . Elles appartiennent donc à  $\tilde{S} \cup \{0\}$  (resp.  $\tilde{S}$  si  $0 \in S$ ) et

$$|\Lambda_\ell|_\rho = |x \tilde{\Lambda}_\ell^{(r-1)}|_\rho \leq |x \tilde{\Lambda}_i^{(r-1)}|_\rho = \rho^{\deg P} = |P|_\rho.$$

et la condition (52) est bien satisfaite. Finalement, on a  $\Lambda_i = x^r \Lambda$  avec  $\deg \Lambda < \deg P$ . Dans le cas 2-a., la condition (53) deuxième forme est satisfaite avec  $s = r$ .

Dans le cas 2-c., comme  $\deg \Lambda_i = \deg P$ , la condition (53) n'est pas satisfaite. Mais on peut appliquer le résultat 2-a. et donc se ramener au cas où le déterminant de la matrice  $LM$  n'a pas de zéro dans  $S - \{0\}$ . On élimine alors le zéro éventuel en 0 par le procédé décrit ci-dessus dans (\*). Malheureusement, cela oblige à supposer que  $\rho$  appartient à  $|K^*|$ .  $\square$

**Corollaire 19.7.** — Soit  $I \subset ]0, \infty[$  un intervalle et  $a$  un point fermé de  $\mathcal{C}(I)$  de polynôme minimal unitaire  $P$ . Toute matrice  $H$  de  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{F}(I))$  a une décomposition de la forme  $H = LM$  avec  $L$  dans  $\text{Gl}(\mu, K[x, \frac{1}{P}])$  et  $M$  dans  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}(I)_{\mathcal{C}(I) - \{a\}})$  (autrement dit, les coefficients des matrices  $M$  et  $M^{-1}$  n'ont pas de pôle en  $a$ ).

*Preuve.* — C'est le cas 1 du théorème 19.4 avec  $S = \{a\}$  car  $K[x]_{\{a\}} = K[x, \frac{1}{P}]$ .  $\square$

**Corollaire 19.8.** — Soit  $J \subset ]0, \infty[$  un intervalle fermé et soit  $\rho$  dans  $]0, \infty[$ . Toute matrice  $H$  de  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{F}(J))$  a une décomposition de la forme  $H = LM$  avec  $L$  dans  $\mathcal{T}^\rho(\mu, K(x))$  et  $M$  dans  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}(J))$ .

*Preuve.* — C'est le cas 2-a. du théorème 19.4 avec  $S = \mathcal{C}(J) = \tilde{S}$  car évidemment  $K[x]_{\tilde{S} \cup \{0\}} \subset K(x)$ .  $\square$

**Corollaire 19.9.** — Soit  $J \subset [0, \infty[$  un intervalle fermé et soit  $\rho$  dans  $|K^*|$ . Toute matrice  $H$  de  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{F}(I))$  a une décomposition de la forme  $H = LM$  avec  $L$  dans  $\mathcal{T}^\rho(\mu, K(x))$  et  $M$  dans  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}(J))$ .

*Preuve.* — C'est le cas 2-c. du théorème 19.4 avec  $S = \mathcal{C}(J) = \tilde{S}$ . □

**Corollaire 19.10.** — Soit  $\rho$  dans  $|K^*|$ . Toute matrice  $H$  de  $\text{Gl}(\mu, K(x))$  a une décomposition de la forme  $H = LM$  avec  $L$  dans  $\mathcal{T}^\rho(\mu, K(x) \cap \mathcal{A}([ \rho, \infty[ ))$  et  $M$  dans  $\text{Gl}(\mu, K(x) \cap \mathcal{B}([0, \rho[ ))$ .

*Preuve.* — C'est le cas 2-c. du théorème 19.4 avec  $S = \mathcal{C}(J)$  où  $J = [0, r]$  est un intervalle fermé contenu dans l'intervalle ouvert  $[0, \rho[$  (autrement dit  $r < \rho$ ) et qui contient tous les pôles des coefficients de la matrice  $H$  et de son déterminant. A priori, on trouve ainsi une décomposition  $H = LM$  avec

$$L \in \mathcal{T}^\rho(\mu, K[x]_{\mathcal{C}(J)}) \subset \mathcal{T}^\rho(\mu, K(x) \cap \mathcal{A}([r, \infty[)), \quad M \in \text{Gl}(\mu, \mathcal{A}([0, r])).$$

La propriété de  $L$  découle immédiatement de ce que  $\mathcal{A}([r, \infty[) \subset \mathcal{A}([ \rho, \infty[)$ . La propriété de  $M$  est un peu plus subtile. En effet, par définition de  $r$ , la matrice  $H$  appartient à  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{B}([r, \rho[))$  (une fraction rationnelle est bornée dans toute couronne bornée où elle est analytique) et il en est de même de la matrice  $M = L^{-1}H$ . Donc  $M$  appartient à

$$\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}([0, r])) \cap \text{Gl}(\mu, \mathcal{B}([r, \rho[)) = \text{Gl}(\mu, \mathcal{B}([0, \rho[)). \quad \square$$

**19.2. Théorème de Birkhoff analytique.** — Notre but est de généraliser le corollaire 19.10 aux matrices à coefficients dans  $\mathcal{A}(I)$ . Les fractions rationnelles étant denses dans  $\mathcal{A}(I)$  pour la  $\rho$ -norme de Gauss, l'idée est de faire un passage à la limite dans le corollaire 19.10. Malheureusement, la décomposition du corollaire 19.10 a deux défauts : d'une part, n'étant pas unique, on ne peut pas espérer qu'elle soit conservée par passage à la limite, d'autre part, elle n'est valable que pour  $\rho$  dans  $|K^*|$ . Notre principal travail va être de raffiner cette décomposition de façon à la rendre unique (proposition 19.16). Le passage à la limite sera ensuite facile et un argument galoisien montrera qu'elle reste valable pour n'importe quel  $\rho > 0$ .

L'essentiel de ce paragraphe porte donc sur des matrices dont les coefficients sont des fractions rationnelles.

Le lemme 19.13 donne une décomposition "modulo  $p$ " et repose sur la division euclidienne dans l'anneau  $k[1/x]$  (voir lemme 19.11.3). Le lemme 19.15 permet de relever la décomposition approchée en la décomposition exacte de la proposition 19.16. Le lemme 19.17 montre que cette décomposition est unique ce qui est le point clef de la démonstration du théorème de Birkhoff analytique 19.18.

**Lemme 19.11.** — Soit  $\rho > 0$  et soit  $H$  une fraction rationnelle non nulle appartenant à  $\mathcal{A}([ \rho, \infty[)$ .

1. On a  $H = Q + R + S$  avec  $R$  dans  $K[x]$ ,  $Q$  dans  $\frac{1}{x}K[\frac{1}{x}]$ ,  $S$  dans  $K(x)$  et  $|Q|_\rho \leq |H|_\rho$ ,  $|R|_\rho \leq |H|_\rho$ ,  $|S|_\rho < |H|_\rho$ .
2. Si  $H$  est inversible dans  $\mathcal{A}([\rho, \infty])$  (c'est-à-dire n'a pas de zéro dans  $\mathcal{C}([\rho, \infty])$ ), on a  $H = \Lambda x^N(1 + S)$  avec  $\Lambda$  dans  $K^*$ ,  $N$  dans  $\mathbb{Z}$  et  $|S|_\rho < 1$ .

*Preuve.* — 1.— Soit  $H = \sum_{s \leq v} a_s x^s$  le développement à l'infini de la fraction rationnelle  $H$  où  $-v$  est la valuation  $\frac{1}{x}$ -adique de  $f$ . Reprenant la définition 2.3.2, on note  $n = n_\rho(H)$  le plus petit indice tel que  $|a_n| \rho^n = \max |a_s| \rho^s = |H|_\rho$ . Il suffit de poser

$$R = \sum_{s=0}^v a_s x^s, \quad Q = \sum_{s=n}^{-1} a_s x^s, \quad S = \sum_{s=-\infty}^{n-1} a_s x^s.$$

2.— C'est un cas particulier du corollaire 2.28 ( $N = n_\rho(H) = N_\rho(H)$  et  $\Lambda = a_N$ ).  $\square$

**Définition 19.12.** — Si  $(a_1, \dots, a_\mu)$  est un  $\mu$ -uplet, on note  $\text{diag}(a_1, \dots, a_\mu)$  la matrice diagonale dont les coefficients de la diagonale sont les  $a_i$ .

**Lemme 19.13.** — Soit  $\rho > 0$  et  $H$  dans  $\mathcal{T}^\rho(\mu, K(x) \cap \mathcal{A}([\rho, \infty]))$ . On a une décomposition de la forme  $H = \Lambda x^N L(\mathbf{I} + S)M$  où

- $x^N = \text{diag}(x^{N_1}, \dots, x^{N_\mu})$  avec  $N_i$  dans  $\mathbb{Z}$ ,
- $\Lambda = \text{diag}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_\mu)$  avec  $\Lambda_i$  dans  $K^*$  et  $\|\Lambda x^N\|_\rho = \|x^{-N} \Lambda^{-1}\|_\rho = 1$ .
- $L$  appartient à  $\mathcal{T}^\rho(\mu, K[\frac{1}{x}] \cap \mathcal{A}([\rho, \infty]))$  et  $L(\infty) = \mathbf{I}$ ,
- $S$  appartient à  $\text{Mat}(K(x))$  et  $\|S\|_\rho < 1$ ,
- $M$  appartient à  $\mathcal{T}^\rho(\mu, K[x])$ .

En fait  $L$  (resp.  $M$ ) appartient à  $\mathcal{T}(\mu, K[\frac{1}{x}])$  (resp.  $\mathcal{T}(\mu, K[x])$ ).

*Preuve.* — On fait une récurrence sur  $\mu$ .

• Pour  $\mu = 1$ , la décomposition 19.11.2 donne le résultat avec  $L = M = \mathbf{I}$ . En effet, par hypothèse, on a  $|H|_\rho = 1$  et donc  $|\Lambda x^N|_\rho = |H|_\rho / |1 + S|_\rho = 1$ .

• Pour  $\mu \geq 2$ , on écrit  $H = \begin{pmatrix} H_{11} & {}^t(H_{1j}) \\ (H_{i1}) & \tilde{H} \end{pmatrix}$ . Comme  $H \in \mathcal{T}^\rho(\mu, \mathcal{A}([\rho, \infty]))$ ,

on a  $\|{}^t(H_{1j})\|_\rho < 1$  et  $|\det H|_\rho = |H_{11}|_\rho = |\det \tilde{H}|_\rho = 1$ . Donc  $\tilde{H}$  appartient à  $\mathcal{T}^\rho(\mu - 1, K(x) \cap \mathcal{A}([\rho, \infty]))$  et d'après l'hypothèse de récurrence on a

$$\tilde{H} = \tilde{\Lambda} x^{\tilde{N}} \tilde{L}(\mathbf{I} + \tilde{S}) \tilde{M}$$

avec  $\tilde{\Lambda} = \text{diag}(\Lambda_2, \dots, \Lambda_\mu)$ ,  $x^{\tilde{N}} = \text{diag}(x^{N_2}, \dots, x^{N_\mu})$ ,  $\|\tilde{\Lambda} x^{\tilde{N}}\|_\rho = \|\tilde{\Lambda}^{-1} x^{-\tilde{N}}\|_\rho = 1$ ,  $\tilde{L}$  dans  $\mathcal{T}^\rho(\mu - 1, K[\frac{1}{x}] \cap \mathcal{A}([\rho, \infty]))$ ,  $\tilde{L}(\infty) = \mathbf{I}$ ,  $\tilde{S}$  dans  $\text{Mat}(\mu, K(x))$ ,  $\|\tilde{S}\|_\rho < 1$  et  $\tilde{M}$  dans  $\mathcal{T}^\rho(\mu - 1, K[x])$ . D'après le lemme 19.11.2, on peut écrire

$$H_{11} = \Lambda_1 x^{N_1} (1 + S_1)$$

avec  $|S_1|_\rho < 1$  et  $|\Lambda_1 x^{N_1}|_\rho = |H_{11}|_\rho = 1$ . Par ailleurs, on a

$$\|L^{-1}\tilde{\Lambda}^{-1}x^{-\tilde{N}}(H_{i1})\|_\rho \leq \|L^{-1}\|_\rho \|\tilde{\Lambda}^{-1}x^{-\tilde{N}}\|_\rho \|H\|_\rho \leq 1.$$

et d'après le lemme 19.11.1, on peut écrire

$$\tilde{L}^{-1}\tilde{\Lambda}^{-1}x^{-\tilde{N}}(H_{i1}) = (Q_i + R_i + S_i) \quad (2 \leq i \leq \mu)$$

avec  $R_i$  dans  $K[x]$ ,  $|R_i|_\rho \leq 1$ ,  $Q_i$  dans  $\frac{1}{x}K[\frac{1}{x}]$ ,  $|Q_i|_\rho \leq 1$  et  $|S_i|_\rho < 1$ .

On pose  $x^N = \text{diag}(x^{N_1}, x^{N_2}, \dots, x^{N_\mu})$ ,  $\Lambda = \text{diag}(\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_\mu)$  et

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tilde{L}(Q_i) & \tilde{L} \end{pmatrix} \quad \text{de telle sorte que} \quad L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(Q_i) & \tilde{L}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Il est clair que  $L$  appartient à  $\mathcal{T}^\rho(\mu, K[\frac{1}{x}] \cap \mathcal{A}([\rho, \infty]))$  et que  $L(\infty) = I$ . Il vient

$$\begin{aligned} L^{-1}\Lambda^{-1}x^{-N}H &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(Q_i) & \tilde{L}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_1^{-1}x^{-N_1} & 0 \\ 0 & \tilde{\Lambda}^{-1}x^{-\tilde{N}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{11} & {}^t(H_{1j}) \\ (H_{i1}) & \tilde{H} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(Q_i) & \tilde{L}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + S_1 & -\lambda_1^{-1}x^{-N_1} {}^t(H_{1j}) \\ \tilde{L}(Q_i + R_i + S_i) & \tilde{L}(I + \tilde{S})\tilde{M} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (R_i) & \tilde{M} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_1 & \lambda_1^{-1}x^{-N_1} {}^t(H_{1j}) \\ (-S_1Q_i + S_i) & (Q_i) {}^t(\lambda_1^{-1}x^{-N_1}H_{1j}) + \tilde{S}\tilde{M} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (R_i) & \tilde{M} \end{pmatrix}$  appartient à  $\mathcal{T}^\rho(\mu, K[x])$  et, si on pose

$$S = M^{-1} \begin{pmatrix} S_1 & \lambda_1^{-1}x^{-N_1} {}^t(H_{1j}) \\ (-S_1Q_i + S_i) & (Q_i) {}^t(\lambda_1^{-1}x^{-N_1}H_{1j}) + \tilde{S}\tilde{M} \end{pmatrix},$$

les majorations  $|S_i|_\rho < 1$ ,  $|H_{1j}|_\rho < 1$  et  $\|\tilde{S}\|_\rho < 1$  montrent que  $\|S\|_\rho < 1$ . On constate que la décomposition  $H = \Lambda x^N L(I+S)M$  a les propriétés demandées.  $\square$

**Lemme 19.14.** — Soit  $\rho > 0$  et soit  $f$  dans  $K(x)$ . On a une décomposition  $f = [f]^+ + [f]^-$  dans laquelle  $[f]^+$  (resp.  $[f]^-$ ) appartient à  $K(x) \cap \mathcal{B}([0, \rho])$  (resp. à  $K(x) \cap \mathcal{A}([\rho, \infty])$ ) et vérifie  $[f]^- (\infty) = 0$ . On a de plus  $|f|_\rho = \max(|[f]^+|_\rho, |[f]^-|_\rho)$ .

*Preuve.* — On écrit la décomposition de  $f$  en éléments simples :

$$f = \sum_{\alpha} \sum_{s=1}^{n_{\alpha}} \frac{\lambda_{\alpha,s}}{(x-\alpha)^s} + \sum_{s=0}^{n_{\infty}} \lambda_{\infty,s} x^s$$

où les  $\alpha$  et coefficients  $\lambda_{\alpha,s}$  appartiennent à  $K^{\text{alg}}$ . On pose

$$[f]^+ = \sum_{|\alpha| \geq \rho} \sum_{s=1}^{n_\alpha} \frac{\lambda_{\alpha,s}}{(x-\alpha)^s} + \sum_{s=0}^{n_\infty} \lambda_{\infty,s} x^s, \quad [f]^- = \sum_{|\alpha| < \rho} \sum_{s=1}^{n_\alpha} \frac{\lambda_{\alpha,s}}{(x-\alpha)^s}.$$

Comme les automorphismes de  $K^{\text{alg}}$  sur  $K$  sont continus donc conservent la valeur absolue, on voit que  $[f]^+$  et  $[f]^-$  sont des fractions rationnelles de  $K(x)$ . Par ailleurs, on voit que  $[f]^-$  est le terme associé au point  $\alpha = 0$  de la décomposition de Mittag-Leffler de  $f$  (théorème 3.2). L'égalité  $|f|_\rho = \max(|[f]^+|_\rho, |[f]^-|_\rho)$  est une conséquence immédiate de la majoration (6).  $\square$

**Lemme 19.15.** — Soit  $\rho > 0$  et soit  $S$  une matrice à coefficients dans  $K(x)$  telle que  $\|S\|_\rho < 1$ . On a une décomposition  $\mathbf{I} + S = LM$  avec  $L$  dans  $\mathcal{T}^\rho(\mu, K(x) \cap \mathcal{A}([\rho, \infty]))$  vérifiant  $L(\infty) = \mathbf{I}$  et  $M$  dans  $\mathcal{T}^\rho(\mu, K[x])$ .

*Preuve.* — En appliquant la décomposition du lemme 19.14 à chacun des coefficients de la matrice  $S$ , on obtient une décomposition  $S = [S]^+ + [S]^-$  dans laquelle :

- $[S]^+$  appartient à  $\text{Mat}(K(x) \cap \mathcal{B}([0, \rho[))$  et  $\|[S]^+\|_\rho \leq \|S\|_\rho$ ,
- $[S]^-$  appartient à  $\text{Mat}(K(x) \cap \mathcal{A}([\rho, \infty]))$ ,  $[S]^- (\infty) = 0$  et  $\|[S]^- \|_\rho \leq \|S\|_\rho$ .

En itérant le procédé, on construit par récurrence une suite  $S_n$  de matrices à coefficients dans  $K(x)$  telles que :

$$S_0 = \mathbf{I}, \quad S_n = -[S_{n-1} S]^- \quad (n \geq 1).$$

Par construction, les coefficients de la matrice  $S_n$  appartiennent à  $K(x) \cap \mathcal{A}([\rho, \infty[)$ ,  $S_n(\infty) = 0$  pour  $n \geq 1$  et

$$\|S_n\|_\rho \leq \|S_{n-1}\|_\rho \|S\|_\rho \leq \|S\|_\rho^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Il en résulte que la somme  $\sum_{n=0}^{\infty} S_n = \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} S_n$  converge, a des coefficients dans  $\mathcal{A}([\rho, \infty[)$  et vaut  $\mathbf{I}$  à l'infini. De plus, comme  $\|\sum_{n=1}^{\infty} S_n\|_\rho \leq \|S\|_\rho < 1$ , cette somme appartient à  $\mathcal{T}^\rho(\mu, \mathcal{A}([\rho, \infty[))$  (mais, pour l'instant, rien n'assure que ses coefficients sont des fractions rationnelles). On pose :

$$\begin{aligned} L &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} S_n \right)^{-1} \in \mathcal{T}^\rho(\mu, \mathcal{A}([\rho, \infty[)) , \\ M &= \sum_{n=0}^{\infty} S_n (\mathbf{I} + S) = \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} S_n + \sum_{n=1}^{\infty} S_{n-1} S \\ &= \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} [S_{n-1} S]^+ \in \mathcal{T}^\rho(\mu, \mathcal{B}([0, \rho[)) . \end{aligned}$$

On a évidemment  $LM = \mathbf{I} + S$ . En particulier,  $M = L^{-1}(\mathbf{I} + S)$  appartient à  $\mathcal{T}^\rho(\mu, \mathcal{B}([0, \rho[)) \cap \mathcal{T}^\rho(\mu, \mathcal{A}([\rho, \infty[)) = \mathcal{T}^\rho(\mu, \mathcal{A}([0, \infty[))$ . Mais  $L^{-1}(\infty) = \mathbf{I}$  et les coefficients de  $\mathbf{I} + S$  sont des fractions rationnelles, les coefficients de  $M$  n'ont que

des pôles à l'infini donc sont des polyômes. Donc  $M$  appartient à  $\mathcal{T}^\rho(\mu, K[x])$  et  $L = (\mathbf{I} + S)M^{-1}$  a des coefficients dans  $K(x)$ .  $\square$

**Proposition 19.16.** — Soit  $\rho$  dans  $|K^*|$  et soit  $H$  une matrice de  $\text{Gl}(\mu, K(x))$ . On a une décomposition de la forme  $H = x^N LM$  dans laquelle

- $x^N = \text{diag}(x^{N_1}, \dots, x^{N_\mu})$  avec  $N_i$  dans  $\mathbb{Z}$ ,
- la matrice  $M$  appartient à  $\text{Gl}(\mu, K(x) \cap \mathcal{B}([0, \rho]))$ ,
- la matrice  $L$  appartient à  $\text{Gl}(\mu, K(x) \cap \mathcal{A}([\rho, \infty]))$  et  $L(\infty) = \mathbf{I}$ ,
- la matrice  $x^N Lx^{-N}$  appartient à  $\mathcal{T}^\rho(\mu, K(x) \cap \mathcal{A}([\rho, \infty]))$ .

*Preuve.* — D'après le corollaire 19.10, la matrice  $H$  s'écrit sous la forme  $H = L_1 M_1$  avec  $L_1$  dans  $\mathcal{T}^\rho(\mu, K(x) \cap \mathcal{A}([\rho, \infty]))$  et  $M_1$  dans  $\text{Gl}(\mu, K(x) \cap \mathcal{B}([0, \rho]))$  (c'est ici que l'hypothèse  $\rho$  dans  $|K^*|$  est utilisée).

Le lemme 19.13 appliqué à la matrice  $L_1$  donne  $L_1 = \Lambda x^N L_2 (\mathbf{I} + S) M_2$  où

- \*  $x^N = \text{diag}(x^{N_1}, \dots, x^{N_\mu})$ ,  $N_i$  dans  $\mathbb{Z}$ ,  $\Lambda = \text{diag}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_\mu)$ ,  $\Lambda_i$  dans  $K^*$ ,
- \*  $\|\Lambda x^N\|_\rho = \|x^{-N} \Lambda^{-1}\|_\rho = 1$  soit  $x^N \Lambda = \Lambda x^N$  dans  $\mathcal{T}^\rho(\mu, K(x) \cap \mathcal{A}([\rho, \infty]))$ ,
- \*  $L_2$  appartient à  $\mathcal{T}^\rho(\mu, K(x) \cap \mathcal{A}([\rho, \infty]))$  et  $L_2(\infty) = \mathbf{I}$ ,
- \*  $S$  appartient à  $\text{Mat}(K(x))$  et  $\|S\|_\rho < 1$ ,
- \*  $M_2$  appartient à  $\mathcal{T}^\rho(\mu, K[x])$ .

Enfin, le lemme 19.15 montre que  $\mathbf{I} + S = L_3 M_3$  avec

- \*  $L_3$  dans  $\mathcal{T}^\rho(\mu, K(x) \cap \mathcal{A}([\rho, \infty]))$  et  $L_3(\infty) = \mathbf{I}$ ,
- \*  $M_3$  dans  $\mathcal{T}^\rho(\mu, K[x])$ .

On trouve donc  $H = x^N (\Lambda L_2 L_3 \Lambda^{-1}) \Lambda M_3 M_2 M_1 = x^N LM$  avec

- $L = \Lambda L_2 L_3 \Lambda^{-1}$  dans  $\text{Gl}(\mu, K(x) \cap \mathcal{A}([\rho, \infty]))$ ,
- $L(\infty) = \Lambda L_2(\infty) L_3(\infty) \Lambda^{-1} = \Lambda \Lambda^{-1} = \mathbf{I}$ ,
- $x^N Lx^{-N} = (x^N \Lambda) L_2 L_3 (\Lambda^{-1} x^{-N})$  dans  $\mathcal{T}^\rho(\mu, K(x) \cap \mathcal{A}([\rho, \infty]))$ ,
- $M = \Lambda M_3 M_2 M_1$  dans  $\text{Gl}(\mu, K(x) \cap \mathcal{B}([0, \rho]))$ .  $\square$

**Lemme 19.17.** — Soit  $\rho > 0$  et soit

- $N$  et  $N'$  deux matrices diagonales à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ ,
  - $M$  et  $M'$  deux matrices de  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}([0, \rho]))$ ,
  - $L$  et  $L'$  deux matrices de  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}([\rho, \infty]))$  telles que  $L(\infty) = L'(\infty) = \mathbf{I}$ ,
- et on suppose que
- les matrices  $x^N Lx^{-N}$  et  $x^{N'} L'x^{-N'}$  appartiennent à  $\mathcal{T}^\rho(\mu, \mathcal{A}([\rho, \infty]))$ ,

— les matrices  $H = x^N L M$  et  $H' = x^{N'} L' M'$  de  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}([0, \rho]))$  vérifient

$$(54) \quad \|H' - H\|_\rho \|H^{-1}\|_\rho = \gamma < 1.$$

Alors  $N = N'$ ,  $\|x^N (L - L') x^{-N}\|_\rho \leq \gamma$  et  $\|x^N (M - M') x^{-N}\|_\rho \leq \gamma \|H x^{-N}\|_\rho$ .

*Preuve.* — La condition (54) semble dissymétrique en  $H$  et  $H'$ . Mais elle implique

$$\|H^{-1} - H'^{-1}\|_\rho = \|H^{-1}(H' - H)H'^{-1}\|_\rho \leq \gamma \|H'^{-1}\|_\rho < \|H'^{-1}\|_\rho,$$

soit  $\|H^{-1}\|_\rho = \|H'^{-1}\|_\rho$  et elle peut s'écrire  $\|H - H'\|_\rho \|H'^{-1}\|_\rho = \gamma < 1$ .

La condition (54) implique aussi  $\|H - H'\|_\rho < \|H^{-1}\|_\rho^{-1} \leq \|H\|_\rho$  soit  $\|H\|_\rho = \|H'\|_\rho$ .

Par hypothèse, on a  $\|x^{N'} L'^{-1} x^{-N'}\|_\rho = \|x^N L^{-1} x^{-N}\|_\rho = 1$  soit

$$\|M^{-1} x^{-N}\|_\rho = \|H^{-1} x^N L^{-1} x^{-N}\|_\rho \leq \|H^{-1}\|_\rho.$$

Maintenant, l'égalité

$$x^{N'} L'^{-1} x^{-N'} (H' - H) M^{-1} x^{-N} = x^{N'} M' M^{-1} x^{-N} - x^{N'} L'^{-1} x^{-N'+N} L x^{-N}$$

montre que

$$(55) \quad \begin{aligned} & \|x^{N'} M' M^{-1} x^{-N} - x^{N'} L'^{-1} x^{-N'+N} L x^{-N}\|_\rho \\ & \leq \|x^{N'} L'^{-1} x^{-N'}\|_\rho \|H' - H\|_\rho \|M^{-1} x^{-N}\|_\rho \\ & \leq \|H' - H\|_\rho \|H^{-1}\|_\rho = \gamma < 1. \end{aligned}$$

et implique en particulier

$$\|x^{N'} M' M^{-1} x^{-N}\|_\rho = \|x^{N'} L'^{-1} x^{-N'+N} L x^{-N}\|_\rho = 1.$$

Nous étudions maintenant les termes diagonaux des matrices  $x^{N'} M' M^{-1} x^{-N}$  et  $x^{N'} L'^{-1} x^{-N'+N} L x^{-N}$ . Les coefficients des matrices  $M'$  et  $M^{-1}$  appartiennent à  $\mathcal{A}([0, \rho])$  donc il existe des nombres  $c_{si}$  de  $K$  tels que

$$(56) \quad \left(x^{N'} M' M^{-1} x^{-N}\right)_{ii} = x^{N'_i} \left(M' M^{-1}\right)_{ii} x^{-N_i} = x^{N'_i - N_i} \sum_{s=0}^{\infty} c_{si} x^s.$$

Par ailleurs

$$\left(x^{N'} L'^{-1} x^{-N'+N} L x^{-N}\right)_{ii} = \sum_{j=1}^{\mu} \left(x^{N'} L'^{-1} x^{-N'}\right)_{ij} \left(x^N L x^{-N}\right)_{ji}.$$

Mais  $\left\| \left(x^{N'} L'^{-1} x^{-N'}\right)_{ij} \right\|_\rho < 1$  pour  $j > i$  et  $\left\| \left(x^N L x^{-N}\right)_{ji} \right\|_\rho < 1$  pour  $j < i$ .

Comme  $\left(x^N L x^{-N}\right)_{ii} = L_{ii}$ , on trouve :

$$(57) \quad \left| \left(x^{N'} L'^{-1} x^{-N'+N} L x^{-N}\right)_{ii} - L_{ii}^{-1} L_{ii} \right|_\rho < 1.$$

Les fonctions  $L_{ii}^{-1}$  et  $L_{ii}$  appartiennent à  $\mathcal{A}([\rho, \infty])$  et valent 1 à l'infini. Donc

$$(58) \quad L_{ii}^{-1} L_{ii} = 1 + \sum_{s=-\infty}^{-1} b_{si} x^s.$$

Les relations (55), (56), (57) et (58) donnent

$$(59) \quad \left| x^{N'_i - N_i} \sum_{s=0}^{\infty} c_{si} x^s - 1 - \sum_{s=-\infty}^{-1} b_{si} x^s \right|_{\rho} < 1$$

La fonction  $\left( x^{N'} M' M^{-1} x^{-N} \right)_{ii} - L'^{-1} L_{ii}$  appartient à  $\mathcal{A}([\rho])$  et, d'après (57), le coefficient  $c_{(N_i - N'_i)i} - 1$  du terme constant de son développement de Laurent est strictement inférieur à 1. On en déduit que  $|c_{(N_i - N'_i)i}| = 1 \neq 0$  et donc  $N_i - N'_i \geq 0$ . En échangeant les rôles de  $H$  et  $H'$ , on montre de même que  $N'_i - N_i \geq 0$  c'est-à-dire  $N_i = N'_i$  pour tout  $i$ , soit  $N = N'$ .

Compte tenu de cette égalité, la relation (55) s'écrit

$$\|x^N (M' M^{-1} - L'^{-1} L) x^{-N}\|_{\rho} \leq \gamma.$$

Or, reprenant les notations du lemme 19.14, on constate que, par hypothèses

$$[M' M^{-1} - L'^{-1} L]^+ = M' M^{-1} - \mathbf{I}, \quad [M' M^{-1} - L'^{-1} L]^- = \mathbf{I} - L'^{-1} L.$$

En calculant coefficient par coefficient, on en déduit

$$\begin{aligned} \max \left( \|x^N (M' M^{-1} - \mathbf{I}) x^{-N}\|_{\rho}, \|x^N (\mathbf{I} - L'^{-1} L) x^{-N}\|_{\rho} \right) \\ \leq \|x^N (M' M^{-1} - \mathbf{I} + \mathbf{I} - L'^{-1} L) x^{-N}\|_{\rho} \leq \gamma \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \|x^N (L - L') x^{-N}\|_{\rho} &\leq \|x^N L' x^{-N}\|_{\rho} \|x^N (L'^{-1} L - \mathbf{I}) x^{-N}\|_{\rho} \leq \gamma, \\ \|x^N (M - M') x^{-N}\|_{\rho} &\leq \|x^N (M' M^{-1} - \mathbf{I}) x^{-N}\|_{\rho} \|x^N M x^{-N}\|_{\rho} \\ &\leq \gamma \|x^N L^{-1} x^{-N} H x^{-N}\|_{\rho} \leq \gamma \|H x^{-N}\|_{\rho}. \quad \square \end{aligned}$$

**Théorème 19.18 (de Birkhoff analytique).** — Soit  $I \subset ]0, \infty[$  un intervalle, soit  $H$  une matrice de  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}(I))$  et soit  $\rho$  dans  $I$ . On a une unique décomposition de la forme  $H = x^N L M$  dans laquelle

- la matrice  $N$  est diagonale à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ ,
- la matrice  $M$  appartient à  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}(I \cup ]0, \rho]))$ ,
- la matrice  $L$  appartient à  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}(I \cup ]\rho, \infty]))$  et vérifie  $L(\infty) = \mathbf{I}$ ,
- la matrice  $x^N L x^{-N}$  appartient à  $\mathcal{T}^{\rho}(\mu, \mathcal{A}([\rho, \infty[))$ .

*Preuve.* — *Unicité :* c'est le cas particulier  $\gamma = 0$  du lemme 19.17.

*Existence dans le cas où  $\rho$  appartient à  $|K^*|$  :* Comme  $\rho$  appartient à  $I$ , les fonctions rationnelles sont denses dans  $\mathcal{A}(I)$  pour la valeur absolue  $|\cdot|_{\rho}$ . Il existe donc une suite de matrices  $H_n$  de  $\text{Mat}(\mu, K(x))$  telles que la suite  $\gamma_n = \|H - H_n\|_{\rho} \|H^{-1}\|_n$  tende vers 0. Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que la suite  $\gamma_n$  est strictement décroissante et vérifie  $\gamma_n < 1$  pour tout  $n$ .

La relation

$$\|(H - H_n)H^{-1}\|_{\rho} \leq \|H - H_n\|_{\rho} \|H^{-1}\|_{\rho} = \gamma_n < 1$$

montre alors que la matrice  $\mathbf{I} - (H - H_n)H^{-1}$  appartient à l'anneau  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}([\rho]))$ . Il en est donc ce même de la matrice  $H_n = (\mathbf{I} + (H_n - H)H^{-1})H$ . De plus on a

$$\|H_n^{-1}\|_\rho \leq \|(\mathbf{I} + (H_n - H)H^{-1})^{-1}\|_\rho \|H^{-1}\|_\rho = \|H^{-1}\|_\rho.$$

La proposition 19.16 montre que l'on a  $H_n = x^{N_n} L_n M_n$  avec

- $x^{N_n} = \text{diag}(x^{N_{1,n}}, \dots, x^{N_{\mu,n}})$  avec  $N_{i,n}$  dans  $\mathbb{Z}$ ,
- $M_n$  dans  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{B}([0, \rho]))$ ,
- $L_n$  dans  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}([\rho, \infty]))$  et  $L_n(\infty) = \mathbf{I}$ ,
- la matrice  $x^{N_n} L_n x^{-N_n}$  appartient à  $\mathcal{T}^\rho(\mu, K(x) \cap \mathcal{A}([\rho, \infty]))$ .

Comme  $H_n$  appartient à  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}([\rho]))$ , la matrice  $M_n = L_n^{-1} x^{-N_n} H_n$  appartient en fait à  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}([\rho]) \cap \mathcal{B}([0, \rho])) = \text{Gl}(\mu, \mathcal{A}([0, \rho]))$  et

$$(60) \quad N_{n+1} = N_n \quad , \quad \|x^{N_n} (L_{n+1} - L_n) x^{-N_n}\|_\rho \leq \gamma_n \quad , \\ \|x^{N_n} (M_{n+1} - M_n) x^{-N_n}\|_\rho \leq \gamma_n \|H_n x^{-N_n}\|_\rho.$$

En particulier, on constate que la suite  $N_n$  est constante. Nous notons  $N$  la valeur commune des matrices  $N_n$ .

Posons  $\Gamma_n = \gamma_n \|x^N\|_\rho \|x^{-N}\|_\rho$ . Pour  $n$  assez grand, on a  $\|H_n x^{-N_n} - H x^{-N}\|_\rho \leq \gamma_n \|H^{-1}\|_\rho^{-1} \|x^{-N}\|_\rho < \|H x^{-N}\|_\rho$  et donc  $\|H_n x^{-N}\|_\rho = \|H x^{-N}\|_\rho$ . Les majorations (61) s'écrivent alors

$$(61) \quad \|L_{n+1} - L_n\|_\rho \leq \Gamma_n \quad , \quad \|M_{n+1} - M_n\|_\rho \leq \Gamma_n \|H x^{-N}\|_\rho.$$

Comme les anneaux  $\text{Mat}(\mu, \mathcal{A}([\rho, \infty]))$  et  $\text{Mat}(\mu, \mathcal{A}([0, \rho]))$  sont complets pour la norme  $\|\cdot\|_\rho$ , on constate que la suite  $L_n$  converge dans l'anneau  $\text{Mat}(\mu, \mathcal{A}([\rho, \infty]))$  et que la suite  $M_n$  converge dans l'anneau  $\text{Mat}(\mu, \mathcal{A}([0, \rho]))$ . Nous notons  $L$  (resp.  $M$ ) la limite de la suite  $L_n$  (resp.  $M_n$ ).

Pour  $n$  assez grand, on a  $\|L - L_n\|_\rho < \|x^N\|_\rho^{-1} \|x^{-N}\|_\rho^{-1} \leq \|L_n^{-1}\|_\rho^{-1}$  et on constate que  $L = (\mathbf{I} + (L - L_n)L_n^{-1})L_n$  appartient à  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}([\rho, \infty]))$ . De même, pour  $n$  assez grand, on a  $\|M - M_n\|_\rho < 1 = \|H^{-1}\|_\rho^{-1} \|x^N\|_\rho^{-1} \leq \|M_n^{-1}\|_\rho^{-1}$  et on constate que la matrice  $M = (\mathbf{I} + (M - M_n)L_n^{-1})M_n$  appartient à  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}([0, \rho]))$ .

On a  $H = \lim H_n = x^N L M$  et  $L = x^{-N} H M^{-1}$  appartient à  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}(I \cap ]0, \rho])$  donc en fait à  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}(I \cup ]\rho, \infty])$ . De même, la matrice  $M = L^{-1} x^{-N} H$  appartient à  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}(I \cap ]\rho, \infty])$  donc en fait à  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}(I \cup ]0, \rho])$ .

La convergence au sens de la norme  $\|\cdot\|_\rho$  dans  $\text{Mat}(\mu, \mathcal{A}([\rho, \infty]))$  implique la convergence en chaque point de la couronne  $\mathcal{C}([\rho, \infty])$ . On a donc  $L(\infty) = \lim L_n(\infty) = \mathbf{I}$ . La majoration (61) s'écrit :

$$|(x^N L_n x^{-N})_{ij} - (x^N L x^{-N})_{ij}|_\rho \leq \gamma_n < 1.$$

Pour  $j \leq i$  (resp.  $j > i$ ), on a  $|(x^N L_n x^{-N})_{ij}|_\rho \leq 1$  (resp.  $|(x^N L_n x^{-N})_{ij}|_\rho < 1$ ) et donc  $|(x^N L_n x^{-N})_{ij}|_\rho \leq 1$  (resp.  $|(x^N L_n x^{-N})_{ij}|_\rho < 1$ ). Pour vérifier que la matrice  $x^N L x^{-N}$  appartient à  $\mathcal{T}^\rho(\mu, \mathcal{A}([\rho, \infty[))$ , il reste à montrer que ses coefficients diagonaux  $(x^N L x^{-N})_{ii} = L_{ii}$  sont inversibles, c'est-à-dire n'ont pas de zéro, dans la couronne  $\mathcal{C}([\rho, \infty[)$ . Par hypothèse la fonction  $(L_n)_{ii}$  n'a pas de zéro dans le disque  $\mathcal{C}([\rho, \infty])$  et donc  $|(L_n)_{ii}|_\rho = |(L_n)_{ii}(\infty)| = 1$ . On a donc aussi  $|L_{ii}|_\rho = |L_{ii}(\infty)| = 1$  et la fonction  $L_{ii}$  n'a pas de zéro dans le disque  $\mathcal{C}([\rho, \infty])$ .

*Existence dans le cas où  $\rho$  n'appartient pas à  $|K^*|$  :* Le corps complet  $E_\rho$  contient  $K$  et, par construction,  $\rho$  appartient à  $|E_\rho^*|$ . Il existe donc une décomposition du type cherché dans laquelle les coefficients de  $L$  (resp.  $M$ ) appartiennent à  $\mathcal{A}_{E_\rho}(I \cup [\rho, \infty])$  (resp.  $\mathcal{A}_{E_\rho}(I \cup [0, \rho])$ ). Mais on sait que cette décomposition est unique. Elle est donc invariante par tout automorphisme continu de  $E_\rho$  qui laisse les éléments de  $K$  invariants (l'unique automorphisme  $\theta_\alpha$  de  $E_\rho/K$  tel que  $\theta_\alpha(t) = t + \alpha$  avec  $|\alpha| < \rho$  en est un exemple fondamental). Comme un élément analytique de  $E_\rho$  qui est invariant par tous ces automorphismes appartient à  $K$ , on constate que les coefficients de  $L$  (resp.  $M$ ) appartiennent en fait à  $\mathcal{A}_K(I \cup [\rho, \infty])$  (resp.  $\mathcal{A}_K(I \cup [0, \rho])$ ).  $\square$

**19.3. Variantes.** — Dans les théorèmes de Birkhoff, les points 0 et  $\infty$  jouent un rôle dissymétrique et l'ordre des matrices est important. En appliquant ces théorèmes à la matrice  $H^{-1}$  puis à la matrice  $H(1/x)$ , on démontre facilement les variantes suivantes.

**Théorème 19.19.** — Soit  $I \subset ]0, \infty[$  un intervalle,  $J \subset I$  un intervalle fermé,  $H$  dans  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{F}(I))$  et  $S \subset \mathcal{C}(J)$  un ensemble de points fermés. On a  $H = ML$  avec  $L$  et  $M$  ayant les mêmes propriétés que dans le théorème 19.4.

**Théorème 19.20.** — Soit  $I \subset ]0, \infty[$  un intervalle, soit  $\rho$  dans  $I$  et soit  $H$  une matrice de  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}(I))$ . On a une unique décomposition  $H = MLx^{-N}$  dans laquelle  $N$ ,  $L$  et  $M$  ont les mêmes propriétés que dans le théorème 19.18.

**Théorème 19.21.** — Soit  $I \subset ]0, \infty[$  un intervalle, soit  $\rho$  dans  $I$  et soit  $H$  une matrice de  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}(I))$ . On a deux (uniques) décompositions de la forme  $H = x^N LM$  et  $H = M' L' x^{N'}$  dans lesquelles

- $N$  et  $N'$  sont diagonales à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ ,
- $M$  et  $M'$  appartiennent à  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}(I \cup [\rho, \infty]))$ ,
- $L$  et  $L'$  appartiennent à  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}(I \cup [0, \rho]))$  et  $L(0) = L'(0) = \mathbf{I}$ ,
- les matrices  $x^N L x^{-N}$  et  $x^{-N'} L' x^{N'}$  appartiennent à  $\mathcal{T}^\rho(\mu, \mathcal{A}([0, \rho]))$ .

En combinant ces théorèmes, quitte éventuellement à oublier certaines des conclusions, on obtient des résultats qui nous seront utiles.

**Corollaire 19.22.** — Soit  $\rho$  dans  $]0, \infty[$ . Toute matrice  $H$  de  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}([\rho]))$  est le produit d'une matrice  $L$  de  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}([0, \rho]))$  et d'une matrice  $M$  de  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}([\rho, \infty])$ .

*Preuve.* — C'est le théorème 19.20 (resp. 19.18 selon l'ordre dans lequel on veut faire le produit) dans lequel on a noté  $L$  la matrice  $x^N L$  (resp.  $Lx^{-N}$ ). Le théorème 19.21 permettrait d'ailleurs de mettre la "singularité" en 0 au lieu de l'infini.  $\square$

**Corollaire 19.23.** — *Soit  $I$  et  $J$  deux intervalles contenus dans  $[0, \infty[$  et d'intersection non vide. Toute matrice  $H$  de  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}(I \cap J))$  est le produit d'une matrice  $L$  de  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}(I))$  et d'une matrice  $M$  de  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}(J))$ .*

*Preuve.* — Si  $I \subset J$ , le résultat est évident en prenant  $L = I$ . Sinon on choisit  $\rho \neq 0$  dans  $I \cap J$ . Quitte à échanger  $I$  et  $J$ , on peut supposer que  $I = (\alpha, \beta)$  et  $J = (\gamma, \delta)$  avec  $\alpha \leq \gamma \leq \rho \leq \beta \leq \delta < \infty$ . La décomposition  $H = LM$  du corollaire 19.22 convient car, par construction,  $L$  appartient à  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}([0, \rho]))$  mais  $L = HM^{-1}$  appartient aussi à  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}([\rho, \infty[ \cap I \cap J]) = \text{Gl}(\mu, \mathcal{A}([\rho, \beta]))$ . Donc  $L$  appartient à  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}([0, \beta]))$  et en particulier à  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}(I))$ . On montre de même que  $M$  appartient à  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}(J))$ .  $\square$

**Corollaire 19.24.** — *Soit  $\rho$  dans  $]0, \infty[$  et  $H$  dans  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}([\rho]))$ . On a*

$$1. \quad H = LM \quad 2. \quad H = M'L' \quad 3. \quad H = \tilde{L}\tilde{M} \quad 4. \quad H = \tilde{M}'\tilde{L}'$$

avec  $L$  et  $L'$  dans  $\mathcal{T}^\rho(\mu, \mathcal{A}([\rho, \infty[))$ ,  $M$  et  $M'$  dans  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}([0, \rho]))$ ,  
 $\tilde{L}$  et  $\tilde{L}'$  dans  $\mathcal{T}^\rho(\mu, \mathcal{A}([0, \rho]))$ ,  $\tilde{M}$  et  $\tilde{M}'$  dans  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}([\rho, \infty[))$ .

*Preuve.* — Dans le théorème 19.18 (resp. 19.20, 19.21), on note  $L$  (resp.  $L'$ ,  $\tilde{L}$  et  $\tilde{L}'$ ) la matrice  $x^N Lx^{-N}$ . On trouve alors la décomposition 1. (resp. 2., 3., 4.).  $\square$

Dans le corollaire suivant, on cherche à "normaliser" une matrice de  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{F}(I))$  en la multipliant par une matrice ayant l'infini pour seule singularité.

**Corollaire 19.25.** — *Soit  $I \subset [0, \infty[$  un intervalle, soit  $\rho > 0$  dans  $I$  et soit  $H$  une matrice de  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{F}(I))$ . On a une décomposition de la forme  $H = LM$  avec  $L$  dans  $\mathcal{T}^\rho(\mu, \mathcal{F}(I))$  et  $M$  dans  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}([0, \infty[))$ .*

*Si  $\rho$  appartient à  $|K^*|$ , on peut choisir  $M$  dans  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}([0, \infty[))$ .*

*Preuve.* — Comme  $H$  appartient à  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{F}([\rho]))$ , d'après le corollaire 19.8, on a  $H = L_1 M_1$  avec  $L_1$  dans  $\mathcal{T}^\rho(\mu, K(x))$  et  $M_1$  dans  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}([\rho]))$ .

Le théorème 19.24-3 donne  $M_1 = L_2 M_2$  avec  $L_2$  dans  $\mathcal{T}^\rho(\mu, \mathcal{A}([0, \rho]))$  et  $M_2$  dans  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}([\rho, \infty[))$ .

Le théorème 19.24-1 donne  $M_2 = L_3 M_3$  avec  $L_3$  dans  $\mathcal{T}^\rho(\mu, \mathcal{A}([\rho, \infty[))$ , et  $M_3$  dans  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}([0, \rho]))$ . Mais  $M_3 = L_3^{-1} M_2$  appartient aussi à  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}([\rho, \infty[))$ , donc  $M_3$  appartient en fait à  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}([0, \infty[))$ .

Comme  $\mathcal{A}([0, \infty[) \subset \mathcal{F}(I)$ ,  $L = L_1 L_2 L_3 = H M_3^{-1}$  appartient à  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{F}(I))$  (si  $I$  contient 0, il faut remarquer que les coefficients de  $M_3^{-1}$  n'ont que des pôles en 0).  $\square$

**19.4. Applications aux modules différentiels.** — Une application directe est le “recollement” des modules différentiels.

**Corollaire 19.26.** — Soit  $I$  et  $J$  deux intervalles contenus dans  $[0, \infty[$  et d'intersection non vide, soit  $\mathcal{M}$  (resp.  $\mathcal{N}$ ) un  $\mathcal{A}(I)$  (resp.  $\mathcal{A}(J)$ )-module différentiel de rang  $\mu$ . Si  $\mathcal{A}(I \cap J) \otimes_{\mathcal{A}(I)} \mathcal{M}$  et  $\mathcal{A}(I \cap J) \otimes_{\mathcal{A}(J)} \mathcal{N}$  sont des  $\mathcal{A}(I \cap J)$ -modules différentiels isomorphes, alors il existe un  $\mathcal{A}(I \cup J)$ -module différentiel  $\mathcal{Q}$  de tel que le  $\mathcal{A}(I)$  (resp.  $\mathcal{A}(J)$ )-module différentiel  $\mathcal{A}(I) \otimes_{\mathcal{A}(I \cup J)} \mathcal{Q}$  (resp.  $\mathcal{A}(J) \otimes_{\mathcal{A}(I \cup J)} \mathcal{Q}$ ) est isomorphe à  $\mathcal{M}$  (resp.  $\mathcal{N}$ ).

*Preuve.* — On choisit des bases de  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  et on note  $G$  et  $F$  les matrices représentant la dérivation dans ces bases et  $H$  la matrice de  $\text{Gl}_\mu(\mathcal{A}(I \cap J))$  qui représente l'isomorphisme entre  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  dans ces bases.

D'après le corollaire 19.23, il existe une matrice  $L$  de  $\text{Gl}_\mu(\mathcal{A}(J))$  et une matrice  $M$  de  $\text{Gl}_\mu(\mathcal{A}(I))$  telles que  $H = LM$ . On considère le  $\mathcal{A}(I \cap J)$ -module différentiel  $\tilde{\mathcal{Q}}$  obtenu par l'isomorphisme représenté par la matrice  $L$  à partir de  $\mathcal{M}$  (et donc par l'isomorphisme représenté par la matrice  $M^{-1}$  à partir de  $\mathcal{N}$ ). Le calcul fait dans la proposition 19.30 montre que la matrice  $E$  qui représente la dérivation  $D$  dans  $\mathcal{Q}$ , est donnée par les formules

$$(62) \quad E = L^{-1}(GL - D(L)) = (MF + D(M))M^{-1}.$$

En particulier ses coefficients appartiennent à  $\mathcal{A}(I) \cap \mathcal{A}(J) = \mathcal{A}(I \cup J)$ . Autrement dit,  $\tilde{\mathcal{Q}}$  est de la forme  $\mathcal{A}(I \cap J) \otimes_{\mathcal{A}(I \cup J)} \mathcal{Q}$ . Maintenant la formule (62) rend explicite les isomorphismes cherchés.  $\square$

Mais l'application principale des théorèmes de Birkoff est l'élimination des singularités apparentes<sup>(11)</sup>. Rappelons que l'on note  $\mathcal{F}(I)$  le corps des fractions de  $\mathcal{A}(I)$ . Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}(I)$ -module différentiel. Une base  $\epsilon$  de  $\mathcal{F}(I) \otimes_{\mathcal{A}(I)} \mathcal{M}$ , même si elle est contenue dans  $\mathcal{M}$ , n'est pas forcément une base de  $\mathcal{M}$ . La matrice  $G$  qui représente la dérivation  $d/dx$  dans la base  $\epsilon$  peut en effet présenter des *singularités apparentes* c'est-à-dire des points géométriques  $a$  en lesquels la matrice  $G$  a une singularité. C'est le cas si (et seulement si) l'équation différentielle  $D(X) = GX$  a une solution dans  $\text{Gl}(\mu, K((x - a)))$  mais pas dans  $\text{Gl}(\mu, K[[x - a]])$ .

Les constructions du paragraphe 8.3 donnent des bases (cycliques) de l'espace vectoriel  $\mathcal{F}(I) \otimes_{\mathcal{A}(I)} \mathcal{M}$  dont la matrice de la dérivation est “petite”. Malheureusement, elles introduisent des singularités apparentes. En supprimant ces singularités, on obtient des bases du  $\mathcal{A}(I)$ -module différentiel initial tout en gardant une petite matrice de dérivation.

**Corollaire 19.27.** — Soit  $I \subset ]0, \infty[$  un intervalle, soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}(I)$ -module différentiel et soit  $\rho$  dans  $I$ .

1) Si  $\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho) \geq \omega\rho$ , il existe une base de  $\mathcal{M}$  dans laquelle la dérivation est représentée par une matrice  $G$  vérifiant  $\rho \|G\|_\rho \leq 1$ .

<sup>(11)</sup>Plus précisément, profitant du fait que la droite projective est de genre 0, on déplace toutes les singularités apparentes vers le même point (en général 0 ou l'infini).

2) Si  $\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho) < \omega\rho$ , il existe une extension  $K'$  de  $K$  et une base du  $\mathcal{A}_{K'}(I)$ -module différentiel  $\mathcal{A}_{K'}(I) \otimes_{\mathcal{A}_K(I)} \mathcal{M}$  dans laquelle la dérivation est représentée par une matrice  $G$  qui vérifie  $\|G\|_\rho = \omega \text{Ray}(\mathcal{M}, \rho)^{-1}$ .

*Preuve.* — Montrons le résultat 1). D'après le théorème du vecteur cyclique, il existe une base cyclique  $\mathfrak{m}$  de  $\mathcal{F}(I) \otimes_{\mathcal{A}(I)} \mathcal{M}$ . D'après le corollaire 8.8, la matrice  $G_{\mathfrak{m}}$  qui représente la dérivation dans la base  $\mathfrak{m}$  vérifie  $\|G_{\mathfrak{m}}\|_\rho \leq 1/\rho$ .

Soit  $\mathfrak{e}$  une base de  $\mathcal{M}$  et soit  $H$  la matrice de  $\text{Gl}(\mathcal{F}(I))$  telle que  $\mathfrak{m} = H\mathfrak{e}$  et soit  $H = TS$  la décomposition donnée dans le corollaire 19.25. Comme  $S$  appartient à  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}([0, \infty[)) \subset \text{Gl}(\mathcal{A}(I))$ , la famille  $\mathfrak{f} = T^{-1}\mathfrak{m} = S\mathfrak{e}$  est une base de  $\mathcal{M}$ . La matrice représentant la dérivation dans la base  $\mathfrak{f}$  vaut

$$G_{\mathfrak{f}} = (D(S) + SG_{\mathfrak{e}})S^{-1} = T^{-1}(-D(T) + G_{\mathfrak{m}}T).$$

Les matrices  $S$ ,  $S^{-1}$  et  $G_{\mathfrak{e}}$  appartiennent à  $\text{Mat}(\mathcal{A}(I))$ . Il en est donc de même de la matrice  $G_{\mathfrak{f}}$ . Par ailleurs, comme  $\|T\|_\rho = \|T^{-1}\|_\rho = 1$ , on a

$$\|G_{\mathfrak{f}}\|_\rho \leq \max(\|G_{\mathfrak{m}}\|_\rho, \|D(T)\|_\rho) \leq 1/\rho.$$

Pour le résultat 2), on utilise le corollaire 8.8 au lieu du corollaire 8.7. □

**Remarque 19.28.** — La base construite dans le corollaire 19.27-1 dépend de manière fondamentale du nombre  $\rho$ . Plus précisément un  $\mathcal{A}(I)$ -module différentiel  $\mathcal{M}$  tel que  $\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho) \geq \omega\rho$  pour tout  $\rho$  dans  $I$  ne possède pas, en général, de base pour laquelle la matrice  $G$  qui représente la dérivation vérifie  $\rho\|G\|_\rho \leq 1$  pour tout nombre  $\rho$  de  $I$ .

Dans le corollaire 19.27, il y a un  $\mathcal{A}(I)$ -module différentiel sous jacent. Mais le vrai problème d'élimination des singularités apparentes concerne les  $\mathcal{F}(I)$ -modules différentiels n'ayant que des singularités apparentes. On veut alors montrer qu'ils proviennent de  $\mathcal{A}(I)$ -modules différentiels. Commençons par comparer les catégories  $\text{MLC}(\mathcal{A}(I))$  et  $\text{MLC}(\mathcal{F}(I))$ .

**Proposition 19.29.** — Pour  $I \subset [0, \infty[$ , le foncteur  $\Theta : \text{MLC}(\mathcal{A}(I)) \rightarrow \text{MLC}(\mathcal{F}(I))$  défini par  $\Theta(\mathcal{M}) = \mathcal{F}(I) \otimes_{\mathcal{A}(I)} \mathcal{M}$  est pleinement fidèle.

*Preuve.* — Soit  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  deux objets de  $\text{MLC}(\mathcal{A}(I))$  pour lesquels il existe un morphisme  $\mathcal{F}(I) \otimes_{\mathcal{A}(I)} \mathcal{N} \xrightarrow{\iota} \mathcal{F}(I) \otimes_{\mathcal{A}(I)} \mathcal{M}$  de la catégorie  $\text{MLC}(\mathcal{F}(I))$ . Nous choisissons une base  $\mathfrak{f}$  de  $\mathcal{N}$  (resp.  $\mathfrak{g}$  de  $\mathcal{M}$ ) et nous notons  $F$  (resp.  $G$ ) la matrice, à coefficients dans  $\mathcal{A}(I)$ , qui représente la dérivation  $D$  dans cette base. Le morphisme  $\iota$  est alors représenté par une matrice  $H$  à coefficients dans  $\mathcal{F}(I)$  qui vérifie la relation

$$(21) \quad D(H) = GH - HF$$

Si la matrice  $H$  avait un pôle d'ordre  $n > 0$  en un point (géométrique)  $a$  de la couronne  $\mathcal{C}(I)$ , la matrice  $D(H)$  aurait un pôle d'ordre  $n + 1$  en ce point (fini) alors que la matrice  $GH - HF$  y aurait un pôle d'ordre au plus  $n$  ce qui contredirait la relation (21). Donc, en fait, les coefficients de la matrice  $H$  appartiennent à  $\mathcal{A}(I)$  et le morphisme  $\iota$  vient d'un morphisme de  $\text{MLC}(\mathcal{A}(I))$ . □

Bien entendu, le foncteur  $\Theta$  n'est pas essentiellement surjectif mais nous allons démontrer qu'être dans l'image essentielle de ce foncteur est une condition locale. C'est le résultat qui permet d'éliminer les singularités apparentes.

**Théorème 19.30.** — *Soit  $I \subset [0, \infty[$  un intervalle et soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{F}(I)$ -module différentiel n'ayant, dans la couronne  $\mathcal{C}(I)$ , que des singularités apparentes<sup>(12)</sup>. Si l'intervalle  $I$  est fermé ou si le corps  $K$  est sphériquement complet, il existe un  $\mathcal{A}(I)$ -module différentiel  $\widetilde{\mathcal{M}}$  tel que  $\mathcal{M} = \mathcal{F}(I) \otimes_{\mathcal{A}(I)} \widetilde{\mathcal{M}}$ .*

*Preuve.* — Soit  $G$  la matrice qui représente la dérivation dans une base  $\mathfrak{g}$  de  $\mathcal{M}$  et soit  $J$  un intervalle fermé contenu dans  $I$ . Comme l'intervalle  $J$  est fermé, chacun des coefficients de  $G$  n'a qu'un nombre fini de pôles dans la couronne  $\mathcal{C}(J)$ . Notons  $n(\mathfrak{g})$  le nombre de points fermés de la couronne  $\mathcal{C}(J)$  en lesquels l'un, au moins, des coefficients de  $G$  a un pôle. On choisit la base  $\mathfrak{g}_J$  de telle sorte que  $n(\mathfrak{g}_J)$  soit minimal et on va montrer que  $n(\mathfrak{g}_J) = 0$ .

Supposons  $n(\mathfrak{g}_J) > 0$  et soit  $a$  un pôle de la matrice  $G$  qui représente la dérivation dans la base  $\mathfrak{g}_J$ . Notons  $P$  le polynôme unitaire minimal de  $a$ . Par hypothèse, il existe une base  $\mathfrak{f}$  de  $\mathcal{M}$  dans laquelle la matrice  $F$  qui représente la dérivation  $D$  n'a pas de pôle en  $a$ . La matrice  $H$  de changement de base entre les bases  $\mathfrak{g}_J$  et  $\mathfrak{f}$  appartient à  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{F}(I))$  et vérifie la relation  $D(H) = GH - HF$  (voir (21)). D'après le corollaire 19.7, on a  $H = LM$ , avec

- $M$  dans  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}(I)_{\mathcal{C}(I) - \{a\}})$  c'est-à-dire en particulier  $M$  et  $M^{-1}$  sans pôle en aucun des conjugués de  $a$
- $L$  dans  $\text{Gl}(\mu, [x, \frac{1}{P}])$ , c'est-à-dire n'ayant de pôle qu'à l'infini et aux conjugués du point  $a$ .

On effectue, à partir de la base  $\mathfrak{g}_J$ , le changement de base associé à la matrice  $L$ . Dans la nouvelle base  $\mathfrak{e}$  la matrice  $E$ , qui représente la dérivation  $D$ , est donnée par la relation  $D(L) = GL - LE$ , c'est-à-dire

$$E = L^{-1}(GL - D(L)).$$

On constate que la matrice  $E$  n'a pas de pôle dans la couronne  $\mathcal{C}(J)$  autres que ceux de  $G$  (y compris a priori en  $a$ ), donc  $n(\mathfrak{e}) \leq n(\mathfrak{g}_J)$ . Mais la formule :

$$\begin{aligned} E &= L^{-1}(GHM^{-1} - D(HM^{-1})) = L^{-1}(GH - D(H) + HM^{-1}D(M))M^{-1} \\ &= L^{-1}(HF + LD(M))M^{-1} = (MF + D(M))M^{-1} \end{aligned}$$

montre que  $E$  n'a de pôle en aucun des conjugués de  $a$ . On a donc  $n(\mathfrak{e}) < n(\mathfrak{g}_J)$  ce qui contredit la minimalité de  $n(\mathfrak{g}_J)$ . Ceci achève la démonstration dans le cas où l'intervalle  $I$  est fermé.

Notons  $\widetilde{\mathcal{M}}(J)$  le sous- $\mathcal{A}(J)$ -module différentiel de  $\mathcal{M}$  engendré par la base  $\mathfrak{g}_J$ . Pour  $J \subset J'$ , les  $\mathcal{F}(J)$ -modules différentiels  $\mathcal{F}(J) \otimes_{\mathcal{A}(J')} \widetilde{\mathcal{M}}(J')$  et  $\mathcal{F}(J) \otimes_{\mathcal{A}(J)} \widetilde{\mathcal{M}}(J)$  sont isomorphes (car tous les deux isomorphes à  $\mathcal{F}(J) \otimes_{\mathcal{F}(I)} \mathcal{M}$ ). D'après la proposition 19.29, les  $\mathcal{A}(J)$ -modules différentiels  $\mathcal{A}(J) \otimes_{\mathcal{A}(J')} \widetilde{\mathcal{M}}(J')$  et  $\widetilde{\mathcal{M}}(J)$  sont donc

<sup>(12)</sup>c'est-à-dire si, pour chaque point  $a$  de  $\mathcal{C}(I)$ , le module différentiel  $\mathcal{M}$  a une base dans laquelle la dérivation  $D$  est représentée par une matrice dont les coefficients n'ont pas de pôle en  $a$

isomorphes. On constate que les  $\widetilde{\mathcal{M}}(J)$  forment un faisceau localement libre sur la couronne  $\mathcal{C}(I)$ . Puisque le corps  $K$  est supposé sphériquement complet, le théorème 4.40 assure que le  $\mathcal{A}(I)$ -module  $\widetilde{\mathcal{M}}$  des sections globales de ce faisceau est libre. Il est alors clair que  $\widetilde{\mathcal{M}}$  est stable par la dérivation  $D$  et que  $\mathcal{F}(I) \otimes_{\mathcal{A}(I)} \widetilde{\mathcal{M}}$  ayant la même dimension et même action de  $D$  que  $\mathcal{M}$  est isomorphe à ce dernier.  $\square$

## 20. Frobenius

Dans ce paragraphe, nous étudions comment se transforment les modules différentiels par le changement de variable  $\varphi(x) \stackrel{\text{déf}}{=} x^p$ . Son effet sur le rayon de convergence (proposition 20.10), lorsque celui-ci est assez grand, est très différent de celui des changements de variables  $\varphi_d(x) = x^d$  pour  $d$  non divisible par  $p$ . Diminuant alors le rayon de convergence, il permet, par itération, de ramener l'étude d'un module différentiel de "grand" rayon de convergence à celui d'un module différentiel de "petit" rayon de convergence pour lequel le théorème 8.6 s'applique.

Le cas des  $\mathcal{A}([0, \rho])$ -modules différentiels (on parle alors de *point ordinaire*) est relativement simple et traité dans [10]. Le cas où l'on autorise une *singularité régulière* en 0 est déjà plus difficile (voir [12]). Le cas général de MLC ( $\mathcal{A}(I)$ ) est démontré dans [13]. Nous en donnons ici une version simplifiée qui élimine certaines restrictions techniques et permet d'obtenir le meilleur résultat possible.

**20.1. Foncteur de Frobenius.** — Soit  $I$  un intervalle et soit  $\varphi$  un élément de  $\mathcal{A}(I)$  vérifiant  $|\varphi(x) - x^p|_\rho < \rho^p$  pour tout  $\rho$  dans  $I$ . Avec les notations de l'exemple 6.27, on a  $\varphi(I) = I^p \stackrel{\text{déf}}{=} \{\rho^p; \rho \in I\}$  et on constate que l'application  $\varphi^*$ , définie par  $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$  est un changement de variable (injectif) de  $\mathcal{A}(I^p)$  dans  $\mathcal{A}(I)$ .

Si, maintenant,  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{A}(I^p)$ -module différentiel (resp. un  $\mathcal{F}(I^p)$ -module différentiel), l'*image inverse*  $\varphi^*(\mathcal{M})$  par le changement de variable  $\varphi^*$  (définition 6.30) est un  $\mathcal{A}(I)$ -module différentiel (resp.  $\mathcal{F}(I)$ -module différentiel). Plus précisément, si  $\epsilon$  est une base de  $\mathcal{M}$  dans laquelle la dérivation est représentée par la matrice  $G$ , alors  $\varphi^*(\mathcal{M})$  a une base  $\varphi^*(\epsilon)$  dans laquelle la dérivation  $D$  est représentée par la matrice  $D(\varphi)\varphi^*(G)$ . De plus,  $\varphi^*$  est un foncteur exact de MLC ( $\mathcal{A}(I^p)$ ) dans MLC ( $\mathcal{A}(I)$ ) appelé *foncteur de Frobenius*.

En fait, pour les modules différentiels ayant un rayon de convergence suffisamment grand, le foncteur de Frobenius ne dépend pas du choix de la fonction  $\varphi$ .

### **Proposition 20.1 (indépendance par rapport au relèvement)**

Soit  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  des éléments de  $\mathcal{A}(I^p)$  tels que  $|\varphi_i(x) - x^p|_\rho < \rho^p$  pour  $i = 1, 2$  et  $\rho$  dans  $I$ . Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}(I^p)$ -module différentiel tel que  $\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho^p) > |\varphi_1 - \varphi_2|_\rho$  pour tout  $\rho$  dans  $I$ . Les  $\mathcal{A}(I)$ -modules différentiels  $\varphi_1^*(\mathcal{M})$  et  $\varphi_2^*(\mathcal{M})$  sont isomorphes.

*Preuve.* — Choisissons une base  $\epsilon$  de  $\mathcal{M}$  et notons  $G_s$  la matrice de  $D^s$  dans la base  $\epsilon$ . Inspirés par la définition (34) de la résolvante  $Y_G$  et ses propriétés (proposition

8.3), nous posons

$$H = Y_G(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \varphi_2^*(G_s) (\varphi_1 - \varphi_2)^s.$$

Par hypothèses, on a  $|\varphi_i|_\rho = |x^p|_\rho = \rho^p$  et en particulier

$$\liminf_{s \leftarrow \infty} \|\varphi_2^*(G_s)\|_\rho^{-1/s} \geq \liminf_{s \leftarrow \infty} \|G_s\|_{\rho^p}^{-1/s} \geq \text{Ray}(\mathcal{M}, \rho^p) > |\varphi_1 - \varphi_2|_\rho.$$

On constate donc que les coefficients de la matrice  $H$  appartiennent à  $\mathcal{A}(I)$ . Mais d'après les formules (35c) et (35a), on a

$$H^{-1} = Y_G(\varphi_2, \varphi_1) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \varphi_1^*(G_s) (\varphi_2 - \varphi_1)^s.$$

Cette matrice est aussi à coefficients dans  $\mathcal{A}(I)$ . Autrement dit, la matrice  $H$  appartient à  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}(I))$ . Maintenant, les formules (35b) et (35c) montrent que

$$D(H) = \varphi_1^*(G) H - \varphi_2^*(G) H.$$

Ceci signifie cette matrice inversible réalise un isomorphisme horizontal entre  $\varphi_1^*(\mathcal{M})$  muni de la base  $\varphi_1^*(\epsilon)$  et  $\varphi_2^*(\mathcal{M})$  muni de la base  $\varphi_2^*(\epsilon)$ .  $\square$

**Remarque 20.2.** — Dans ce livre, le foncteur de frobenius va être utilisé pour l'étude des modules différentiels ayant un "grand" rayon de convergence (voir remarque 20.18). Dans ce but on n'a besoin que d'une seule fonction  $\varphi$  et, pour simplifier, on choisit  $\varphi_0(x) = x^p$ .

Toutefois, on a parfois besoin de considérer d'autres frobenius. Par exemple, lorsque l'on change d'origine, le frobenius  $\varphi_0(x) = x^p$  devient  $\varphi_a(x) = (a+x)^p - a^p$ . Comme  $|\varphi_a - \varphi_0|_\rho = |p| \max\{|a|\rho^{p-1}, |a|^{p-1}\rho\}$ , on constate que  $\varphi_a$  est un frobenius, au sens où nous l'avons défini, si  $|a| < \omega^{-1}\rho$  c'est-à-dire si  $I \subset ]\omega a, \infty[$ . La proposition 20.1 dit alors que les modules différentiels  $\varphi_a^*(\mathcal{M})$  et  $\varphi_0^*(\mathcal{M})$  sont isomorphes si  $\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho^p) > |\varphi_a - \varphi_0|_\rho = |p||a|^{p-1}\rho$  pour tout  $\rho$  dans  $I$ . D'un autre côté, on verra que le frobenius est surtout intéressant pour les modules différentiels  $\mathcal{M}$  tels que  $\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho^p) > \rho^p \omega^p = |p|\omega\rho^p$ , c'est-à-dire pour lesquels  $\varphi^*(\mathcal{M})$  a un grand rayon de convergence. On constate que la proposition 20.1 ne permet de conclure dans ce cas que si  $I \subset ]\omega^{-1/(p-1)}a, \infty[$  ce qui exclut la situation fondamentale  $|a| = \rho = 1$ . Cette proposition sera pourtant suffisante dans la plupart des situations, et en particulier dans le cas particulier des  $\mathcal{R}$ -modules différentiels (proposition 21.1).

Désormais, on va supposer que  $\varphi(x) = x^p$ .

En fait la plupart des résultats concernant le foncteur  $\varphi^*$  restent vrais pour un frobenius  $\varphi$  quelconque. Il faut pour cela utiliser la condition 20.3-2 comme définition de l'opérateur  $\psi$  en remplaçant les racines  $p$ -èmes de l'unité  $\zeta$  par les racines de l'équation  $\varphi(\zeta) = 1$ . Ce travail est en grande partie fait dans le paragraphe 17 de [46].

**20.2. L'opérateur  $\psi$  de Dwork.** — Nous construisons un inverse à gauche  $\psi$  de l'opérateur  $\varphi^*$  agissant sur les anneaux  $\mathcal{A}_a(r)$ . Le fait que cet inverse n'existe que si  $r$  est assez grand sera fondamental dans ce chapitre.

Rappelons que l'anneau  $\mathcal{B}_a(r)$  (des fonctions analytiques bornées dans le disque  $\{|x - a| < r\}$ ) est muni d'une valeur absolue définie par

$$\left| \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s (x - a)^s \right|_{a,r} = \sup_{s \geq 0} |\alpha_s| r^s$$

et que la famille des valeurs absolues  $\{|\cdot|_{a,r}\}_{0 < r < \rho}$  munit l'anneau  $\mathcal{A}_a(\rho) = \cup_{r < \rho} \mathcal{B}_a(r)$ , des fonctions analytiques dans le disque  $\{|x - a| < \rho\}$ , d'une topologie de Fréchet.

**Lemme 20.3.** — Soit  $\Omega$  une extension de  $K$ . Pour  $P = \sum_{s=0}^d a_s x^s$  dans  $\Omega[x]$ , on définit des polynômes  $\varphi^*(P)$  et  $\psi(P)$  de  $\Omega[x]$  en posant

$$\varphi^*(P)(x) = P(x^p) = \sum_{s=0}^d a_s x^{ps} \quad , \quad \psi(P)(x) = \sum_{0 \leq sp \leq d} a_{ps} x^s.$$

L'application  $\varphi^*$  est un homomorphisme d'algèbre et l'application  $\psi$  est  $\Omega$ -linéaire. Pour  $a$  dans  $\Omega^*$  et  $\omega|a| \leq r \leq |a|$ , on a

1.  $\psi(Q\varphi^*(P)) = \psi(Q)P$  ,
2.  $\varphi^* \circ \psi(P)(x) = p^{-1} \sum_{\zeta^p=1} P(\zeta x)$  ,
3.  $|\varphi^*(P)|_{a,r} = |P|_{a^p, r^p}$  ,
4.  $|\psi(P)|_{a^p, r^p} \leq |p|^{-1} |P|_{a,r}$  ,
5.  $x D(\varphi^*(P)) = p \varphi^*(x D(P))$  ,
6.  $x D(\psi(P)) = p^{-1} \psi(x D(P))$  .

*Preuve.* — L'égalité 1. est facile à vérifier et l'égalité 2. vient de ce que

$$\frac{1}{p} \sum_{\zeta^p=1} P(\zeta x) = \sum_{s=0}^d \alpha_s x^s \frac{1}{p} \sum_{\zeta^p=1} \zeta^s = \sum_{0 \leq ps \leq d} \alpha_{ps} x^{ps}$$

Pour l'égalité 3., commençons par le cas d'un polynôme  $P(x) = x - \alpha$  du premier degré. Pour  $r \leq |a|$ , c'est-à-dire  $r^p \leq |a^p|$ , on a

$$|P|_{a^p, r^p} = |x - \alpha|_{a^p, r^p} = |a^p - \alpha + x - a^p|_{a^p, r^p} = \max(|a^p - \alpha|, r^p).$$

D'autre part, on a

$$\varphi^*(P)(x) = (x - a + a)^p - \alpha = a^p - \alpha + (x - a)^p + \sum_{s=1}^{p-1} \binom{p}{s} a^{p-s} (x - a)^s.$$

Si  $1 \leq s < p$ ,  $\binom{p}{s}$  est divisible par  $p$  et alors on trouve pour  $|a| < r \omega^{-1}$

$$\left| \binom{p}{s} a^{p-s} (x - a)^s \right|_{a,r} = |p| |a|^{p-s} r^s < |p| \left(\frac{r}{\omega}\right)^{p-s} r^s = \frac{|p|}{\omega^{p-s}} r^p \leq \frac{|p|}{\omega^{p-1}} r^p = r^p.$$

Finalement, pour  $r \leq |a| < r \omega^{-1}$ , on obtient

$$|\varphi^*(P)|_{a,r} = (\max(|a^p - \alpha|, |x - a|_{a,r}^p)) = \max(|a^p - \alpha|, r^p) = |P|_{a^p, r^p}.$$

La continuité des applications  $r \mapsto |\cdot|_{a,r}$  permet de prolonger cette égalité au cas  $r = \omega|a|$ . Ce qui achève la démonstration de 3. lorsque  $P$  est du premier degré.

Soit maintenant  $P$  un polynôme de degré plus grand que 1. Quitte à l'agrandir, on

peut supposer que le corps  $\Omega$  est algébriquement clos. Le polynôme  $P$  est alors un produit de polynômes du premier degré et l'égalité 3. résulte de ce que les applications  $P \mapsto |P|_{a,r}$ , d'une part, et  $\varphi^*$ , d'autre part, sont multiplicatives.

Pour l'égalité 4., on remarque que, pour  $\zeta^p = 1$ , on a  $|(\zeta - 1)a| = \omega|a| \leq r$  soit :

$$|\zeta x - a|_{a,r} \leq \max \{ |(\zeta - 1)a|, |\zeta(x - a)|_{a,r} \} = |x - a|_{a,r}$$

En décomposant le polynôme  $P$  en un produit de polynômes du premier degré, on trouve donc,  $|P(\zeta x)|_{a,r} \leq |P(x)|_{a,r}$ . Mais, comme  $x = \zeta^{-1}(\zeta x)$ , on a aussi l'inégalité dans l'autre sens, donc  $|P(\zeta x)|_{a,r} = |P(x)|_{a,r}$ . Les résultats 3. et 2. donnent alors

$$|\psi(P)|_{a^p, r^p} = |\varphi^* \circ \psi(P)|_{a,r} = \left| \frac{1}{p} \sum_{\zeta^p=1} P(\zeta x) \right|_{a,r} \leq |p|^{-1} |P|_{a,r}$$

Les égalités 5. et 6. découlent immédiatement des définitions.  $\square$

**Remarque 20.4.** — La majoration 4. ne peut pas être améliorée car on peut avoir  $\psi(P) = 0$  (pour  $P(x) = x$  par exemple) mais, à l'opposé, pour  $P(x) = (a - x)^{p-1}$ , on a  $\psi(P) = a^{p-1}$  et, pour  $r = \omega|a|$ , on trouve

$$|P|_{a,r} = r^{p-1} = \omega^{p-1} |a|^{p-1} = |p| |\psi(P)|_{a^p, r^p}.$$

**Exercice 20.5.** — Montrer que, pour  $0 < r < \omega|a|$ , on a  $|\varphi^*(P)|_{a,r} = |P|_{a^p, R}$  avec  $R^p = |p| |a|^{p-1} r$ .

Les conditions 20.3-3 et 20.3-4 expriment que, si  $\omega|a| \leq r < |a|$ , les applications linéaires  $\varphi$  et  $\psi$  sont continues pour les normes  $|\cdot|_{a,r}$  et  $|\cdot|_{a^p, r^p}$ . Or  $\mathcal{A}_{a,\Omega}(R)$  (resp.  $\mathcal{A}_{a^p,\Omega}(R^p)$ ) est, pour  $\varepsilon > 0$ , le complété de  $\Omega[x]$  pour la topologie définie par la famille de normes  $\{|\cdot|_{a,r}\}_{R-\varepsilon \leq r < R}$  (resp.  $\{|\cdot|_{a^p, r^p}\}_{R-\varepsilon \leq r < R}$ ). Donc, pour  $\omega|a| < R$  l'application  $\varphi$  (resp.  $\psi$ ) se prolonge par continuité en un homomorphisme d'algèbre de  $\mathcal{A}_{a^p,\Omega}(R^p)$  dans  $\mathcal{A}_{a,\Omega}(R)$  (resp. une application  $\Omega$ -linéaire de  $\mathcal{A}_{a,\Omega}(R)$  dans  $\mathcal{A}_{a^p,\Omega}(R^p)$ ) et le lemme 20.3 devient la proposition suivante.

**Proposition 20.6.** — Soit  $a \neq 0$  dans une extension  $\Omega$  de  $K$ , soit  $\omega|a| < R \leq |a|$ , soit  $f$  dans  $\mathcal{A}_{a^p,\Omega}(R^p)$  et soit  $g$  dans  $\mathcal{A}_{a,\Omega}(R)$ . On a

1.  $\psi(g\varphi^*(f)) = \psi(g)f$  ,
2.  $\varphi^* \circ \psi(g)(x) = p^{-1} \sum_{\zeta^p=1} g(\zeta x)$  ,
3.  $|\varphi^*(f)|_{a,r} = |f|_{a^p, r^p}$  ,
4.  $|\psi(g)|_{a^p, r^p} \leq |p|^{-1} |g|_{a,r}$  ,
5.  $x D(\varphi^*(f)) = p\varphi^*(x D(f))$  ,
6.  $x D(\psi(g)) = p^{-1} \psi(x D(g))$  .

**Remarque 20.7 (fondamentale).** — La condition  $R > \omega|a|$  est indispensable dans la proposition 20.6. On le constate d'abord parce que, sinon, la relation 20.6-2 n'aurait pas de sens. En effet, pour  $|x - a| < R \leq \omega|a|$ , on a  $|\zeta x - a| = |\zeta - 1||x| = \omega|a| \geq R$  et une fonction  $g$  de  $\mathcal{A}_a(R)$  n'est, en général, pas définie en  $\zeta x$  pour  $x$  dans  $D(a, r)$  et  $\zeta \neq 1$ . Mais, plus profondément, il est impossible de définir sur  $\mathcal{A}_a(\omega|a|)$  une

application  $\psi$  satisfaisant la condition 20.6-1 car la fonction

$$f(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \binom{1/p}{s} a^{-ps} (x - a^p)^s = \left(1 + \frac{x - a^p}{a^p}\right)^{1/p} = a^{-1} x^{1/p} \quad (13)$$

appartient à  $\mathcal{A}_{a^p}(\omega^p |a|^p) \neq 0$  alors que  $\varphi^*(f) = a^{-1}x$  et donc  $\psi \circ \varphi^*(f) = \psi(a^{-1}x) = 0$ .

Comme  $\mathcal{A}(I)$  (resp.  $\mathcal{A}(I^p)$ ) est le complété de  $K[x, x^{-1}]$  pour la topologie définie par la famille de normes  $\{|\cdot|_{\rho} = |\cdot|_{t_{\rho, \rho^s}}\}_{\rho \in I}$  (resp.  $\{|\cdot|_{\rho^p} = |\cdot|_{t_{\rho^p, \rho^p}}\}_{\rho \in I}$ ), l'application  $\varphi$  (resp.  $\psi$ ) prolongée à  $K[x, x^{-1}]$  par la formule  $\varphi^*(x^{-n}P) = x^{-np}\varphi^*(P)$  (resp.  $\psi(x^{-np}P) = x^{-n}\psi(P)$ ) se prolonge, par continuité, en un homomorphisme d'algèbre de  $\mathcal{A}(I^p)$  dans  $\mathcal{A}(I)$  (resp. une application  $\Omega$ -linéaire de  $\mathcal{A}(I)$  dans  $\mathcal{A}(I^p)$ ). On trouve facilement :

$$\varphi^* \left( \sum_{s \in \mathbb{Z}} a_s x^s \right) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} a_s x^{ps} \quad , \quad \psi \left( \sum_{s \in \mathbb{Z}} a_s x^s \right) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} a_{ps} x^s .$$

et, directement ou en utilisant le lemme 20.3, on obtient la proposition suivante.

**Proposition 20.8.** — Soit  $f$  dans  $\mathcal{A}(I^p)$ ,  $g$  dans  $\mathcal{A}(I)$ ,  $x$  dans  $\mathcal{C}(I)$ , et  $\rho$  dans  $I$ .

- On a
- |    |   |    |   |
|----|---|----|---|
| 1. | $\psi(g \varphi^*(f)) = \psi(g) f$ ,        | 2. | $\varphi^* \circ \psi(g)(x) = p^{-1} \sum_{\zeta^p=1} g(\zeta x)$ , |
| 3. | $ \varphi^*(f) _{\rho} =  f _{\rho^p}$ ,    | 4. | $ \psi(g) _{\rho^p} \leq  p ^{-1}  g _{\rho}$ ,                     |
| 5. | $x D(\varphi^*(f)) = p \varphi^*(x D(f))$ , | 6. | $x D(\psi(g)) = p^{-1} \psi(x D(g))$ .                              |

En fait, l'opérateur  $\psi$  se prolonge au corps  $\mathcal{F}(I)$  des fractions de l'anneau  $\mathcal{A}(I)$ .

**Lemme 20.9.** — Soit  $J$  un intervalle fermé et soit  $g$  un élément de  $\mathcal{F}(J)$ .

1. Il existe un unique élément  $\psi(f)$  de  $\mathcal{F}(J^p)$  tel que  $\varphi^* \circ \psi(f)(x) = p^{-1} \sum_{\zeta^p=1} f(\zeta x)$  pour tout point  $x$  de  $\mathcal{C}(J)$  pour lequel aucun des  $\zeta x$  n'est un pôle de  $f$ .
2. Il existe, de manière unique, des éléments  $f_i$  de  $\mathcal{F}(J^p)$  tels que  $f = \sum_{i=0}^{p-1} x^i \varphi^*(f_i)$ .

*Preuve.* — Comme l'intervalle  $J$  est fermé, il existe d'après le corollaire 2.25 un polynôme  $P$  de  $K[x]$  et une fonction  $g$  de  $\mathcal{A}(J)$  tels que  $f = \frac{g}{P}$ .

Posons  $Q(x) = \prod_{\zeta^p=1} P(\zeta x)$  (les racines de  $Q$  sont exactement les points  $x$  de  $\mathcal{C}(J)$  pour lesquels l'un au moins des  $\zeta x$  est un pôle de  $f$ ). Il vient

$$\sum_{\zeta^p=1} f(\zeta x) = \frac{h(x)}{Q(x)} \quad \text{avec} \quad h(x) = \sum_{\zeta^p=1} g(\zeta x) \prod_{\xi^p=1, \xi \neq \zeta} P(\xi x)$$

Par construction,  $h$  appartient à  $\mathcal{A}_{K[\zeta]}(J)$  et  $Q$  appartient à  $K[\zeta, x]$ . Mais comme  $h$  et  $Q$  sont invariants par toute permutation des racines  $p$ -ièmes de l'unité,  $h$  appartient en fait à  $\mathcal{A}(J)$  et  $Q$  à  $K[x]$ .

<sup>(13)</sup>plus précisément,  $x^{1/p}$  désigne ici la racine  $p$ -ième de  $x$  qui est dans le disque  $D(a, \omega|a|)$

*Preuve de 1.* — Pour toute racine  $p$ -ième de l'unité  $\theta$ , on a :

$$Q(\theta x) = \prod_{(\theta\zeta)^p=1} P(\zeta\theta x) = Q(x) \quad h(\theta x) = \sum_{\zeta^p=1} g(\zeta\theta x) \prod_{\xi^p=1, \xi \neq \zeta} P(\xi\theta x) = h(x)$$

Donc  $h(x) = p^{-1} \sum_{\theta^p=1} \varphi^* \circ \psi(h)(x) h(\theta x)$  et, de même,  $Q = \varphi^*(\psi(Q))$ . En particulier,  $\psi(Q) \neq 0$  et la fraction rationnelle  $\psi(f) = \frac{\psi(h)}{\psi(Q)}$  convient.

L'unicité est une conséquence de l'injectivité de  $\varphi^*$ .

*Preuve de 2.* — Si  $f = \sum_{i=0}^{p-1} x^i \varphi^*(f_i)$ , on constate que  $f_i = \psi(x^{-i} f)$  montrant ainsi l'unicité des  $f_i$ . Pour  $0 \leq i < p$ , on pose donc  $f_i = \psi(x^{-i} f)$ . Les  $f_i$  appartiennent alors à  $\mathcal{F}(J^p)$ . Si  $f(x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \alpha_s x^s$  appartient à  $\mathcal{A}(J)$ , on trouve

$$x^i \varphi^*(f_i) = \frac{1}{p} \sum_{\zeta^p=1} \zeta^{-i} f(\zeta x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \alpha_s x^s \frac{1}{p} \sum_{\zeta^p=1} \zeta^{s-i} = \sum_{s \equiv i \pmod p} \alpha_s x^s$$

et on constate bien que  $f(x) = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{s \equiv i \pmod p} \alpha_s x^s$ . Mais on a vu que toute fonction  $f$  de  $\mathcal{F}(J)$  s'écrivait sous la forme  $h/\varphi^*(Q)$  avec  $Q$  dans  $K[x]$  et  $h$  dans  $\mathcal{A}(J)$ . Dans ces conditions, on a  $f_i = h_i/Q$  et on vient de voir que  $h = \sum_{i=0}^{p-1} x^i \varphi^*(h_i)$  donc  $f = h/\varphi^*(Q) = \sum_{i=0}^{p-1} x^i \varphi^*(h_i/Q) = \sum_{i=0}^{p-1} x^i \varphi^*(f_i)$ .  $\square$

**20.3. Frobenius et rayon de convergence.** — Le lien entre les rayons de convergence d'un  $\mathcal{A}(I^p)$ -module différentiel et ceux de son image par Frobenius sont fondamentaux dans la théorie. Ils sont à l'origine du comportement particulier de la ramification  $x \mapsto x^p$  (qui ne change pas la pente  $p$ -adique) par rapport aux autres ramifications  $x \mapsto x^d$  pour  $d$  premier à  $p$  (qui multiplie la pente par  $d$ ).

Dans tous les résultats énoncés, il faut exclure, par des hypothèses convenables, le module différentiel  $\mathcal{A}(I^p) x^{1/p}$  qui a un comportement pathologique dans ce contexte. En effet, il a un rayon de convergence égal à  $\omega^p \rho^p$  pour tout nombre  $\rho^p$  de l'intervalle  $I^p$  alors que son image par Frobenius est isomorphe à  $\mathcal{A}(I)$  et a donc un rayon de convergence égal à  $\rho$  pour tout nombre  $\rho$  de l'intervalle  $I$ .

**Proposition 20.10.** — Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{F}(I^p)$ -module différentiel et soit  $\rho$  dans  $I$ .

On note  $\mathfrak{g}$  une base de  $\mathcal{M}$ ,  $G$  la matrice représentant la dérivation  $D$  dans cette base,  $t_\rho$  un point générique tel que  $|t_\rho| = \rho$  et on note  $X$  la matrice, à coefficients analytiques dans un disque de centre  $t_\rho^p$ , telle que  $D(X) = GX$  et  $X(t_\rho^p) = I$ .

1. Si  $\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho^p) > \rho^p \omega^p$  alors  $\text{Ray}(\varphi^*(\mathcal{M}), \rho) = \text{Ray}(\mathcal{M}, \rho^p)^{1/p}$ .
2. Si  $\text{Ray}(\varphi^*(\mathcal{M}), \rho) > \rho \omega$  et si la matrice  $\psi \circ \varphi^*(X)(t_\rho^p)$  <sup>(14)</sup> est inversible, alors  $\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho^p) = \text{Ray}(\varphi^*(\mathcal{M}), \rho)^p$ .

*Preuve.* — Notons  $G_s$  (resp.  $F_s$ ) la matrice représentant l'opérateur  $D^s$  dans la base  $\mathfrak{g}$  de  $\mathcal{M}$  (resp.  $\varphi^*(\mathfrak{g})$  de  $\varphi^*(\mathcal{M})$ ). Comme  $D(\varphi^*(X)) = px^{p-1}G(x^p)\varphi^*(X)$  et

<sup>(14)</sup>Les coefficients de  $X$  ont un rayon de convergence égal à  $\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho^p)$  et, a priori, ce nombre pourrait être inférieur à  $\omega^p \rho^p$ . On ne peut donc pas appliquer le résultat 20.6-3. A posteriori, ce résultat s'appliquera et montrera qu'en fait  $\psi \circ \varphi^*(X)(t_\rho^p) = X(t_\rho^p) = I$

$\varphi^*(X)(t_\rho) = \mathbf{I}$ , on trouve

$$X(x^p) = \sum_{s=0}^{\infty} G_s(t_\rho) \frac{(x^p - t_\rho^p)^s}{s!} = \sum_{i=0}^{\infty} F_s(t_\rho) \frac{(x - t_\rho)^s}{s!} = \varphi^*(X)(x)$$

Par définition du rayon de convergence et son interprétation dans la proposition 8.4.2, la matrice  $X$  et (resp.  $\varphi^*(X)$ ) appartient à  $\text{Gl}\left(\mu, \mathcal{A}_{t_\rho^p}(\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho^p))\right)$  (resp.  $\text{Gl}\left(\mu, \mathcal{A}_{t_\rho}(\text{Ray}(\varphi^*(\mathcal{M}), \rho))\right)$ ).

Compte tenu de cette interprétation, pour démontrer le résultat 1. il suffit de remarquer que, si  $\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho^p) > \rho^p \omega^p$

— d’après la proposition 20.6-3, on a  $\text{Ray}(\varphi^*(\mathcal{M}), \rho) \geq \text{Ray}(\mathcal{M}, \rho^p)^{1/p}$ ,

— d’après la proposition 20.6-3, on a  $X = \psi \circ \varphi^*(X)$ ,

— d’après la proposition 20.6-2, on a donc  $\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho^p) \geq \text{Ray}(\varphi^*(\mathcal{M}), \rho)^p$ .

Démontrons maintenant le résultat 2. Par hypothèse, les coefficients de la matrice  $Y = \varphi^*(X)$  appartiennent à  $\mathcal{A}_{t_\rho}(R)$  avec  $R = \text{Ray}(\varphi^*(\mathcal{M}), \rho) > \omega|t_\rho|$ . D’après la proposition 20.6.2, les coefficients de la matrice  $\psi(Y)$  appartiennent à  $\mathcal{A}_{t_\rho^p}(R^p)$ . Or

$$\begin{aligned} \varphi^*\left(xD(\psi(Y))\right) &= xD(\varphi^* \circ \psi(Y)) = \frac{1}{p} \sum_{\zeta^p=1} x\zeta D(Y)(\zeta x) = \varphi^* \circ \psi(xD(Y)) \\ &= \varphi^* \circ \psi(p\varphi^*(xG)Y) = p\varphi^*(xG\psi(Y)), \end{aligned}$$

donc  $D(\psi(Y)) = G\psi(Y)$ . Si la matrice  $\psi(Y)(t_\rho^p)$  est inversible, les colonnes de la matrice  $\psi(Y)$  forment une base de solutions de l’équation  $D(X) = GX$ . Donc  $\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho^p) \geq R^p > \omega\rho$  et on peut appliquer le résultat 1.<sup>(15)</sup>  $\square$

**Exercice 20.11.** — Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}(I^p)$ -module différentiel et soit  $\rho$  dans  $I$ . A l’aide de l’exercice 20.5, montrer que l’on a

$$\rho^{-1} \text{Ray}(\varphi^*(\mathcal{M}), \rho) \geq \min\left(\left(\rho^{-p} \text{Ray}(\mathcal{M}, \rho^p)\right)^{1/p}, |p|\rho^{-p} \text{Ray}(\mathcal{M}, \rho^p)\right).$$

Trouver un module différentiel pour lequel l’inégalité précédente est stricte.

**20.4. Unicité de l’antécédent.** — Dans ce paragraphe, on montre la pleine fidélité du foncteur de Frobenius (proposition 20.12) et on en déduit l’unicité de l’antécédent c’est-à-dire que deux modules différentiels dont les images par Frobenius sont isomorphes sont eux-même isomorphes (corollaire 20.14).

**Proposition 20.12.** — Soit  $I$  un intervalle et soit  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  deux  $\mathcal{F}(I^p)$ -modules différentiels. S’il existe  $\rho$  dans  $I$  tel que  $\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho^p) > \omega^p \rho^p$  et  $\text{Ray}(\mathcal{N}, \rho^p) > \omega^p \rho^p$ , alors l’application  $\varphi^*$  de  $\text{Hom}_{\mathcal{F}(I^p)\langle D \rangle}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  dans  $\text{Hom}_{\mathcal{F}(I)\langle D \rangle}(\varphi^*\mathcal{M}, \varphi^*\mathcal{N})$  est surjective.

<sup>(15)</sup>Voir la remarque 20.7 et la note 14 pour comprendre les finesses de cette démonstration.

*Preuve.* — D'après le corollaire 8.7 (ou le corollaire 8.8 si  $\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho^p) \geq \omega \rho^p$ ), si on choisit une base pseudo-cyclique  $\mathfrak{g}$  (resp.  $\mathfrak{f}$ ) de  $\mathcal{M}$  (resp.  $\mathcal{N}$ ) dans laquelle la dérivation est représentée par une matrice  $G$  (resp.  $F$ ), alors

$$(63) \quad \|xG\|_{\rho^p} = \rho^p \|G\|_{\rho^p} \leq \rho^p \frac{\omega}{\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho^p)} < \rho^p \frac{\omega}{\rho^p \omega^p} = \frac{1}{\omega^{p-1}} = |p|^{-1}$$

(resp.  $\|xF\|_{\rho^p} < |p|^{-1}$ ). Tout morphisme  $s$  entre  $\varphi^*(\mathcal{M})$  et  $\varphi^*(\mathcal{N})$  est représenté dans les bases  $\varphi^*(\mathfrak{g})$  et  $\varphi^*(\mathfrak{f})$  par une matrice  $H$  de  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{F}(I))$  qui vérifie la relation (21)

$$xD(H) = xGH - HxF.$$

D'après le lemme 20.9-2, on a  $H = \sum_{i=0}^{p-1} x^i \varphi^*(H_i)$  où  $H_i$  est une matrice à coefficients dans  $\mathcal{F}(I^p)$ . La relation (21) s'écrit

$$iH_i + px D(H_i) = px(FH_i - H_iG).$$

Les relations (63) et  $\|xD(H_i)\|_{\rho^p} \leq \|H_i\|_{\rho^p}$  donnent

$$\|iH_i\|_{\rho^p} \leq \max\{\|px D(H_i)\|_{\rho^p}, \|pxF H_i\|_{\rho^p}, \|H_i pxG\|_{\rho^p}\} < \|H_i\|_{\rho^p}.$$

On en déduit que  $H_i = 0$  pour  $i \neq 0$ . Donc  $H = \varphi^*(H_0)$  et la matrice  $H_0$  représente, dans les bases  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{f}$ , un morphisme  $s_0$  entre  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  tel que  $\varphi^*(s_0) = s$ .  $\square$

**Remarque 20.13.** — On démontre le même résultat pour la catégorie  $\text{MLC}(\mathcal{A}(I))$  au lieu de  $\text{MLC}(\mathcal{F}(I))$ . Il suffit pour cela de remplacer le corollaire 8.7 par le corollaire 19.27.

**Corollaire 20.14.** — Soit  $J$  un intervalle fermé et soit  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  deux  $\mathcal{A}(J^p)$ -modules différentiels tels que  $\mathcal{F}(J) \otimes_{\mathcal{A}(J)} \varphi^*(\mathcal{M})$  et  $\mathcal{F}(J) \otimes_{\mathcal{A}(J)} \varphi^*(\mathcal{N})$  sont isomorphes. S'il existe  $\rho$  dans  $J$  tel que  $\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho^p) > \omega^p \rho^p$  et  $\text{Ray}(\mathcal{N}, \rho^p) > \omega^p \rho^p$ , alors  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  sont isomorphes.

*Preuve.* — Par hypothèse, on a un isomorphisme

$$\varphi^*(\mathcal{F}(J^p) \otimes_{\mathcal{A}(J^p)} \mathcal{M}) = \mathcal{F}(J) \otimes_{\mathcal{A}(J)} \varphi^*(\mathcal{M}) \xrightarrow{i} \mathcal{F}(J) \otimes_{\mathcal{A}(J)} \varphi^*(\mathcal{N}) = \varphi^*(\mathcal{F}(J^p) \otimes_{\mathcal{A}(J^p)} \mathcal{N})$$

D'après la proposition 20.12, celui-ci provient d'un isomorphisme

$$\mathcal{F}(J^p) \otimes_{\mathcal{A}(J^p)} \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{F}(J^p) \otimes_{\mathcal{A}(J^p)} \mathcal{N}.$$

qui, d'après la proposition 19.29, provient lui-même d'un isomorphisme  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ .  $\square$

**20.5. Existence de l'antécédent.** — Dans ce paragraphe, on montre l'essentielle surjectivité du foncteur de Frobenius dans le cas d'un intervalle fermé (théorème 20.15). Pour obtenir un résultat analogue dans le cas d'un intervalle quelconque, on devra supposer le corps sphériquement complet (corollaire 20.16).

**Théorème 20.15.** — Soit  $J$  un intervalle fermé et soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}(J)$ -module différentiel. Si  $\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho) > \omega \rho$  pour tout  $\rho$  dans  $J$ , il existe un (unique)  $\mathcal{A}(J^p)$ -module différentiel  $\mathcal{N}$  tel que  $\mathcal{M} = \varphi^*(\mathcal{N})$  et  $\text{Ray}(\mathcal{N}, \rho^p) = \text{Ray}(\mathcal{M}, \rho)^p$  pour tout  $\rho$  dans  $J$ .

*Preuve.* — On va construire une base de  $\mathcal{M}$  dans laquelle la matrice de dérivation est de la forme  $px^{p-1}\varphi^*(E)$ .

Soit  $G$  la matrice qui représente l'opérateur  $D$  dans une base  $\mathfrak{g}$  de  $\mathcal{M}$ , pour  $\rho$  dans l'intervalle  $J$ , soit  $X_{G,\rho}$  la solution au voisinage du point (générique)  $t_\rho$  du système  $D(X) = GX$  telle que  $X(t_\rho) = \mathbf{I}$ . Par définition du rayon de convergence d'un module différentiel, la matrice  $X_{G,\rho}$  appartient à  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}_{t_\rho}(\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho)))$ .

Soit  $Y_G$  la matrice résolvante définie par la formule (34). Si  $\zeta$  est une racine  $p$ -ème de l'unité, comme  $\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho) > \omega\rho \geq |\zeta - 1|$  pour tout  $\rho$  dans  $J$ , la matrice  $Y_G(\zeta x, x)$  appartient à  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}(I))$  et, pour  $\{|x - t_\rho| < \text{Ray}(\mathcal{M}, \rho)\}$ , on a

$$Y_G(\zeta x, x) = X_{G,\rho}(\zeta x) X_{G,\rho}(x)^{-1}$$

Reprenant les notations du lemme 17.2, pour chaque matrice diagonale  $\Delta$  dont les coefficients  $\Delta_i$  sont dans  $\{0, 1, \dots, p-1\}$ , on considère la matrice :

$$(64) \quad H_\Delta \stackrel{\text{déf}}{=} x^{-\Delta} S_{G,1,\Delta} = \frac{1}{p} \sum_{\xi^{p-1}} (\xi x)^{-\Delta} Y_G(\xi x, x) = \varphi^* \circ \psi(x^\Delta X_{G,\rho}) X_{G,\rho}^{-1}$$

le lemme 17.2 montre que, pour tout  $\Delta$ , la matrice  $H_\Delta$  appartient à  $\text{Mat}(\mu, \mathcal{A}(J))$  et que

$$\sum_{\Delta \in [0, p-1]^\mu} x^{\sum \Delta_i} \det(H_\Delta) = \sum_{\Delta \in [0, p-1]^\mu} \det(S_{G,1,\Delta}) = \det(S_{G,0,\emptyset}) = \det(\mathbf{I}) = 1$$

En particulier on constate que, pour chaque point  $a$  de  $\mathcal{C}(J)$ , il existe (au moins) une matrice  $\Delta_a$  telle que  $a^{\sum \Delta_{a,i}} \det(H_{\Delta_a})(a) \neq 0$ . Donc  $\det(H_{\Delta_a}) \neq 0$  et la matrice  $H_{\Delta_a}$  appartient à  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{F}(J))$ . De plus les matrices  $H_{\Delta_a}$  et  $H_{\Delta_a}^{-1}$  n'ont pas de pôle en  $a$ .

Considérons maintenant un  $\mu$ -uplet  $\Delta$  pour lequel la matrice  $H_\Delta$  appartient à  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{F}(J))$  (nous venons de voir qu'il en existe). Dans la base  $\mathfrak{f}_\Delta$  de  $\mathcal{F}(J) \otimes_{\mathcal{A}(J)} \mathcal{M}$ , obtenue à partir de la base  $\mathfrak{g}$  par le changement de base associé à la matrice  $H_\Delta$ , la dérivation  $D$  est représentée par la matrice

$$(65) \quad F_\Delta = (D(H_\Delta) + H_\Delta G) H_\Delta^{-1}$$

On remarque alors que  $H_\Delta = \varphi^* \circ \psi(x^\Delta X_{G,\rho}) X_{G,\rho}^{-1}$ . Autrement dit, si on pose  $Y_{\Delta,\rho} = \psi(x^\Delta X_{G,\rho})$ , on trouve que la matrice

$$\varphi^*(Y_{\Delta,\rho}) = \varphi^* \circ \psi(x^\Delta X_{G,\rho}) = H_\Delta X_{G,\rho}$$

appartient à  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}_{t_\rho}(\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho)))$ . Si on note  $Z$  l'inverse de  $\varphi^*(Y_{\Delta,\rho})$ , on a évidemment  $Z \varphi^*(Y_{\Delta,\rho}) = \mathbf{I}$  et la propriété 20.6-1 montre que  $\psi(Z) Y_{\Delta,\rho} = \psi(\mathbf{I}) = \mathbf{I}$ . On constate que la matrice  $Y_{\Delta,\rho}$  appartient à  $\text{Gl}(\mu, \mathcal{A}_{t_\rho^p}(\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho^p)))$ . La formule (65) s'écrit alors que

$$F_\Delta = D(\varphi^*(Y_{\Delta,\rho})) \varphi^*(Y_{\Delta,\rho})^{-1} = px^{p-1} \varphi^*(D(Y_{\Delta,\rho}) Y_{\Delta,\rho}^{-1}) = px^{p-1} \varphi^*(E_\Delta).$$

Nous venons donc de construire une matrice

$$(66) \quad E_\Delta \stackrel{\text{déf}}{=} D(Y_{\Delta,\rho}) Y_{\Delta,\rho}^{-1}$$

qui a les bonnes propriétés. Il reste à vérifier qu'elle appartient bien à  $\text{Mat}(\mu, \mathcal{F}(J^p))$  (voir (68)) alors qu'a priori elle appartient seulement à  $\text{Mat}(\mu, \mathcal{A}_{t^p}(\text{Ray}(\mathcal{M}^p, \rho^p)))$ .

En utilisant les formules (35b) et (35d) de la proposition 8.3, on trouve

$$\begin{aligned} D(x^\Delta H_\Delta) &= \frac{1}{p} \sum_{\xi^p=1} \xi^{-\Delta} D(Y_G(\xi x, x)) \\ &= \frac{1}{p} \sum_{\xi^p=1} \xi^{-\Delta} (\xi G(\xi x) Y_G(\xi x, x) - Y_G(\xi x, x) G(x)) \\ &= x^{\Delta-1} K_\Delta(x) - x^\Delta H_\Delta(x) G(x) \end{aligned}$$

avec  $K_\Delta(x) = \frac{1}{p} \sum_{\xi^p=1} (\xi x)^{-\Delta+1} G(\xi x) Y_G(\xi x, x)$ . On trouve

$$\begin{aligned} F_\Delta H_\Delta &= D(H_\Delta) + H_\Delta G = x^{-\Delta} D(x^\Delta H_\Delta) - \Delta x^{-1} H_\Delta + H_\Delta G \\ &= x^{-1} K_\Delta - H_\Delta G - \Delta x^{-1} H_\Delta + H_\Delta G \\ &= x^{-1} (K_\Delta - \Delta H_\Delta) \end{aligned}$$

La formule (35c) montre que, pour toute racine  $p$ -ième  $\zeta$  de l'unité, on a :

$$\begin{aligned} H_\Delta(\zeta x) &= \frac{1}{p} \sum_{\xi^p=1} (\xi \zeta x)^{-\Delta} Y_G(\xi \zeta x, x) Y_G(x, \zeta x) &= H_\Delta(x) Y_G(x, \zeta x) \\ K_\Delta(\zeta x) &= \frac{1}{p} \sum_{\xi^p=1} (\xi \zeta)^{-\Delta+1} G(\xi \zeta x) Y_G(\xi \zeta x, x) Y_G(x, \zeta x) &= K_\Delta(x) Y_G(x, \zeta x) \end{aligned}$$

Pour tout point  $x$  dans  $\mathcal{C}(J)$  on a donc:

$$\begin{aligned} F_\Delta(\zeta x) H_\Delta(x) Y_G(x, \zeta x) &= F_\Delta(\zeta x) H_\Delta(\zeta x) = (\zeta x)^{-1} (K_\Delta(\zeta x) - \Delta H_\Delta(\zeta x)) \\ &= (\zeta x)^{-1} (K_\Delta(x) - \Delta H_\Delta(x)) Y_G(x, \zeta x) \\ &= \zeta^{-1} F_\Delta(x) H_\Delta(x) Y_G(x, \zeta x) \end{aligned}$$

La matrice  $Y_G(x, \zeta x)$  est inversible pour tout  $x$  de  $\mathcal{C}(J)$  et la matrice  $H_\Delta(x)$  est inversible si  $x$  n'est pas un zéro de  $\det H_\Delta$ . Si  $x$  n'est pas un tel zéro on a donc

$$(67) \quad \zeta x F_\Delta(\zeta x) = x F_\Delta(x).$$

La matrice  $x F_\Delta$  a des coefficients dans  $\mathcal{F}(J)$  et la matrice  $\det(H_\Delta) F_\Delta$  a des coefficients dans  $\mathcal{A}(J)$ . En appliquant le lemme 20.9-1 aux coefficients de  $x F_\Delta$ , on trouve qu'il existe une (unique) matrice  $E_\Delta$  à coefficients dans  $\mathcal{F}(J^p)$  telle que, si aucun des  $\zeta x$  n'est un zéro de  $\det(H_\Delta)$ , on ait

$$(68) \quad x F_\Delta(x) = \frac{1}{p} \sum_{\xi^p=1} \zeta x F_\Delta(\zeta x) = p x^p \varphi^*(E_\Delta).$$

La relation (68) signifie que le  $\mathcal{F}(J^p)$ -module différentiel  $\mathcal{N}_\Delta = \mathcal{F}(J^p)^\mu$  pour lequel la dérivation  $D$  est représentée par la matrice  $E_\Delta$  dans la base canonique est tel que

$$\varphi^*(\mathcal{N}_\Delta) = \mathcal{F}(J) \otimes_{\mathcal{A}(J)} \mathcal{M}.$$

La matrice  $Y_{\Delta, \rho}$  appartenant à  $\text{Gl} \left( \mu, \mathcal{A}_{t_p}(\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho)^p) \right)$ , la formule (66) dit que

$$\text{Ray}(\mathcal{N}_{\Delta}, \rho^p) \geq \text{Ray}(\mathcal{M}, \rho)^p > \omega^p \rho^p.$$

et la proposition 20.10-1 montre que  $\text{Ray}(\mathcal{N}_{\Delta}, \rho^p) = \text{Ray}(\varphi^*(\mathcal{N}_{\Delta}), \rho)^p = \text{Ray}(\mathcal{M}, \rho)^p$ .

Si  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont des  $\mu$ -uples pour lesquels les matrices  $H_{\Delta}$  et  $H_{\Delta'}$  sont inversibles, on a  $\varphi^*(\mathcal{N}_{\Delta'}) = \mathcal{M} = \varphi^*(\mathcal{N}_{\Delta})$ . D'après le corollaire 20.14 les  $\mathcal{F}(J^p)$ -modules différentiels  $\mathcal{N}_{\Delta}$  et  $\mathcal{N}_{\Delta'}$  sont isomorphes. Notons  $\mathcal{N}$  le module différentiel isomorphe à tous ces modules différentiels  $\mathcal{N}_{\Delta}$  et  $\epsilon_{\Delta}$  la base de  $\mathcal{N}$  image de la base canonique de  $\mathcal{N}_{\Delta}$ . Pour chaque point  $a$  de la couronne  $\mathcal{C}(J)$ , il existe un  $\mu$ -uple  $\Delta_a$  pour lequel la matrice  $H_{\Delta_a}$  est inversible et a un déterminant non nul au point  $a$ . Autrement dit, dans la base  $\epsilon_{\Delta_a}$  la dérivation  $D$  est représentée par la matrice  $E_{\Delta_a}$  définie par la relation :

$$px^{p-1}\varphi^*(E_{\Delta_a}) = F_{\Delta_a} = (D(H_{\Delta_a}) + H_{\Delta_a}G) H_{\Delta_a}^{-1}.$$

On constate que la matrice  $F_{\Delta_a}$  n'a pas de pôle au point  $a$  et donc que la matrice  $E_{\Delta_a} = \frac{1}{p}x\psi(xF_{\Delta_a})$  n'a pas de pôle au point  $a^p$ . Le corollaire 19.30 montre qu'il existe un  $\mathcal{A}(J^p)$ -module différentiel  $\tilde{\mathcal{N}}$  tel que  $\mathcal{N} = \mathcal{F}(J^p) \otimes_{\mathcal{A}(J^p)} \tilde{\mathcal{N}}$ . Par construction, les modules différentiels  $\varphi^*(\tilde{\mathcal{N}})$  et  $\mathcal{M}$  sont isomorphes après tensorisation par  $\mathcal{F}(J)$ . Ils sont donc isomorphes d'après la proposition 19.29.  $\square$

**Corollaire 20.16.** — *On suppose le corps  $K$  sphériquement complet. Soit  $I$  un intervalle et soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}(I)$ -module différentiel. Si  $\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho) > \omega\rho$  pour tout  $\rho$  dans  $I$ , il existe un (unique)  $\mathcal{A}(I^p)$ -module différentiel  $\mathcal{N}$  tel que  $\mathcal{M} = \varphi^*(\mathcal{N})$  et  $\text{Ray}(\mathcal{N}, \rho^p) = \text{Ray}(\mathcal{M}, \rho)^p$  pour tout  $\rho$  dans  $I$ .*

*Preuve.* — Pour tout intervalle fermé  $J \subset I$ , on a construit dans le théorème 20.15 un  $\mathcal{A}(J^p)$ -module différentiel  $\mathcal{N}(J^p)$  tel que :

- $\varphi^*(\mathcal{N}(J^p)) = \mathcal{M}(J) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{A}(J) \otimes_{\mathcal{A}(I)} \mathcal{M}$ ,
- $\text{Ray}(\mathcal{N}(J^p), \rho^p) = \text{Ray}(\mathcal{M}, \rho)^p$  pour tout  $\rho$  dans  $J$ .

Il résulte immédiatement du corollaire 20.14 que les  $\mathcal{N}(J^p)$  forment un faisceau localement libre sur la couronne  $\mathcal{C}(I^p)$ . D'après le théorème 4.40, ce faisceau est libre. Il est maintenant facile de vérifier que le  $\mathcal{A}(I^p)$ -module  $\mathcal{N}$  des sections globales de ce faisceau possède toutes les propriétés demandées car celles-ci sont de nature locale.  $\square$

**Remarque 20.17.** — Si on note  $[A]_i$  la  $i$ -ème ligne de la matrice  $A$ , il vient :

$$[H_{\Delta}]_i = \frac{1}{p} \sum_{\xi^p=1} (\xi x)^{\Delta_i} \sum_{s=0}^{\infty} [G_s]_i \frac{(\xi x - x)^s}{s!} = \sum_{s=0}^{\infty} \gamma_{s, \Delta_i} x^{s+\Delta_i} [G_s]_i$$

avec  $\gamma_{s, \Delta_i} = \frac{1}{p} \sum_{\xi^p=1} \xi^{\Delta_i} \frac{(\xi - 1)^s}{s!}$ . Les nombres  $\gamma_{s, \Delta_i}$  sont rationnels comme polynômes symétriques en les  $\xi$ . Par ailleurs, la relation bien connue  $|\xi - 1| \leq \omega$  pour toute racine  $p$ -ième de l'unité  $\xi$  montre que

$$|\gamma_{s, \Delta_i}| \leq \frac{1}{|p|} |\xi|^{\Delta_i} \frac{\omega^s}{|s!|} < \frac{1}{|p|}$$

d'où il résulte que le nombre rationnel  $\gamma_{s,\Delta_i}$  est dans  $\mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q}$ .

En particulier, on a  $|\gamma_{s,\Delta_i}| \leq 1$  et, si on a choisi un nombre  $\rho$  de l'intervalle  $J$  et choisi la base  $\mathfrak{g}$  comme dans le corollaire 19.27, on obtiendra une base  $\mathfrak{e}_\mathfrak{d}$  de  $\mathcal{N}$  dans laquelle la dérivation est représentée par une matrice  $E_\Delta$  vérifiant  $\|x E_\Delta\|_{\rho^p} \leq |p|^{-1}$ .

**Remarque 20.18.** — Si le rayon de convergence de  $\mathcal{M}$  est suffisamment grand, plus précisément si  $\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho) > \omega^{p^{-h+1}} \rho$  pour tout  $\rho$  de  $I$ , on peut itérer le procédé. A partir d'un  $\mathcal{A}(I)$ -module différentiel  $\mathcal{N}_0 = \mathcal{M}$  on construit ainsi une suite  $\{\mathcal{N}_i\}_{0 \leq i \leq h}$  telle que  $\mathcal{N}_i$  soit un  $\mathcal{A}(I^{p^i})$ -module différentiel vérifiant  $\varphi^*(\mathcal{N}_{i+1}) = \mathcal{N}_i$  pour  $0 \leq i < h$ . Une telle construction est traditionnellement appelée *structure de Frobenius faible* de  $\mathcal{M}$ . Elle permet, par exemple, de ramener l'étude du rayon de convergence d'un module différentiel  $\mathcal{M}$  tel que  $\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho) < \rho$  à celle d'un module différentiel  $\mathcal{N}_h$  vérifiant  $\text{Ray}(\mathcal{N}_h, \rho) \leq \omega \rho$  pour lequel, d'après le théorème 8.6, on sait calculer le rayon de convergence à partir des coefficients de la matrice représentant la dérivation dans une base cyclique.

## 21. La catégorie $\text{MLCF}(\mathcal{R})$

Les résultats sur le foncteur de Frobenius agissant sur la catégorie  $\text{MLC}(\mathcal{A}(I))$  se traduisent facilement dans la catégorie  $\text{MLCS}(\mathcal{R})$ .

Soit  $\varphi$  un élément de  $\mathcal{R}$  tel que  $\lim_{\rho \rightarrow 1} |\varphi(x) - x^p|_\rho < 1$ . On définit, par composition, un morphisme de Frobenius d'anneaux  $\varphi : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  et, par image inverse, un foncteur exact de la catégorie  $\text{MLC}(\mathcal{R})$  dans elle-même :

$$\varphi^*(\mathcal{M}) := \mathcal{R}_{\varphi \setminus \mathcal{R}} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{M}$$

**Corollaire 21.1.** — Soient  $\varphi$  et  $\psi$  des éléments de  $\mathcal{R}$  tels que  $\lim_{\rho \rightarrow 1} |\varphi(x) - x^p|_\rho < 1$  et  $\lim_{\rho \rightarrow 1} |\psi(x) - x^p|_\rho < 1$  et soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{R}$ -module différentiel soluble. Les  $\mathcal{R}$ -modules différentiels  $\varphi^*(\mathcal{M})$  et  $\psi^*(\mathcal{M})$  sont isomorphes.

*Preuve.* — Voir proposition 20.1. □

D'après ce corollaire, si on ne s'intéresse qu'aux modules différentiels solubles, on peut se limiter au cas  $\varphi(x) = x^p$ .

**Corollaire 21.2.** — Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{R}$ -module différentiel soluble. Alors  $\varphi^*(\mathcal{M})$  est un  $\mathcal{R}$ -module différentiel soluble et  $\text{pt}(\varphi^*(\mathcal{M})) = \text{pt}(\mathcal{M})$ .

*Preuve.* — Voir proposition 20.10-2. □

**Remarque 21.3.** — Si  $d$  est un entier premier à  $p$ , le module différentiel soluble  $\varphi_d^*(\mathcal{M})$  obtenu à partir de la ramification  $x \mapsto x^d$  vérifie  $\text{pt}(\varphi_d^*(\mathcal{M})) = d \text{pt}(\mathcal{M})$ . Le comportement du foncteur de Frobenius vis à vis des pentes est donc tout à fait singulier. En particulier, comme les modules différentiels de rang un ont une pente entière, un module différentiel dont l'une des pentes a un dénominateur divisible par  $p$  ne peut pas, même après ramification, être obtenu par extensions successives de modules différentiels de rang un.

**Corollaire 21.4.** — *Le foncteur  $\varphi^*$  de la catégorie  $\text{MLCS}(\mathcal{R})$  dans elle même est une équivalence de catégorie.*

*Preuve.* — C'est une conséquence des théorèmes 20.15 et 20.14.  $\square$

Fixons un morphisme de Frobenius.

**Définition 21.5.** — On dit qu'un  $\mathcal{R}$ -module différentiel  $\mathcal{M}$  a une *structure de Frobenius* s'il existe un entier  $h \geq 1$  pour lequel  $\varphi^{*h}(\mathcal{M})$  est isomorphe à  $\mathcal{M}$  (dans  $\text{MLC}(\mathcal{R})$ ).

On note  $\text{MLCF}(\mathcal{R})$  la sous-catégorie pleine de  $\text{MLC}(\mathcal{R})$  dont les objets sont les  $\mathcal{R}$ -modules différentiels ayant une structure de Frobenius.

**Proposition 21.6.** —  *$\text{MLCF}(\mathcal{R})$  est une sous-catégorie de  $\text{MLCS}(\mathcal{R})$ .*

*Preuve.* — Soit  $\mathcal{M}$  un objet de  $\text{MLCF}(\mathcal{R})$ . Pour simplifier la démonstration nous supposons que la structure de Frobenius est d'ordre  $h = 1$ , c'est-à-dire que  $\varphi^*(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ . Le cas général se traite de manière analogue.

Soit  $\mathcal{M}_\varepsilon$  un  $\mathcal{A}(I_\varepsilon)$ -module différentiel vérifiant (36). D'après la proposition 20.10-1, pour  $\varepsilon$  suffisamment petit et  $\rho^p$  dans  $I_\varepsilon$ , on a :

$$\begin{aligned} 1 \geq \rho^{-1} \text{Ray}(\mathcal{M}_\varepsilon, \rho) &= \rho^{-1} \text{Ray}(\varphi^*(\mathcal{M}_\varepsilon), \rho) \\ &\geq \rho^{-1} \min(\text{Ray}(\mathcal{M}_\varepsilon, \rho^p)^{1/p}, p\rho^{1-p} \text{Ray}(\mathcal{M}_\varepsilon, \rho^p)) \\ &\geq \rho^{-p} \text{Ray}(\mathcal{M}_\varepsilon, \rho^p). \end{aligned}$$

Il en résulte que, pour  $\rho$  dans  $I_\varepsilon$ , la suite  $u_h = \rho^{-p^{-h}} \text{Ray}(\mathcal{M}_\varepsilon, \rho^{p^{-h}})$  est croissante et converge vers une limite  $\ell$  qui vérifie  $1 \geq \ell \geq \min(\ell^{1/p}, p\ell)$  c'est-à-dire  $\ell = 1$ .  $\square$

**Remarque 21.7.** — Il est d'usage de dire que les objets de  $\text{MLCF}(\mathcal{R})$  ont une *structure de Frobenius forte*. Toutefois, à bien des égards, cette structure forte donne moins d'informations que la structure de Frobenius faible. En effet l'*antécédent fort* du module différentiel  $\mathcal{M}_\varepsilon$  est  $\mathcal{M}_\varepsilon$  lui-même, donc défini dans la même couronne,  $\mathcal{C}(I_\varepsilon)$  alors que l'*antécédent faible* de  $\mathcal{M}_\varepsilon$  est défini dans la couronne  $\mathcal{C}(I_\varepsilon^p)$  qui est strictement plus grande.

## 22. Le théorème de non séparabilité

**22.1. Topologies.** — Rappelons que l'anneau  $\mathcal{A}(I)$  est muni de la topologie localement convexe définie par la famille des valeurs absolues  $|\cdot|_\rho$  pour  $\rho$  dans  $I$ . Cette topologie est celle de la convergence uniforme sur les sous-couronnes fermées de  $\mathcal{C}(I)$ . Elle fait de  $\mathcal{A}(I)$  un espace de Fréchet c'est-à-dire un métrique complet.

**Définition 22.1.** — Soit  $\lambda \geq 0$  un nombre réel et soit  $\rho$  dans  $I$ . On définit une norme sur  $\mathcal{A}(I)\langle D \rangle$  en posant :

$$\left\| \sum a_i \frac{1}{i!} D^i \right\|_{\text{op}, \lambda, \rho} = \max |a_i|_\rho \rho^{-i(1+\lambda)}.$$

Ce sont les normes des polynômes différentiels de  $\mathcal{A}(I)\langle D \rangle$  vus comme opérateurs sur les espaces  $\mathcal{B}_{t_\rho}(\rho^{\lambda+1})$ .

**Remarque 22.2.** — On prendra garde de ne pas confondre la norme  $\|\cdot\|_{\text{op},\lambda,\rho}$ , qui est une norme d'opérateur et la norme  $\|\cdot\|_{\gamma,\rho}$  définie en 7.3 par

$$\left\| \sum a_i D^i \right\|_{\gamma,\rho} = \max |a_i|_\rho \rho^{-i\gamma}.$$

qui est une valeur absolue si  $\gamma \geq 1$ . On a évidemment  $\|\cdot\|_{\text{op},\lambda,\rho} \leq \|\cdot\|_{1+\lambda,\rho}$ . Alors que la norme  $\|\cdot\|_{\lambda,\rho}$  permet, via le lemme de Hensel 7.12, de scinder les modules différentiels ayant un petit rayon de convergence, la norme  $\|\cdot\|_{\text{op},\lambda,\rho}$  elle, va nous permettre de scinder les modules différentiels en fonction du rayon de convergence de leurs solutions et ceci quel que soit celui-ci.

**Définition 22.3.** — Pour  $\lambda \geq 0$ , on note  $\mathcal{T}_\lambda$  la topologie définie sur  $\mathcal{A}(I)\langle D \rangle$  par la famille de normes  $\|\cdot\|_{\text{op},\lambda,\rho}$  pour  $\rho$  dans  $I$ .

**Remarque 22.4.** — Dans le théorème 14.2, nous avons utilisé l'équivalence des normes sur un espace vectoriel de dimension finie. Si on travaille sur un espace métrique complet (Fréchet) ou sur une limite inductive de Fréchet on dispose du théorème des homomorphismes ([30], Chap. IV théorème 2) disant que toute application linéaire continue bijective a un inverse continu et qui peut jouer le même rôle.

Malheureusement, lorsque l'intervalle  $I$  est ouvert, l'espace  $\mathcal{A}(I)\langle D \rangle$ , muni de la topologie  $\mathcal{T}_\lambda$ , est un espace métrique séparé mais n'est ni complet ni même une limite inductive de Fréchet. Nous ne pourrions pas nous limiter à des méthodes d'analyse fonctionnelle et nous devons utiliser des méthodes spécifiques.

**Définition 22.5.** — Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}(I)\langle D \rangle$ -module différentiel. On le munit de la topologie quotient  $\mathcal{T}_{\lambda,Q}$  donnée par une présentation

$$\mathcal{A}(I)\langle D \rangle^\mu \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow 0.$$

Cette topologie est indépendante de la présentation choisie. Elle n'est pas séparée en général. Le point de départ de la démonstration du théorème de décomposition est d'étudier l'adhérence de 0 pour cette topologie ainsi que le séparé associé.

Le résultat suivant est fondamental. A cause des idéaux différentiels non triviaux dans le cas d'un intervalle ouvert (exemple 6.12), il ne peut pas être démontré par voie purement algébrique.

**Théorème 22.6.** — Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}(I)$ -module différentiel et soit  $\lambda \geq 0$ . L'adhérence  $\overline{O}_\lambda(\mathcal{M})$  de zéro dans  $\mathcal{M}$  pour la topologie  $\mathcal{T}_{\lambda,Q}$  est un  $\mathcal{A}(I)$ -module différentiel.

*Preuve.* — Soit  $J$  un intervalle fermé contenu dans  $I$ . On munit  $\mathcal{M}_J = \mathcal{A}(J) \otimes_{\mathcal{A}(I)} \mathcal{M}$  de la topologie quotient induite par la norme  $\max_{\rho \in J} \|\cdot\|_{\text{op},\lambda,\rho}$  sur  $\mathcal{A}(I)\langle D \rangle$  et on note  $\mathcal{N}_J$  l'adhérence de 0 dans cet espace. Par définition de la topologie quotient, on a

$$\overline{O}_\lambda(\mathcal{M}) = \bigcap_{J \text{ fermé de } I} \mathcal{N}_J.$$

Comme  $\mathcal{N}_J$  est un module différentiel sur l'anneau principal  $\mathcal{A}(J)$ , c'est un module libre de type fini. Comme le rang de  $\mathcal{N}_J$  est une fonction décroissante de  $J$ , pour  $J$  assez grand, disons pour  $J \supset J_0$ , le rang de  $\mathcal{N}_J$  est constant et, pour  $J_0 \subset J \subset J' \subset I$ , on a

$$\mathcal{N}_J = \mathcal{A}(J) \otimes_{\mathcal{A}(J')} \mathcal{N}_{J'}.$$

On constate donc que, pour  $J \supset J_0$ , les  $\mathcal{N}_J$  sont les sections locales d'un faisceau  $\tilde{\mathcal{N}}$  localement libre sur la couronne  $\mathcal{C}(I)$ . Comme  $\mathcal{C}(I)$  est une variété de Stein, les sections locales sont engendrées par les sections globales :

$$\tilde{\mathcal{N}}_J = \mathcal{A}(J) \otimes_{\mathcal{A}(I)} \Gamma(\mathcal{C}(I), \tilde{\mathcal{N}}).$$

On en déduit que

$$\overline{\mathcal{O}}_\lambda(\mathcal{M}) = \bigcap_{J \supset J_0} \mathcal{N}_J = \bigcap_{J \supset J_0} \tilde{\mathcal{N}}_J = \bigcap_{J \supset J_0} \mathcal{A}(J) \otimes_{\mathcal{A}(I)} \Gamma(\mathcal{C}(I), \tilde{\mathcal{N}}) = \Gamma(\mathcal{C}(I), \tilde{\mathcal{N}})$$

est un module libre de type fini. □

La catégorie  $\text{MLC}(\mathcal{A}(I))$  étant abélienne, on a aussi :

**Corollaire 22.7.** — *Sous les hypothèses du théorème, le séparé associé  $\mathcal{M}/\overline{\mathcal{O}}_\lambda(\mathcal{M})$  est un  $\mathcal{A}(I)$ -module différentiel.*

**Proposition 22.8.** — *Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}(I)$ -module différentiel et soit  $\lambda \geq 0$ . Si l'adhérence de 0 pour la topologie  $\mathcal{T}_{\lambda, Q}$  est  $\mathcal{M}$  tout entier, alors, pour tout  $\rho$  dans  $I$ , on a  $\text{Hom}_{\mathcal{A}(I)\langle D \rangle}(\mathcal{M}, \mathcal{A}_{t_\rho}(\rho^{\lambda+1})) = 0$ .*

*Preuve.* — La démonstration reprend des idées déjà utilisées dans le théorème 14.2-3).

On considère une présentation

$$0 \rightarrow \mathcal{A}(I)\langle D \rangle^\mu \xrightarrow{u} \mathcal{A}(I)\langle D \rangle^\mu \xrightarrow{v} \mathcal{M} \rightarrow 0.$$

Par hypothèse, tout élément  $m = v(P)$  de  $\mathcal{M}$  appartient à l'adhérence de 0. Il existe donc une suite  $Q_n$  dans  $\mathcal{A}(I)\langle D \rangle^\mu$  telle que  $u(Q_n)$  tende vers  $P$  pour la topologie  $\mathcal{T}_\lambda$  c'est-à-dire telle que, pour tout  $\rho$  dans  $I$ , la suite  $\|u(Q_n) - P\|_{\text{op}, \lambda, \rho}$  tende vers 0. Mais la norme  $\|\cdot\|_{\text{op}, \lambda, \rho}$  est la norme d'opérateur sur  $\mathcal{B}_{t_\rho}(\rho^{\lambda+1})$  ; si  $g$  est un élément de  $\text{Hom}_{\mathcal{A}(I)\langle D \rangle}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{t_\rho}(\rho^{\lambda+1}))$ , on a :

$$|g(m)|_\rho = |g \circ v(P)|_\rho = |g \circ v(P - u(Q_n))|_\rho \leq \|u(Q_n) - P\|_{\text{op}, \lambda, \rho} \max_{1 \leq i \leq \mu} |g \circ v(e_i)|_\rho$$

où  $\{e_i\}$  désigne la base canonique de  $\mathcal{A}(I)\langle D \rangle^\mu$ . En faisant tendre  $n$  vers l'infini, on trouve  $g(m) = 0$  c'est-à-dire  $g = 0$ . Pour terminer, on utilise un résultat de Dwork [20] disant que  $\text{Hom}_{\mathcal{A}(I)\langle D \rangle}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{t_\rho}(\rho^{\lambda+1})) = 0$  entraîne  $\text{Hom}_{\mathcal{A}(I)\langle D \rangle}(\mathcal{M}, \mathcal{A}_{t_\rho}(\rho^{\lambda+1})) = 0$ . □

**22.2. Enoncé du théorème.** — Le but de ce paragraphe est de donner la démonstration du théorème fondamental sur les modules différentiels solubles. Celle-ci va nécessiter d'établir deux résultats importants (le théorème 22.6 et la proposition 22.8) et repose de manière essentielle sur des majorations et minorations “ explicites ” (théorème 22.9) qui sont des résultats fins de la théorie.

**Théorème 22.9.** — *Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{R}$ -module différentiel soluble. Si  $\text{pt}(\mathcal{M}) > \lambda \geq 0$ , pour  $\varepsilon > 0$  assez petit, la topologie  $\mathcal{T}_{\lambda, Q}$  sur  $\mathcal{M}_\varepsilon$  n'est pas séparée.*

*Preuve.* — La démonstration est faite en plusieurs étapes.

**22.3. Notations générales.** — Par hypothèse,  $\mathcal{M}_\varepsilon$  est un  $\mathcal{A}_{I_\varepsilon}$ -module différentiel libre de rang  $\mu$  tel que  $\text{Ray}(\mathcal{M}_\varepsilon, \rho) = \rho^{\beta+1}$  pour  $\rho$  dans  $I_\varepsilon$ , c'est-à-dire pour  $1 - \varepsilon < \rho < 1$ .

Soit  $\rho$  un nombre de  $I_\varepsilon$  qui va être fixé dans un premier temps.

On définit un entier  $h$  par :

$$(69) \quad \omega^p \rho^{p^h} < \rho^{(\beta+1)p^h} = \text{Ray}(\mathcal{M}_\varepsilon, \rho)^{p^h} \leq \omega \rho^{p^h}.$$

Si on pose :

$$(70) \quad d(\rho) = -(p-1)\beta \frac{\log(\rho)}{\log(p)}$$

On trouve

$$\frac{1}{d(\rho)} \leq p^h < \frac{p}{d(\rho)} \quad h = \left[ -\frac{\log(d(\rho))}{\log(p)} \right] \sim \frac{\log(1-\rho)}{\log(p)}$$

Le théorème 20.15 montre qu'il existe un  $E_{\rho^{p^h}}$ -module différentiel  $\mathcal{N}$  tel que  $\varphi^h(\mathcal{N}) \simeq E_\rho \otimes \mathcal{M}_\varepsilon$ . On considère une base  $\mathcal{G}$  de  $\mathcal{M}_\varepsilon$  et on construit une base “pseudo-cyclique” de  $\mathcal{N}$ , c'est-à-dire vérifiant les hypothèses du corollaire 8.7. On note  $B$  (resp.  $G, F$ ) la matrice qui représente la dérivation dans la base :  $\mathcal{B}$  (resp.  $\mathcal{G}, \varphi^h(\mathcal{B})$ ) et  $H$  la matrice (inversible) qui représente le changement de base de la base  $\mathcal{G}$  à la base  $\varphi^h(\mathcal{B})$ . On trouve :

$$(71) \quad \begin{aligned} \|H\|_\rho \|H^{-1}\|_\rho &\leq c(\mu)^{-h} |(\mu-1)!|^{-h-1} p^{(\mu-1)(h+2)} \max(1, \|G\|_\rho)^{(1-\mu)} \\ &\leq p^{c_1 h + c_2} \end{aligned}$$

où  $c(\mu)$  est n'importe quelle constante strictement inférieure à  $|\prod_{j=1}^{\mu-1} \binom{\mu}{j}|$  et où  $c_1 > 0$  et  $c_2$  sont des constantes ne dépendant que de  $\mu$  et de la base  $\mathcal{G}$ .

**22.4. De la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\varphi^h(\mathcal{B})$ .** — Commençons par un lemme technique

**Lemme 22.10.** — *Les entiers  $\alpha_{k,s}$  définis par :*

$$\left( (x+1)^{p^h} - 1 \right)^s = \sum_{k=s}^{sp^h} \alpha_{k,s} x^k$$

*vérifient, pour tout entier  $\delta$  tel que  $0 \leq \delta \leq h-1$  :*

$$(72) \quad |\alpha_{k,s}| \leq \omega^{sp + \delta(p-1)s - kp^{\delta+1-h}}$$

avec égalité si  $k = sp^{h-\delta-1}$  ou si  $k = sp^{h-\delta}$ . En particulier  $|\alpha_{sp^h,s}| = 1$  et  $|\alpha_{p^{h-\delta},1}| = |p|^\delta$ .

*Preuve.* — Des égalités :

$$(x+1)^{p^h} - 1 = \sum_{k=1}^{p^h} \binom{p^h}{k} x^k \quad \left| \binom{p^h}{k} \right| \leq |p|^\nu \text{ pour } k < p^{h-\nu+1}$$

il résulte que, pour :

$$|x| = \omega^{p^{\delta+1-h}}$$

on a :

$$\left| \sum_{k=s}^{sp^h} \alpha_{k,s} x^k \right| \leq \left( |p|^\delta |x|^{p^{h-\delta}} \right)^s = \omega^{s(p+\delta(p-1))}$$

la majoration (2) s'en déduit immédiatement. Les cas particuliers se vérifient facilement. Ils peuvent aussi très facilement s'obtenir directement.  $\square$

Notons  $B_s$  (resp.  $F_s$ ) la matrice qui représente l'opérateur  $\frac{1}{s!} D^s$  dans la base  $\mathcal{B}$  (resp.  $\varphi^h(\mathcal{B})$ ). Nous attirons l'attention du lecteur sur ce changement de notation : ici le facteur  $\frac{1}{s!}$  est contenu dans la matrice  $B_s$  contrairement à ce que nous avons fait jusqu'ici.

**Proposition 22.11.** — On a, pour  $r^{p^h} < \rho < 1$  :

$$(73) \quad \begin{cases} \rho^s \|B_s\|_\rho \leq \omega \rho^{-\beta s} & \text{pour } s \geq 1 \\ \rho^{p^\ell} \|B_{p^\ell}\|_\rho = \omega \rho^{-\beta p^\ell} & \text{pour } \ell \geq 0 \end{cases}$$

*Preuve.* — Comme  $\mathcal{B}$  est une base pseudo-cyclique et comme :

$$\text{Ray}(\mathcal{N}, \rho^{p^h}) = \text{Ray}(\mathcal{M}, \rho)^{p^h} = \rho^{(\beta+1)p^h}$$

on a, d'après le théorème 8.6 :

$$\|B_s\|_\rho = \|B\|^s(\rho) = \left| \frac{1}{s!} \right| \left( \frac{1}{\omega} \text{Ray}(\mathcal{N}, \rho) \right)^{-s} = \omega^s \left| \frac{1}{s!} \right| \rho^{-(\beta+1)s}$$

Pour démontrer la Proposition, il suffit alors de remarquer que :

$$\omega^s \leq \omega |s!| \quad \text{pour } s \geq 1$$

avec égalité pour  $s = p^\ell$ .  $\square$

**Proposition 22.12.** — Pour  $\rho$  dans  $I_\varepsilon$ , on a :

$$(74) \quad \begin{cases} \rho^k \|F_k\|_\rho \leq \omega \rho^{-\beta k} & \text{pour } k \geq 1, \\ \rho^{p^\ell} \|F_{p^\ell}\|_\rho \geq \omega |p|^\ell \rho^{-\beta p^\ell} & \text{pour } \ell \geq 1 \end{cases}$$

*Preuve.* — La solution de l'équation différentielle :

$$X' = B X \quad X(t_\rho^{p^s}) = I$$

au voisinage du point générique  $t_\rho^{p^h}$  (avec  $|t_\rho^{p^h}| = \rho^{p^h}$ ) est :

$$X(x) = \sum_{s=0}^{\infty} B_s(t_\rho^{p^h}) (x - t_\rho^{p^h})^s$$

Par définition de la base  $\varphi^h(\mathcal{B})$ , la solution de l'équation différentielle :

$$Y' = F Y \quad Y(t_\rho) = I$$

au voisinage du point générique  $t_\rho$  ( $|t_\rho| = \rho$ ) est, :

$$\begin{aligned} Y(x) &= \sum_{s=0}^{\infty} F_s(t_\rho) (x - t_\rho)^s \\ &= X(x^{p^h}) = \sum_{s=0}^{\infty} B_s(t_\rho^{p^h}) (x^{p^h} - t_\rho^{p^h})^s \end{aligned}$$

Remarquant que :

$$(x^{p^h} - t_\rho^{p^h})^s = \sum_{k=s}^{sp^h} t_\rho^{p^h s} \alpha_{k,s} \left( \frac{x - t_\rho}{t_\rho} \right)^k$$

on trouve donc :

$$F_k(t_\rho) = \sum_{p^{-h}k \leq s \leq k} B_s(t_\rho^{p^h}) t_\rho^{p^h s - k} \alpha_{k,s}$$

c'est-à-dire, d'après les majorations (72) et (73) :

$$\begin{aligned} (75) \quad \rho^k \|F_k\|_\rho &\leq \max_{p^{-h}k \leq s \leq k} \rho^{p^h s} \|B_s\|_{\rho^{p^h}} |\alpha_{k,s}| \\ &\leq \min_{0 \leq \delta < h} \max_{p^{-h}k \leq s \leq k} \omega \rho^{-\beta s p^h} \omega^{sp + \delta(p-1)s - kp^{\delta+1-h}} \end{aligned}$$

En utilisant la majoration (69), on trouve :

$$\rho^{-\beta p^h} \omega^{p + \delta(p-1)} < \omega^{-p + p + \delta(p-1)} \leq 1$$

Les termes apparaissant dans la majoration (75) sont donc, pour chaque valeur de  $\delta$ , strictement décroissants en fonction de  $s$ . On en déduit que le maximum est atteint pour la plus petite valeur de  $s$  possible, c'est-à-dire pour le plus petit entier supérieur à  $p^{-h}k$ . En particulier, on a, en prenant  $\delta = 0$  :

$$\rho^k \|F_k\|_\rho \leq \omega \rho^{-\beta k} \omega^{p^{-h}kp - kp^{1-h}} = \omega \rho^{-\beta k}$$

Pour obtenir la minoration, nous distinguons deux cas.

*22.4.1. Cas où  $\ell > h$ .* — On prend  $\delta = 0$ . Le plus grand terme dans la majoration (75) est obtenu pour  $s = p^{\ell-h}$ . Les cas d'égalité dans le lemme 22.10 et la proposition 22.11 montrent que l'on a :

$$\rho^{p^\ell} \|F_{p^\ell}\|_\rho = \rho^{p^\ell} \|B_{p^{\ell-h}}\|_{\rho^{p^h}} |\alpha_{p^\ell, p^{\ell-h}}| = \omega \rho^{-\beta p^\ell}$$

22.4.2. *Cas où  $1 \leq \ell \leq h$ .* — On prend  $\delta = h - \ell$ . Comme  $0 < p^{\ell-h} \leq 1$ , le plus grand terme dans la majoration (75) est obtenu pour  $s = 1$ . On trouve donc :

$$\rho^{p^\ell} \|F_{p^\ell}\|_\rho = \rho^{p^h} \|B_1\|_{\rho^{p^h}} |\alpha_{p^\ell,1}| = \omega \rho^{-\beta p^h} |p|^\delta$$

La minoration (ref??) découle de ce que  $\beta(p^\ell - p^h) \leq 0$ ,  $\rho < 1$  et  $|p|^\delta \geq |p|^h$ .  $\square$

## 22.5. De la base $\varphi^h(\mathcal{B})$ à la base $\mathcal{G}$ . —

**Proposition 22.13.** — *Il existe une fonction logarithmiquement concave  $c(\rho)$  et une fonction  $M(\rho)$  définies sur l'intervalle  $I_\varepsilon$  telles que l'on ait, pour  $\rho$  dans  $I_\varepsilon$  :*

$$\begin{cases} \rho^s \|G_s\|_\rho \leq M(\rho) \rho^{-\beta s} & \text{pour } s \geq 0 \\ \max_{0 \leq s \leq p^\ell} \rho^s \|G_s\|_\rho \geq c(\rho) \rho^{\beta p^\ell} & \text{pour } \ell \geq 1 \end{cases}$$

*Preuve.* — La formule de Leibniz s'écrit :

$$G_s = \sum_{k=0}^s \frac{1}{k!} H^{(k)} F_{s-k} H^{-1} \quad F_s = \sum_{k=0}^s \frac{1}{k!} (H^{-1})^{(k)} G_{s-k} H$$

et donne les majorations :

$$\|G_s\|_\rho \leq \|H\|_\rho \|H^{-1}\|_\rho \max_{0 \leq k \leq s} \rho^k \|F_{s-k}\|_\rho$$

$$\|F_s\|_\rho \leq \|H\|_\rho \|H^{-1}\|_\rho \max_{0 \leq k \leq s} \rho^{-k} \|G_{s-k}\|_\rho$$

Comme on a  $\beta > 1$  et  $\rho < 1$  et compte tenu des majorations (71) et (74), la première de ces majorations s'écrit :

$$\rho^s \|G_s\|_\rho \leq p^{c_1 h + c_2} \max_{0 \leq k \leq s} \rho^{-\beta(s-k)} \leq \left( \frac{p}{d(\rho)} \right)^{c_1} p^{c_2} \rho^{-\beta s}$$

qui est bien de la forme annoncée.

La deuxième majoration s'écrit aussi :

$$\max_{0 \leq k \leq p^\ell} \rho^k \|G_k\|_\rho \geq p^{-c_1 h - c_2} \omega |p|^h \rho^{-\beta p^\ell} \geq \omega \left( \frac{d(\rho)}{p} \right)^{1+c_1} p^{-c_2} \rho^{-\beta p^\ell}$$

On vérifie que la fonction :

$$c(\rho) = \omega \left( \frac{d(\rho)}{p} \right)^{1+c_1} p^{-c_2} = c_3 (-\log(\rho))^{1+c_1} \quad (c_3 > 0, 1 + c_1 > 0)$$

est bien logarithmiquement concave sur  $]0, 1[$  car  $1 + c_1 > 0$ .  $\square$

**22.6. Minoration uniforme.** — La proposition 22.13 ne permet de minorer que le plus grand des termes  $\|G_s\|_\rho$ . Il n'y a aucune raison pour que l'indice  $s$  correspondant soit le même pour tous les nombres  $\rho$  de l'intervalle  $I_\varepsilon$ . Des arguments de convexité vont nous permettre de contourner cette difficulté.

**Lemme 22.14.** — *Soit  $c(\rho)$  une fonction logarithmiquement concave sur l'intervalle ouvert  $I$  et soient  $A$  et  $B$  deux matrices  $\mu \times \mu$  à coefficients dans  $\mathcal{A}(I)$  telles que, pour tout nombre  $\rho$  de l'intervalle  $I$ , on ait  $\max(\|A\|_\rho, \|B\|_\rho) \geq c(\rho)$ . Alors il existe des nombres  $\lambda$  et  $\mu$  prenant les valeurs 0 ou 1, tels que, pour tout nombre  $\rho$  de l'intervalle  $I$  on ait  $\|\lambda A + \mu B\|_\rho \geq c(\rho)$ .*

*Preuve.* — Si l'une des deux fonctions (logarithmiquement convexe)  $\|A\|_\rho/c(\rho)$  ou  $\|B\|_\rho/c(\rho)$  est supérieure à 1 sur tout l'intervalle  $I$ , le résultat est évident.

Sinon, quitte à échanger les rôles de  $A$  et  $B$ , il existe des nombres  $r_3 < r_4 \leq r_5 < r_6$  de l'intervalle  $I$  tels que :

- $\|A\|_\rho/c(\rho) < 1$  si et seulement si  $\rho \in ]r_3, r_4[$
- $\|B\|_\rho/c(\rho) < 1$  si et seulement si  $\rho \in ]r_5, r_6[$ .

On a alors :

$$d\log^+ \left( \|A\|_{r_4}/c(r_4) \right) \geq d\log^- \left( \|A\|_{r_4}/c(r_4) \right) > 0$$

$$d\log^- \left( \|B\|_{r_5}/c(r_5) \right) \leq d\log^+ \left( \|B\|_{r_5}/c(r_5) \right) < 0$$

En particulier, la fonction  $\|A\|_\rho/c(\rho)$  est logarithmiquement strictement croissante sur l'intervalle  $I \cap ]r_4, \infty[$  et la fonction  $\|B\|_\rho/c(\rho)$  logarithmiquement strictement décroissante sur l'intervalle  $I \cap ]-\infty, r_5[$ . Comme, de plus, on a :

$$\|A\|_{r_4}/c(r_4) = \|B\|_{r_5}/c(r_5) = 1$$

la fonction  $\|A\|_\rho/\|B\|_\rho$  est logarithmiquement strictement croissante sur l'intervalle  $[r_4, r_5]$  et passe d'une valeur inférieure à 1 à une valeur supérieure à 1. Elle prend donc la valeur 1 en un unique point  $r_7$  de cet intervalle. Compte tenu de la définition des points  $r_i$ , on en déduit que :

$$\|A\|_\rho < \|B\|_\rho \quad \text{pour } \rho \in [r_3, r_7[$$

$$\|A\|_\rho > \|B\|_\rho \quad \text{pour } \rho \in ]r_7, r_6]$$

Comme la fonction  $\|A + B\|_\rho$  est continue, on trouve :

$$\|A + B\|_\rho = \max \left( \|A\|_\rho, \|B\|_\rho \right) \geq c(\rho) \quad \text{pour } \rho \in [r_3, r_6]$$

Maintenant, on constate que la fonction  $\|A + B\|_\rho/c(\rho)$  est logarithmiquement strictement décroissante sur l'intervalle  $[r_3, r_7[$  donc, par logarithme convexité, sur l'intervalle  $I \cap ]-\infty, r_7[$ . On démontre de même qu'elle est strictement croissante sur l'intervalle  $I \cap ]r_7, \infty[$ . Autrement dit, on a montré que

$$\|A + B\|_\rho \geq c(\rho) \quad \text{pour } \rho \in I \quad \square$$

**Proposition 22.15.** — Soit  $c(\rho)$  une fonction logarithmiquement concave sur l'intervalle  $I$  et soient  $\{A_i\}_{1 \leq i \leq n}$  une famille finie de matrices  $\mu \times \mu$  à coefficients dans  $\mathcal{A}(I)$  telles que, pour tout nombre  $\rho$  de l'intervalle  $I$ , on ait  $\max_{1 \leq i \leq n} (\|A_i\|_\rho) \geq c(\rho)$ . Alors il existe des nombres  $\lambda_i$  prenant les valeurs 0 ou 1, tels que, pour tout nombre  $\rho$  de l'intervalle  $I$  on ait  $\|\sum_{i=1}^n \lambda_i A_i\|_\rho \geq c(\rho)$ .

*Preuve.* — On fait une récurrence sur le nombre  $n$  d'éléments de la famille.

Pour  $n = 1$ , le résultat est évident.

Supposons le résultat démontré pour les familles contenant  $n - 1$  matrices. La fonction  $\|A_n\|_\rho / c(\rho)$  est logarithmiquement convexe sur l'intervalle  $I$ . L'ensemble des nombres  $\rho$  où elle est strictement inférieure à 1 est donc un intervalle ouvert  $]r_3, r_4[$ , éventuellement vide, contenu dans  $I$ . On a donc, pour  $r_3 < \rho < r_4$  :

$$\max_{1 \leq i \leq n-1} (\|A_i\|_\rho) \geq c(\rho)$$

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe des nombres  $\lambda_i$  prenant les valeurs 0 ou 1, tels que, pour tout nombre  $\rho$  de l'intervalle  $]r_3, r_4[$  on ait :

$$\left\| \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i A_i \right\|_\rho \geq c(\rho)$$

Posons  $B = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i A_i$ . On a  $\|B\|_\rho \geq c(\rho)$  si  $\rho \in ]r_3, r_4[$  et, par construction de  $]r_3, r_4[$ ,  $\|A_n\|_\rho \geq c(\rho)$  pour  $\rho \in I \setminus ]r_3, r_4[$ . Donc  $\max(\|B\|_\rho, \|A_n\|_\rho) \geq c(\rho)$  pour tout nombre  $\rho$  de  $I$ . Le lemme 22.14 permet de conclure.  $\square$

**Proposition 22.16.** — Soit  $\mathcal{M}_\varepsilon$  un  $\mathcal{A}(I_\varepsilon)$ -module différentiel de rang  $\mu$  tel que  $\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho) = \rho^{(\beta+1)}$  pour  $\rho$  dans  $I_\varepsilon$  et soit  $\mathcal{G}$  une base de  $\mathcal{M}_\varepsilon$ . Il existe des nombres  $(\lambda_{s,\ell})_{0 \leq s \leq p^\ell}$  prenant les valeurs 0 ou 1 tels que, si on pose :

$$L_\ell = \sum_{s=0}^{p^\ell} \lambda_{s,\ell} x^s \frac{1}{s!} D^s$$

On ait, pour  $\rho$  dans  $I_\varepsilon$

$$c(\rho) \rho^{\beta p^\ell} \leq \|L_\ell\|_{\rho, \mathcal{G}} \leq M(\rho) \rho^{\beta p^\ell}$$

*Preuve.* — D'après la proposition 22.13, on a, pour  $0 \leq s \leq p^\ell$ , d'une part :

$$\left\| x^s \frac{1}{s!} D^s \right\|_{\rho, \mathcal{G}} \leq M(\rho) \rho^{\beta s} \leq M(\rho) \rho^{-\beta p^\ell}$$

ce qui, compte tenu de  $|\lambda_{s,\ell}| \leq 1$ , donne la majoration du théorème, et, d'autre part

$$\max_{0 \leq s \leq p^\ell} \left\| x^s \frac{1}{s!} D^s \right\|_{\rho, \mathcal{G}} \geq c(\rho) \rho^{-\beta p^\ell}$$

Si on remarque que la fonction  $c(\rho) \rho^{-\beta p^\ell}$  est logarithmiquement concave, il suffit d'appliquer le Théorème 22.15 pour pouvoir conclure.  $\square$

On pose alors  $L_h = \sum_{s=0}^{p^h} \alpha_{h,s} x^{s+[\beta p^h]} \frac{1}{s!} D^s$  où  $[\alpha]$  désigne la partie entière de  $\alpha$ .

Comme  $\rho < 1$ , on a  $\|L_h\|_{\text{op},\lambda,\rho} \leq \max_{0 \leq s \leq p^h} \rho^{s+[\beta p^h]} \rho^{-s(\lambda+1)} \leq \rho^{(\beta-\lambda)p^h-1}$ . Comme  $\beta > \lambda$ , la suite  $L_h$  tend vers 0 dans  $\mathcal{D}(I_\varepsilon)$  pour la topologie localement convexe des normes  $\|\cdot\|_{\text{op},\lambda,\rho}$  ( $\rho \in I$ ). La minoration (ref??) montre que l'image dans  $\mathcal{M}$  de la suite  $L_h$  ne tend pas vers 0 pour la topologie quotient (la majoration (ref??) montre qu'elle est bornée).

Un argument de compacité, ou plutôt de c-compacité si le corps  $K$  est sphériquement complet mais pas localement compact, permet d'extraire (resp. de c-extraire) de l'image de la suite  $L_h$  dans  $\mathcal{M}_\varepsilon$  une suite qui converge vers un élément non nul. Cet élément appartient par construction à l'adhérence de 0.  $\square$

### 23. Pentas d'un module différentiel

#### 23.1. Le théorème de décomposition. —

**Définition 23.1.** — Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{R}$ -module différentiel soluble et soit  $\lambda \geq 0$ .

1) On dit que  $\mathcal{M}$  a des *pentas supérieures*<sup>(16)</sup> à  $\lambda$  s'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que, pour  $\rho$  dans  $I_\varepsilon$ , on a  $\text{Hom}_{\mathcal{D}(I_\varepsilon)}(\mathcal{M}_\varepsilon, \mathcal{A}_\rho(\rho^{\lambda+1})) = 0$ .

2) Si  $\mathcal{M}$  est non nul, on dit qu'il est *purement de pente*  $\beta$  si  $\text{pt}(\mathcal{M}) = \beta$  et si  $\mathcal{M}$  a des pentas supérieures à  $\lambda$  pour tout  $\lambda < \beta$ .

**Théorème 23.2 (de décomposition).** — Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{R}$ -module différentiel soluble non nul et soit  $\lambda \geq 0$  un réel. Il existe un (unique) sous-module différentiel  $\mathcal{M}_{>\lambda}$  de  $\mathcal{M}$  qui a des pentas supérieures à  $\lambda$  et tel que  $\text{pt}(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{>\lambda}) \leq \lambda$ .

Si, de plus,  $0 \leq \lambda < \text{pt}(\mathcal{M})$ , alors  $\mathcal{M}_{>\lambda}$  est non nul.

*Preuve.* — Posons  $\beta = \text{pt}(\mathcal{M})$ . On prend  $\alpha$  suffisamment proche de 1 pour que  $\text{Ray}(\mathcal{M}_\alpha, \rho) = \rho^{\beta+1}$  pour  $\rho$  dans  $I_\alpha$ .

Pour  $\lambda \geq \text{pt}(\mathcal{M})$ , on prend  $\mathcal{M}_{>\lambda} = 0$ .

Supposons donc  $\text{pt}(\mathcal{M}) > \lambda$  et notons  $\mathcal{N}_\varepsilon$  l'adhérence de zéro dans  $\mathcal{M}_\varepsilon$  pour la topologie  $\mathcal{T}_{\lambda,Q}$ . Le théorème 22.9 dit que  $\mathcal{N}_\varepsilon \neq 0$  pour  $\varepsilon$  assez petit. Maintenant, pour  $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ , l'injection  $\mathcal{M}_\varepsilon \hookrightarrow \mathcal{M}_{\varepsilon'}$  est continue donc  $\mathcal{N}_\varepsilon \hookrightarrow \mathcal{N}_{\varepsilon'}$ . D'après le théorème 22.6, il en résulte que les  $\mathcal{R} \otimes_{\mathcal{A}(I_\varepsilon)} \mathcal{N}_\varepsilon$  forment une suite croissante de sous- $\mathcal{R}$ -modules différentiels de  $\mathcal{M}$ . Cette suite est nécessairement stationnaire. On note  $\mathcal{M}_{>\lambda,0}$  sa limite ; c'est un  $\mathcal{R}$ -module différentiel (comme sous-module différentiel de  $\mathcal{M}$ ) non nul d'après le théorème 22.9. La catégorie  $\text{MLCS}(\mathcal{R})$  étant abélienne,  $\mathcal{M}/\mathcal{M}_{>\lambda,0}$  est aussi un objet de  $\text{MLCS}(\mathcal{R})$ .

La topologie sur  $\mathcal{M}/\mathcal{M}_{>\lambda,0}$  est quotient de celle de  $\mathcal{M}$  (une présentation de  $\mathcal{M}$  fournit une présentation de  $\mathcal{M}/\mathcal{M}_{>\lambda,0}$ ). Par construction,  $\mathcal{M}/\mathcal{M}_{>\lambda,0}$  est donc séparé, et, d'après le théorème 22.9,  $\text{pt}(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{>\lambda,0}) \leq \lambda$ . Comme  $\text{pt}(\mathcal{M}) > \lambda$ , on a  $\text{pt}(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{>\lambda,0}) = \text{pt}(\mathcal{M}) > \lambda$ .

<sup>(16)</sup>Plus la pente est grande plus les rayons de convergence de  $\mathcal{M}$  sont petits.

Par contre, il n'y a aucune raison pour que la topologie sur  $\mathcal{M}_{>\lambda,0}$  soit la topologie induite par celle de  $\mathcal{M}$ . On itère donc le procédé en construisant, à partir des adhérences de zéro, un sous-module différentiel  $\mathcal{M}_{>\lambda,i+1}$  de  $\mathcal{M}_{>\lambda,i}$  tel que  $\text{pt}(\mathcal{M}_{>\lambda,i}/\mathcal{M}_{>\lambda,i+1}) \leq \lambda$  et  $\text{pt}(\mathcal{M}_{>\lambda,i+1}) = \text{pt}(\mathcal{M}_{>\lambda,i}) = \text{pt}(\mathcal{M}) > \lambda$ .

La suite des  $\mathcal{M}_{>\lambda,i}$  étant décroissante et  $\mathcal{M}_{>\lambda,i}$  ne pouvant être nul d'après le théorème 22.9, le processus s'arrête lorsque  $\mathcal{M}_{>\lambda,\nu+1} = \mathcal{M}_{>\lambda,\nu}$  ce qui signifie, d'après la proposition 22.8, que toutes les pentes de  $\mathcal{M}_{>\lambda,\nu}$  sont supérieures à  $\lambda$ . Le module  $\mathcal{M}_{>\lambda} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{M}_{>\lambda,\nu}$  a toutes les propriétés demandées.  $\square$

**Exemple 23.3.** — Reprenons l'exemple 9.5. L'opérateur  $L$  a un point singulier régulier à l'infini et un point singulier irrégulier en zéro. En utilisant le théorème de transfert [12], on montre que le module différentiel  $\mathcal{M} = \mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot L$  est de pente strictement positive (sinon les solutions à l'infini convergeraient plus loin qu'elles ne le font). Par ailleurs, la solution  $f$  fournit une solution dans  $\mathcal{A}_{t_\rho}(\rho)$  pour  $\rho$  assez proche de 1. Donc,  $\mathcal{M}_{>\lambda}$  et  $\mathcal{M}^{\leq \lambda}$  sont tous deux non nuls donc de rang un. Il résulte alors du théorème de décomposition, mais on peut le vérifier directement, que l'adhérence de l'idéal  $(L)$  de  $\mathcal{D}(I_\varepsilon)$  pour la topologie  $\mathcal{T}_0$  est égale à l'idéal  $(L, fD - f')$ .

**Définition 23.4.** — Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{R}$ -module différentiel de pente nulle. Les  $\mathcal{A}(I_\varepsilon)$ -modules différentiels  $\mathcal{M}_\varepsilon$  sont de Robba, par définition, et ont tous le même exposant (voir le paragraphe 17.3). Celui-ci est appelé exposant de  $\mathcal{M}$ .

Le théorème 17.7 donne le résultat suivant.

**Corollaire 23.5 (théorème de la monodromie  $p$ -adique)**

Tout  $\mathcal{R}$ -module différentiel de pente nulle dont l'exposant  $\Delta$  a des différences non Liouville s'obtient par des extensions successives à partir des modules différentiels (de rang un)  $x^{\Delta_i} \mathcal{R}$  ( $1 \leq i \leq \mu$ ).

**Définition 23.6.** — Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{R}$ -module différentiel. On appelle exposant de  $\mathcal{M}$ , et on note  $\mathfrak{Exp}(\mathcal{M})$ , l'exposant du  $\mathcal{R}$ -module différentiel de pente nulle  $\mathcal{M}^{\leq 0}$ .

**Proposition 23.7.** — Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{R}$ -module différentiel de pente nulle ayant une structure de Frobenius forte (c'est-à-dire tel que  $\varphi^{*h}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$  pour un  $h \geq 1$ ). Alors l'exposant de  $\mathcal{M}$  est rationnel (c'est un  $\mu$ -uplet de nombres de  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  à permutation près).

*Preuve.* — Si  $\Delta$  est un représentant de l'exposant de  $\mathcal{M}$ , il existe une puissance  $q$  de  $p$  telle que  $\Delta \stackrel{\varepsilon}{\sim} q\Delta$  (proposition 17.13). Autrement dit, pour tout entier  $h$ , il existe une permutation  $\sigma_h$  telle que  $\|\Delta^{(h)} - q\sigma_h(\Delta^{(h)})\|_\infty = O(h)$ . Maintenant, comme l'ordre de  $\sigma_h$  divise  $\mu!$ , on trouve  $\|\Delta^{(h)} - q^{\mu!}\Delta^{(h)}\|_\infty = O(h)$  et on en déduit que  $\Delta - q^{\mu!}\Delta$  appartient à  $\mathbb{Z}^\mu$ .  $\square$

**Corollaire 23.8.** — Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{R}$ -module différentiel tel que toutes les pentes du module différentiel dual  $\mathcal{M}^* = \text{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}, \mathcal{R})$  sont supérieures à 0. Etant donné une base  $\mathfrak{e}$  de  $\mathcal{M}$  et un nombre  $\varepsilon$  suffisamment petit, il existe, pour tout intervalle fermé  $J$  contenu dans  $I_\varepsilon$ , un nombre réel  $M_J$  tel que, pour tout  $m$  dans  $\mathcal{M}$ , on ait  $\|m\|_{\mathfrak{e},\rho} \leq M_J \|D(m)\|_{\mathfrak{e},\rho}$ .

*Preuve.* — Si la dérivation est représentée dans la base  $\mathfrak{e}$  de  $\mathcal{M}$  par la matrice  $G$ , elle est représentée dans la base duale  $\mathfrak{e}^*$  de  $\mathcal{M}^*$  par la matrice  $-{}^tG$ . Comme toutes les pentes de  $\mathcal{M}^*$  sont supérieures à 0, on a  $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}_{>0}^*$  et 0 est dense dans  $\mathcal{M}^*$  pour la topologie quotient associée à la pente 0. Ceci signifie que, pour tout  $\varepsilon$  suffisamment petit, tout intervalle fermé  $J$  contenu dans  $I_\varepsilon$  et tout  $\eta > 0$ , il existe une matrice  $Q_{J,\eta}$  de  $\text{Mat}(\mu, \mathcal{D}(I_\varepsilon))$  telle que, pour tout  $\rho$  de  $J$ ,

$$\|Q_{J,\eta} (D \mathbf{I} - ({}^tG)) - \mathbf{I}\|_{0,\rho} < \eta.$$

Soit maintenant  $m$  un élément de  $\mathcal{M}_\varepsilon$  et notons  $[m]$  le vecteur colonne de ses composantes dans la base  $\mathfrak{e}$ . Par définition de la norme  $\|\cdot\|_{0,\rho}$ , on a pour  $\rho$  dans  $J$

$$\|Q_{J,1} (D([m]) + {}^tG[m]) - [m]\|_\rho < \|[m]\|_\rho$$

c'est-à-dire, en posant  $M_J = \max_{\rho \in J} \|Q_{J,1}\|_{0,\rho}$  et en utilisant la formule (18),

$$\|m\|_{\mathfrak{e},\rho} = \|[m]\|_\rho = \|Q_{J,1} [D(m)]\|_\rho \leq M_J \|[D(m)]\|_\rho = M_J \|D(m)\|_{\mathfrak{e},\rho}. \quad \square$$

**23.2. Functorialité.** — Pour simplifier les notations, étant donné un objet  $\mathcal{M}$  de  $\text{MLC}(\mathcal{R})$ , on pose, pour  $\varepsilon$  suffisamment petit et  $\rho$  dans  $I_\varepsilon$  :

$$\mathcal{S}_\lambda(\mathcal{M}, \rho) = \text{Hom}_{\mathcal{D}(I_\varepsilon)}(\mathcal{M}_\varepsilon, \mathcal{A}_\rho(\rho^{\lambda+1}))$$

Autrement dit, d'une part,  $\mathcal{M}$  a toutes ses pentes supérieures à  $\lambda$  si et seulement si  $\mathcal{S}_\lambda(\mathcal{M}, \rho) = 0$  pour  $\rho$  suffisamment proche de 1 et, d'autre part,  $\text{pt}(\mathcal{M}) \leq \lambda$  si et seulement si  $\dim_K(\mathcal{S}_\lambda(\mathcal{M}, \rho)) = \dim_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})$  pour  $\rho$  suffisamment proche de 1.

**Lemme 23.9.** — Soit  $0 \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow 0$  une suite exacte de  $\text{MLCS}(\mathcal{R})$  et soit  $\lambda \geq 0$  un réel.

1) On a  $\text{pt}(\mathcal{M}) = \max(\text{pt}(\mathcal{N}), \text{pt}(\mathcal{Q}))$ .

2) Si toutes les pentes de  $\mathcal{M}$  sont supérieures à  $\lambda$ , il en est de même des pentes de  $\mathcal{N}$  et des pentes de  $\mathcal{Q}$ .

3) Si toutes les pentes de  $\mathcal{N}$  sont supérieures à  $\lambda$ , alors  $\mathcal{N}$  est contenu dans  $\mathcal{M}_{>\lambda}$ .

*Preuve.* — 1) C'est une conséquence immédiate de la proposition 8.5.

2) Supposons  $\varepsilon$  suffisamment petit et  $\rho$  dans  $I_\varepsilon$ . On a d'après le corollaire 15.8 :

$$(76) \quad 0 \rightarrow \mathcal{S}_\lambda(\mathcal{Q}, \rho) \rightarrow \mathcal{S}_\lambda(\mathcal{M}, \rho) \rightarrow \mathcal{S}_\lambda(\mathcal{N}, \rho) \rightarrow 0$$

Comme, par hypothèse,  $\mathcal{S}_\lambda(\mathcal{M}, \rho) = 0$ , on trouve  $\mathcal{S}_\lambda(\mathcal{N}, \rho) = \mathcal{S}_\lambda(\mathcal{Q}, \rho) = 0$ .

3) Par hypothèse, pour  $\varepsilon$  suffisamment petit et  $\rho$  dans  $I_\varepsilon$ , on a

$$\mathcal{S}_\lambda(\mathcal{N} \oplus \mathcal{M}_{>\lambda}, \rho) = \mathcal{S}_\lambda(\mathcal{N}, \rho) \oplus \mathcal{S}_\lambda(\mathcal{M}_{>\lambda}, \rho) = 0.$$

Or  $\mathcal{N} + \mathcal{M}_{>\lambda}$  est un quotient de  $\mathcal{N} \oplus \mathcal{M}_{>\lambda}$  donc, d'après 2),  $\mathcal{S}_\lambda(\mathcal{N} + \mathcal{M}_{>\lambda}, \rho) = 0$ . Maintenant, la suite exacte (76) montre que :

$$\mathcal{S}_\lambda(\mathcal{M}/(\mathcal{N} + \mathcal{M}_{>\lambda}), \rho) = \mathcal{S}_\lambda(\mathcal{M}, \rho) = \mathcal{S}_\lambda(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{>\lambda}, \rho).$$

Par ailleurs, comme  $\text{pt}(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{>\lambda}) \leq \lambda$ , on obtient (cf. remarque 6.18):

$$\begin{aligned} \dim_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{>\lambda}) &= \dim_K \mathcal{S}_\lambda(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{>\lambda}, \rho) \\ &= \dim_K \mathcal{S}_\lambda(\mathcal{M}/(\mathcal{N} + \mathcal{M}_{>\lambda}), \rho) \\ &\leq \dim_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}/(\mathcal{N} + \mathcal{M}_{>\lambda})) \end{aligned}$$

d'où il résulte que  $\mathcal{N} + \mathcal{M}_{>\lambda} = \mathcal{M}_{>\lambda}$ . □

**Lemme 23.10.** — Soit  $\mathcal{N} \xrightarrow{u} \mathcal{M}$  un morphisme de  $\text{MLCS}(\mathcal{R})$ . On a  $u(\mathcal{N}_{>\lambda}) \subset \mathcal{M}_{>\lambda}$ .

*Preuve.* — Comme  $u(\mathcal{N}_{>\lambda})$  est un quotient de  $\mathcal{N}_{>\lambda}$ , d'après le lemme 23.9-2, toutes ses pentes sont supérieures à  $\lambda$ . D'après le lemme 23.9-3, il est contenu dans  $\mathcal{M}_{>\lambda}$ . □

**Lemme 23.11.** — Si  $\text{pt}(\mathcal{M}) \leq \lambda$  et si  $\mathcal{M}$  a toutes ses pentes supérieures à  $\lambda$ , alors  $\mathcal{M} = 0$ .

*Preuve.* — En effet, pour  $\varepsilon$  suffisamment petit et pour  $\rho$  dans  $I_\varepsilon$ , on a :

$$0 = \dim_K \mathcal{S}_\lambda(\mathcal{M}, \rho) = \dim_{\mathcal{R}} \mathcal{M} \quad \square$$

**Définition 23.12.** — On pose  $\mathcal{M}^{\leq \lambda} = \mathcal{M}/\mathcal{M}_{>\lambda}$ .

**Théorème 23.13.** — Les modules différentiels  $\mathcal{M}_{>\lambda}$  et  $\mathcal{M}^{\leq \lambda}$  dépendent fonctoriellement de  $\mathcal{M}$ . Les foncteurs ainsi définis de la catégorie  $\text{MLCS}(\mathcal{R})$  dans elle-même sont exacts.

*Preuve.* — D'après le lemme 23.10 un morphisme  $\mathcal{N} \xrightarrow{u} \mathcal{M}$  de la catégorie  $\text{MLCS}(\mathcal{R})$  définit par restriction un morphisme  $\mathcal{N}_{>\lambda} \xrightarrow{u^\lambda} \mathcal{M}_{>\lambda}$ . Par passage au quotient, on en déduit un morphisme  $\mathcal{N}^{\leq \lambda} \xrightarrow{u^\lambda} \mathcal{M}^{\leq \lambda}$ .

Considérons maintenant une suite exacte de  $\text{MLCS}(\mathcal{R})$  :

$$0 \rightarrow \mathcal{N} \xrightarrow{u} \mathcal{M} \xrightarrow{v} \mathcal{Q} \rightarrow 0.$$

On lui associe la suite exacte de complexes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{N}_{>\lambda} & \longrightarrow & \mathcal{N} & \longrightarrow & \mathcal{N}^{\leq \lambda} & \longrightarrow & 0 \\ & & u_\lambda \downarrow & & u \downarrow & & u^\lambda \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}_{>\lambda} & \longrightarrow & \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M}^{\leq \lambda} & \longrightarrow & 0 \\ & & v_\lambda \downarrow & & v \downarrow & & v^\lambda \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{Q}_{>\lambda} & \longrightarrow & \mathcal{Q} & \longrightarrow & \mathcal{Q}^{\leq \lambda} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Par hypothèse, le complexe  $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{Q}$  a une cohomologie nulle. D'après le lemme 23.9-2 (resp. 23.9-1) les espaces de cohomologie du complexe  $\mathcal{N}_{>\lambda} \rightarrow \mathcal{M}_{>\lambda} \rightarrow \mathcal{Q}_{>\lambda}$  (resp.  $\mathcal{N}^{\leq \lambda} \rightarrow \mathcal{M}^{\leq \lambda} \rightarrow \mathcal{Q}^{\leq \lambda}$ ) ont toutes leurs pentes supérieures à  $\lambda$  (resp. sont de pente inférieure à  $\lambda$ ). La suite exacte longue de cohomologie montre que ces espaces sont isomorphes donc nuls d'après le lemme 23.11. □

**23.3. Images inverses.** — Le comportement du foncteur  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_{>\lambda}$  par images inverses est délicat ([15], 6.3) : pour  $d \geq 2$  on note  $\varphi_d$  la ramification d'ordre  $d$ .

**Théorème 23.14.** — Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{R}$ -module différentiel soluble,  $d \geq 2$  un entier et  $\lambda$  un réel. On suppose que  $0 \leq \lambda < \text{pt}(\mathcal{M})$ . Alors

- 1) l'image inverse  $\varphi_d^*(\mathcal{M})$  est soluble,
- 2) on a une injection  $\varphi_d^*(\mathcal{M})_{>d\lambda} \rightarrow \varphi_d^*(\mathcal{M}_{>\lambda})$ ,
- 3) cette injection est une bijection si  $d$  est premier avec  $p$ .

A l'aide du corollaire 21.2, on en déduit le corollaire :

**Corollaire 23.15.** — La catégorie  $\text{MLCF}(\mathcal{R})$  est stable par les foncteurs  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_{>\lambda}$  et  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^{\leq\lambda}$ .

**Corollaire 23.16.** — Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{R}$ -module ayant une structure de Frobenius forte. Alors l'exposant de  $\mathcal{M}$  est rationnel.

*Preuve.* — C'est une conséquence immédiate de la proposition 23.7 et du corollaire 23.15.  $\square$

**Remarque 23.17.** — Ce corollaire est en fait le seul moyen pratique dont on dispose pour montrer que l'exposant d'un module différentiel a un exposant dont les différences ne sont pas Liouville. On montre alors beaucoup plus puisqu'on montre que cet exposant appartient à  $(\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}_p)^\mu$ .

**23.4. Polygone de Newton.** — Le théorème de décomposition permet de définir les pentes d'un module différentiel soluble.

**Corollaire 23.18 (décomposition suivant les pentes)**

Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{R}$ -module différentiel soluble. Il y a une filtration décroissante de  $\mathcal{M}$  par des sous-modules différentiels  $\mathcal{M}_{>\lambda}$  ( $\lambda \in \mathbb{R}^+$ ) dont le gradué associé  $\text{Gr}_\lambda \mathcal{M} = \left( \bigcap_{\nu < \lambda} \mathcal{M}_{>\nu} \right) / \mathcal{M}_{>\lambda}$  est nul ou purement de pente  $\lambda$ .

*Preuve.* — Par construction,  $\mathcal{M}_{>\lambda}$  est le plus grand sous-module différentiel de  $\mathcal{M}$  dont toutes les pentes sont supérieures à  $\lambda$ . Pour  $\nu \geq \lambda$ ,  $\mathcal{M}_\nu$ , qui a des pentes supérieures à  $\nu \geq \lambda$ , est contenu dans  $\mathcal{M}_{>\lambda}$ .

La suite exacte  $0 \rightarrow \mathcal{M}_{>\lambda} \rightarrow \bigcap_{\nu < \lambda} \mathcal{M}_\nu \rightarrow \text{Gr}_\lambda \mathcal{M} \rightarrow 0$  montre que, s'il est non nul,  $\text{Gr}_\lambda \mathcal{M}$  a des pentes supérieures à  $\nu$  pour tout  $\nu < \lambda$ . Par ailleurs, le lemme du serpent fournit la suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{Gr}_\lambda \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}^{\leq\lambda} \longrightarrow \bigcup_{\nu < \lambda} \mathcal{M}^{\leq\nu} \longrightarrow 0$$

qui montre que  $\text{pt}(\text{Gr}_\lambda \mathcal{M}) \leq \lambda$ .  $\square$

**Théorème 23.19.** — La suite exacte  $0 \rightarrow \mathcal{M}_{>\lambda} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^{\leq\lambda} \rightarrow 0$  est scindée. Autrement dit, on a  $\mathcal{M} = \bigoplus_\lambda \text{Gr}_\lambda \mathcal{M}$ .

*Preuve.* — La plus grande pente d'un module différentiel soluble est donnée par ses rayons de convergence dans les disques génériques de grand rayon. Or les modules différentiels  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}^* \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}, \mathcal{R})$  ont les mêmes rayons de convergence (leurs matrices de solutions au voisinage des points génériques sont transposées-inverses l'une de l'autre). Donc les plus grandes pentes de  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}^*$  sont égales. En particulier, la plus grande pente de  $(\mathcal{M}^{\leq \lambda})^*$  est inférieure à  $\lambda$  et  $((\mathcal{M}^{\leq \lambda})^*)_{>\lambda} = 0$

A partir de la suite exacte :

$$0 \longrightarrow (\mathcal{M}^*)_{>\lambda} \longrightarrow \mathcal{M}^* \longrightarrow (\mathcal{M}^*)^{\leq \lambda} \longrightarrow 0,$$

et en remarquant que  $(\mathcal{M}^*)^* = \mathcal{M}$ , on obtient la suite exacte (la surjectivité résulte du calcul des rangs)

$$0 \longrightarrow ((\mathcal{M}^*)^{\leq \lambda})^* \longrightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{\ell} ((\mathcal{M}^*)_{>\lambda})^* \longrightarrow 0$$

Par fonctorialité, on trouve :

$$\left( ((\mathcal{M}^*)^{\leq \lambda})^* \right)_{>\lambda} = 0 \longrightarrow \mathcal{M}_{>\lambda} \xrightarrow{\bar{\ell}} \left( ((\mathcal{M}^*)_{>\lambda})^* \right)_{>\lambda} \longrightarrow 0.$$

Autrement dit,  $\bar{\ell}$  est un isomorphisme. Par construction, c'est la restriction à  $\mathcal{M}_{>\lambda}$  du morphisme  $\ell$ .

Considérons maintenant le morphisme composé

$$\mathcal{M}_{>\lambda} \xrightarrow{\bar{\ell}} \left( ((\mathcal{M}^*)_{>\lambda})^* \right)_{>\lambda} \xrightarrow{i} ((\mathcal{M}^*)_{>\lambda})^*$$

où  $i$  est l'injection canonique. C'est une injection et donc

$$\text{rg}_{\mathcal{R}} \mathcal{M}_{>\lambda} \leq \text{rg}_{\mathcal{R}} \left( ((\mathcal{M}^*)_{>\lambda})^* \right)_{>\lambda} = \text{rg}_{\mathcal{R}} (\mathcal{M}^*)_{>\lambda}$$

En échangeant le rôle de  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}^*$ , on trouve l'inégalité inverse donc

$$\text{rg}_{\mathcal{R}} \mathcal{M}_{>\lambda} = \text{rg}_{\mathcal{R}} (\mathcal{M}^*)_{>\lambda}$$

et l'injection  $i \circ \bar{\ell}$  de  $\mathcal{M}_{>\lambda}$  dans  $((\mathcal{M}^*)_{>\lambda})^*$  est donc en fait une bijection. En particulier,  $i$  est l'application identité.

On vient de construire une surjection  $(i \circ \bar{\ell})^{-1} \circ \ell$  de  $\mathcal{M}$  sur  $\mathcal{M}_{>\lambda}$ . Par construction sa restriction à  $\mathcal{M}_{>\lambda}$  est  $(i \circ \bar{\ell})^{-1} \circ \bar{\ell}$  c'est-à-dire l'identité. Elle donne donc un scindage de la suite exacte  $0 \rightarrow \mathcal{M}_{>\lambda} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^{\leq \lambda} \rightarrow 0$ .  $\square$

**Définition 23.20.** — On appelle *pent*es du module différentiel soluble  $\mathcal{M}$  les nombres réels  $\lambda$  pour lesquels  $\text{Gr}_{\lambda}(\mathcal{M}) \neq \{0\}$ .

**Définition 23.21.** — Le *polygone de Newton* d'un module différentiel soluble  $\mathcal{M}$  est le polygone convexe commençant au point  $(0, 0)$  et qui a, pour chaque pente  $\lambda$  de  $\mathcal{M}$ , un coté de pente  $\lambda$  dont la projection sur l'axe des abscisses a pour longueur le rang de  $\text{Gr}_{\lambda} \mathcal{M}$ . Nous le noterons  $\text{New}(\mathcal{M})$ .

**Théorème 23.22 (Hasse-Arf  $p$ -adique).** — *Les sommets du polygone de Newton d'un module différentiel soluble ont des coordonnées entières.*

*Preuve.* — On montre en fait que la hauteur polygone de Newton (ordonnée de son dernier sommet) d'un  $\mathcal{R}$ -module différentiel  $\mathcal{M}$  de rang  $\mu$  est égale à l'“indice généralisé” de  $\mathcal{M}$  c'est-à-dire à l'indice sur  $\mathcal{A}([0, 1]^\mu)$  (voir paragraphe 6.8) de l'opérateur  $\gamma \circ (xD - xG)$  où  $\gamma$  désigne la projection canonique de  $\mathcal{R}^\mu$  sur  $\mathcal{A}([0, 1]^\mu)$  et  $G$  la matrice de la dérivation  $D$  dans une base de  $\mathcal{M}$ .  $\square$

En particulier, Le théorème 23.22 implique que les pentes d'un module différentiel soluble de rang  $\mu$  sont des nombres rationnels dont le dénominateur est inférieur ou égal à  $\mu$ .

## CHAPITRE VIII LE THÉORÈME DE TURRITTIN $p$ -ADIQUE

### 24. Modules différentiels complètement irréductibles

Contrairement à ce qui se passe dans le cas complexe, les modules différentiels  $p$ -adiques qui restent irréductibles après ramification de la variable ne sont pas, en général, de rang un. Le but de ce paragraphe est d'étudier ces modules différentiels que l'on dit complètement irréductibles.

Si  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{R}$ -module différentiel, on munit  $\text{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}) \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$  de la structure de  $\mathcal{R}$ -module différentiel définie en 6.4. Dans ces conditions,  $\text{End}_{\mathcal{R}(\mathcal{D})}(\mathcal{M})$  représente les solutions de  $\text{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})$  dans  $\mathcal{R}$ .

Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{R}$ -module différentiel,  $\epsilon$  une base de  $\mathcal{M}$  et  $G$  la matrice représentant la dérivation  $D$  dans cette base. La base  $\epsilon$  fournit une base “canonique” de  $\text{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})$ , c'est-à-dire un isomorphisme  $i$  de  $\mathcal{R}$ -modules différentiels entre  $\text{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})$  muni de la dérivation  $D$  et  $\text{Mat}(\mu, \mathcal{R})$  muni de la dérivation  $\nabla$  définie par  $\nabla(X) = D(X) - GX + XG$ .

Pour simplifier l'exposé nous introduisons trois définitions.

**Définition 24.1.** — On note  $\text{MLCSNL}(\mathcal{R})$  la sous-catégorie pleine de  $\text{MLCS}(\mathcal{R})$  dont les objets vérifient les deux conditions suivantes :

- 1) L'exposant de  $\mathcal{M}$  a des différences non Liouville,
- 2) L'exposant de  $\text{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})$  est non Liouville.

**Définition 24.2.** — On dit que le module différentiel  $\mathcal{M}$  est *absolument irréductible* si, pour toute extension finie  $K'$  de  $K$ ,  $K' \otimes_K \mathcal{M}$  est irréductible dans  $\text{MLC}(\mathcal{R}_{K'})$ .

**Définition 24.3.** — Un module différentiel  $\mathcal{M}$  de  $\text{MLCSNL}(\mathcal{R})$ , est dit *complètement irréductible* si la composante de pente nulle  $\text{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})^{\leq 0}$  de  $\text{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})$  est de rang 1.

Si  $\mathcal{M}$  est décomposable (c'est-à-dire n'est pas irréductible),  $\text{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})^{\leq 0}$  contient les projections sur les sous-modules différentiels. Il en résulte qu'un module différentiel complètement irréductible est irréductible.

**Lemme 24.4.** — Soit  $0 \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow 0$  une suite exacte de  $\text{MLCS}(\mathcal{R})$ . Si l'exposant de  $\mathcal{M}$  a des différences non Liouville (resp. est non Liouville), il en est de même des exposants de  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{Q}$ .

*Preuve.* — Par définition, l'exposant de  $\mathcal{M}$  (resp.  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{Q}$ ) est celui de  $\mathcal{M}_{>0}$  (resp.  $\mathcal{N}_{>0}$ ,  $\mathcal{Q}_{>0}$ ). Maintenant, la suite  $0 \rightarrow \mathcal{N}_{>0} \rightarrow \mathcal{M}_{>0} \rightarrow \mathcal{Q}_{>0} \rightarrow 0$  est exacte d'après le théorème 23.13. Le lemme est donc une conséquence immédiate de la proposition 17.12.  $\square$

**Corollaire 24.5.** — Soit  $0 \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow 0$  une suite exacte de  $\text{MLCS}(\mathcal{R})$ . Si  $\mathcal{M}$  est un objet de  $\text{MLCSNL}(\mathcal{R})$ , il en est de même de  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{Q}$ .

*Preuve.* — Le lemme 24.4 montre que les exposants de  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{Q}$  ont des différences non Liouville. Par ailleurs, les modules différentiels  $\text{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{N})$  et  $\text{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{Q})$  sont des sous-quotients de  $\text{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})$ , le même lemme montre qu'ils ont des exposants non Liouville.  $\square$

Montrons maintenant que tout module différentiel absolument irréductible devient complètement irréductible après ramification de la variable. Pour cela, nous étudions la partie de pente nulle du module différentiel des endomorphismes d'un module différentiel absolument irréductible.

**Proposition 24.6.** — Soit  $\mathcal{M}$  un module différentiel de  $\text{MLCSNL}(\mathcal{R})$  de rang  $\mu$  absolument irréductible.

1) On a  $\text{End}_{\mathcal{R}\langle D \rangle}(\mathcal{M}) = K \text{ Id}$ .

2) Il existe un entier  $d$  premier à  $p$  et qui divise  $\mu$  pour lequel  $\{0, \frac{1}{d}, \frac{2}{d}, \dots, \frac{d-1}{d}\}$  est un représentant de l'exposant de  $\text{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})$ . De plus, on a  $\text{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})^{\leq 0} = \mathcal{R}[u]$  où  $u$  est un  $\mathcal{R}$ -automorphisme de  $\mathcal{M}$  tel que  $x D(u) = \frac{1}{d} u$  et  $u^d = c x \text{ Id}$  avec  $c \neq 0$  dans  $K$ .

*Preuve.* — Considérons un élément non nul  $u$  de  $\text{End}_{\mathcal{R}\langle D \rangle}(\mathcal{M})$ . Son polynôme unitaire minimal est à coefficients dans  $K$ . Soit  $\lambda$  une racine de  $P$  dans une extension finie de  $K$ . Comme  $u - \lambda \text{ Id}$  est, par construction, non inversible, il en résulte que  $u = \lambda \text{ Id}$ . Le point 1) est bien démontré.

Par hypothèse, l'exposant de  $\text{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})$  a des différences non Liouville. D'après le lemme ref??, on peut considérer  $\text{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})^{\leq 0}$  comme un sous module différentiel de  $\text{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})$ . D'après le théorème 18.1, un nombre  $\alpha$  est composante de l'exposant si et seulement s'il existe  $u$  non nul dans  $\text{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})$  tel que  $x D(u) = \alpha u$ .

On vérifie que les multiplicités des composantes de l'exposant sont égales à un puis que ces composantes forment un sous-groupe fini de  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ . On en déduit que  $\text{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})^{\leq 0}$  possède une base de la forme  $\{\text{Id}, u, u^2, \dots, u^{d-1}\}$  où  $u \stackrel{\text{déf}}{=} u_{1/d}$  est un endomorphisme inversible tel que  $x D(u) = \frac{1}{d} u$ .

En particulier on a  $x D(u^d) = u^d$ . On en déduit  $u^d = c x \text{ Id}$  (avec  $c \neq 0$ ) puis  $\det(u)^d = c^\mu x^\mu$ . Mais,  $\det(u)$  appartenant à  $\mathcal{R}$ , ceci implique que  $d$  divise  $\mu$ .  $\square$

Soit  $d$  un entier. Nous considérons l'extension  $\mathcal{R}[y]$  où  $y^d = x$ . C'est une  $K$ -algèbre que l'on munit de la dérivation  $D$ , prolongeant celle de  $\mathcal{R}$ , définie par  $D(y) = \frac{1}{d} y^{1-d}$ .

On obtient ainsi un plongement de  $\mathcal{R}\langle D \rangle$  dans  $\mathcal{R}\langle D \rangle[y] = \mathcal{R}[y][D]$ . On peut aussi voir  $\mathcal{R}[y]$  comme un  $\mathcal{R}$ -module différentiel de rang  $d$ , de base  $1, y, \dots, y^{d-1}$ .

Pour un  $\mathcal{R}$ -module différentiel  $\mathcal{M}$ , on note  $\theta^*(\mathcal{M})$  le  $\mathcal{R}[y]$ -module différentiel obtenu par extension des scalaires de  $\mathcal{D}$  à  $\mathcal{R}\langle D \rangle[y]$ . En tant que  $\mathcal{R}[y]$ -module, on a  $\theta^*(\mathcal{M}) = \mathcal{R}[y] \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{M}$ . En particulier le rang de  $\theta^*(\mathcal{M})$  est celui de  $\mathcal{M}$ .

Inversement, à un  $\mathcal{R}[y]$ -module différentiel  $\mathcal{N}$ , nous associons le  $\mathcal{R}$ -module différentiel  $\theta_*(\mathcal{N})$  obtenu par restriction des scalaires de  $\mathcal{R}\langle D \rangle[y]$  à  $\mathcal{R}\langle D \rangle$ . Le rang de  $\theta_*(\mathcal{N})$  est  $d$  fois celui de  $\mathcal{N}$ . On a  $\theta_*\theta^*(\mathcal{M}) = \mathcal{R}[y] \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{M} = \mathcal{M} \oplus x^{1/d}\mathcal{M} \oplus \dots \oplus x^{(d-1)/d}\mathcal{M}$ .

**Proposition 24.7.** — *Soit  $\mathcal{M}$  un module différentiel de MLCSNL( $\mathcal{R}$ ) de rang  $\mu$  absolument irréductible. Quitte éventuellement à faire une extension finie du corps  $K$ , il existe dans  $\theta^*(\mathcal{M})$  un sous  $\mathcal{R}[y]$ -module différentiel  $\mathcal{N}$ , de rang  $\mu/d$ , complètement irréductible tel que  $\mathcal{M} = \theta_*(\mathcal{N})$ .*

*Preuve.* — Le polynôme minimal de  $u$  sur  $\mathcal{F}$  est  $u^d - cx$ . Supposons que  $K$  soit suffisamment gros pour que  $c = \gamma^d$  avec  $\gamma$  dans  $K$ . Les valeurs propres de  $u$  sont donc les  $\zeta\gamma y$  pour  $\zeta^d = 1$ . Elles ont toutes le même ordre  $\mu/d$  (elles s'échangent par l'automorphisme  $y \mapsto \zeta y$ ). L'endomorphisme  $u - \gamma y$  a un noyau  $\mathcal{N}$  de rang  $\mu/d$  qui est un sous  $\mathcal{R}[y]$ -module différentiel de  $\theta^*(\mathcal{M})$ .

On vérifie que  $u$  réalise un morphisme de  $\mathcal{M}$  dans  $x^{1/d}\mathcal{M}$  d'où il résulte que  $\theta_*\theta^*(\mathcal{M}) = \mathcal{M}^d$ . Mais  $\theta_*(\mathcal{N})$  est un sous module différentiel de rang  $\mu$  de  $\theta_*\theta^*(\mathcal{M})$ . Comme  $\mathcal{M}$  est irréductible, l'unicité de la décomposition de Jordan-Holder montre que  $\theta_*(\mathcal{N}) = \mathcal{M}$ . Par ailleurs, si  $\mathcal{N}$  était réductible, il en serait de même de  $\theta_*(\mathcal{N})$  (la réciproque est fautive). Donc  $\mathcal{N}$  est irréductible.

Quitte à changer la dérivation  $D = d/dx$  en  $dy^{d-1}D = d/dy$ ,  $\mathcal{R}[y]$  est isomorphe à  $\mathcal{R}$ . D'après la définition même de l'exposant 17.7, pour un module différentiel  $\mathcal{Q}$  de pente nulle, l'exposant de  $\theta^*(\mathcal{Q})$ , vu comme  $\mathcal{R}$ -module différentiel par l'isomorphisme précédent, est  $d$  fois celui de  $\mathcal{Q}$ . L'exposant de  $\text{End}_{\mathcal{R}[y]}(\theta^*(\mathcal{M}))$  est donc  $\{0, \dots, 0\}$  (0 répété  $d$  fois). Comme  $\text{End}_{\mathcal{R}[y]}(\mathcal{N})$  est un sous quotient de  $\text{End}_{\mathcal{R}[y]}(\theta^*(\mathcal{M}))$ , son exposant ne comprend que des 0. La proposition 24.6 montre que  $\mathcal{N}$  est un  $\mathcal{R}$ -module différentiel complètement irréductible.  $\square$

## 25. Exponentielles de Robba

**25.1. Vecteurs de Witt.** — Pour  $n \geq 0$ , on pose :

$$W_n(X_0, \dots, X_n) = \sum_{i=0}^n p^i X_i^{p^{n-i}} = X_0^{p^n} + pX_1^{p^{n-1}} + \dots + p^n X_n.$$

En particulier,  $W_0 = X_0$ ,  $W_1 = X_0^p + X_1$  et

$$(77) \quad W_n(X_0, \dots, X_n) = W_{n-1}(X_0^p, \dots, X_{n-1}^p) + p^n X_n$$

Si  $A$  est un anneau et si  $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_n, \dots)$  est un élément de  $A^{\mathbb{N}}$ , on pose :

$$\mathcal{W}(\mathbf{a}) = (W_0(\mathbf{a}), \dots, W_n(\mathbf{a}), \dots) = (W_0(a_0), \dots, W_n(a_0, \dots, a_n), \dots).$$

faisant ainsi de  $\mathcal{W}$  une application de  $A^{\mathbb{N}}$  dans  $A^{\mathbb{N}}$ .

Si  $A$  est de caractéristique  $p$ , les  $W_n(\mathbf{a})$ , qui ne dépendent que de  $a_0$ , ne donnent aucune information sur les  $a_i$  pour  $i > 0$ . D'un autre côté, si  $p$  est inversible dans  $A$ , l'équation (77) montre que l'application  $\mathcal{W}$  est une bijection. On étudiera donc cette application en supposant que  $p$  n'est pas inversible dans  $A$  et que  $A$  n'est pas de caractéristique  $p$ . En particulier, on supposera que  $A$  est de caractéristique nulle.

Nous allons voir que l'image de l'application  $\mathcal{W}$  est facile à caractériser lorsque  $A$  est (contenu dans) l'anneau des entiers d'une extension non ramifiée de  $\mathbb{Q}_p$ . On ne sait pas étudier directement le cas d'une extension ramifiée mais on utilisera le détour suivant : on considérera son anneau des entiers comme une extension  $A = A_0[\pi]$  de l'anneau des entiers  $A_0$  d'une extension non ramifiée et la spécialisation  $X \mapsto \pi$  de l'anneau "non ramifié"  $A_0[X]$  dans  $A$  permettra de trouver des éléments de  $\mathcal{W}(A^{\mathbb{N}})$ .

**Définition 25.1.** — Un anneau  $A$  est dit pNR ( $p$  non ramifié) s'il est de caractéristique nulle et s'il est muni d'un endomorphisme d'anneau  $\tau : A \rightarrow A$  tel que, pour tout élément  $a$  de  $A$ , la différence  $\tau(a) - a^p$  appartienne à  $pA$ .

**Remarques 25.2.** — On vérifie facilement les faits suivants :

- 1) L'anneau  $\mathbb{Z}$  est pNR (d'après le petit théorème de Fermat,  $\tau =$  identité convient).
- 2) Plus généralement, si  $k$  est un corps de caractéristique  $p$ , l'anneau des vecteurs de Witt  $W(k)$  muni de l'endomorphisme de Frobenius (voir exercice 25.9) est pNR.
- 3) Si l'anneau  $A$  est pNR, alors l'anneau  $A[x]$  (resp.  $A[[x]]$ ,  $A((x))$ ) est pNR pour l'endomorphisme  $\tau(\sum a_s x^s) = \sum \tau(a_s) x^{ps}$ .
- 4) Par contre, si  $K$  est une extension ramifiée de  $\mathbb{Q}_p$ , alors l'anneau  $A$  des entiers de  $K$  n'est pas pNR. En effet, il existe  $\pi$  dans  $A$  et  $n > 1$  tels que  $\pi^n = pa$  avec  $|a| = 1$  (en particulier  $a$  est dans  $A$  mais pas dans  $pA$ ). Si  $A$  était pNR, on devrait avoir
  - \*  $|\tau(a) - a^p| \leq |p| < |a^p|$  donc  $|\tau(a)| = |a^p| = 1$ ,
  - \*  $|\tau(\pi^n)| = |\tau(\pi^n)| = |p\tau(a)| = |p|$  donc  $|\tau(\pi)| = |p|^{1/n} = |\pi|$ ,
  - \*  $|\tau(\pi) - \pi^p| \leq |p| < |p|^{1/n} = |\tau(\pi)|$  donc  $|\tau(\pi)| = |\pi^p| < |\pi|$ .

Contradiction.

Le lemme 25.4 est classique : c'est une variante algébrique du théorème des valeurs intermédiaires. Lorsque  $A$  est un anneau topologique, on peut étendre les résultats 3), 4) et 5) au cas où le polynôme  $R$  est une série entière de  $A[[x]]$  à condition d'imposer à  $a$  et  $b$  d'appartenir au domaine de convergence de  $R$ .

**Notation 25.3.** — Soit  $P$  un polynôme de  $A[x]$  ou une série entière de  $x A[[x]]$ . On définit par récurrence  $P^{\circ(0)} = x$ ,  $P^{\circ(n)}(x) = P(P^{\circ(n-1)}(x))$ .

**Lemme 25.4.** — Soit  $A$  un anneau et  $R$  dans  $A[x]$ . On pose  $P(x) = x^p + pR(x)$ . Pour  $a$  et  $b$  dans  $A$  et  $n$  entier,

- 1)  $b^n - a^n$  appartient à  $(b - a)A$ ,
- 2) Si  $b - a$  appartient à  $pA$ , alors  $b^p - a^p$  appartient à  $p(b - a)A$ ,
- 3)  $R(b) - R(a)$  appartient à  $(b - a)A$ ,
- 4) Si  $b - a$  appartient à  $pA$ ,  $P(b) - P(a)$  appartient à  $p(b - a)A$ ,
- 5) Si  $b - a$  appartient à  $pA$ ,  $P^{\circ(n)}(b) - P^{\circ(n)}(a)$  appartient à  $p^n(b - a)A \subset p^{n+1}A$ .

*Preuve.* — Les points 1) et 2) sont des conséquences immédiates de la formule du binôme appliquée à  $b^n = ((b-a) + a)^n$ .

Le point 3) est une conséquence du point 1) et le point 4) découle des points 2) et 3). Pour le point 5), on fait une démonstration par récurrence sur  $n$ . C'est évident pour  $n = 0$  car  $b - a$  appartient bien à  $(b-a)A$  ! Si, pour  $n \geq 1$ ,  $P^{\circ(n-1)}(b) - P^{\circ(n-1)}(a)$  appartient à  $p^{n-1}(b-a)A$  donc à  $p^n A$ . Alors, d'après le point 4)

$$P^{\circ(n)}(b) - P^{\circ(n)}(a) = P(P^{\circ(n-1)}(b)) - P(P^{\circ(n-1)}(a))$$

appartient à  $p(P^{\circ(n-1)}(b) - P^{\circ(n-1)}(a)) \subset p^n(b-a)A$ .  $\square$

**Proposition 25.5.** — *Soit  $A$  un anneau  $pNR$ .  $\mathcal{W}$  est injective et  $(w_0, \dots, w_n, \dots)$  appartient à  $\mathcal{W}(A^{\mathbb{N}})$  si et seulement si, pour tout  $n$ ,  $w_n - \tau(w_{n-1})$  appartient à  $p^n A$ .*

*Preuve.* — Si  $\mathcal{W}(\mathbf{a}) = \mathcal{W}(\mathbf{b})$ , on trouve  $a_0 = W_0(a_0) = W_0(b_0) = b_0$  et, par récurrence sur  $n$ , en utilisant la relation (77)

$$\begin{aligned} p^n a_n &= W_n(\mathbf{a}) - W_n(a_0^p, \dots, a_{n-1}^p, 0) \\ &= W_n(\mathbf{b}) - W_n(b_0^p, \dots, b_{n-1}^p, 0) = p^n b_n, \end{aligned}$$

d'où  $a_n = b_n$  car  $A$  est de caractéristique nulle.

Appliquons le lemme 25.4-5 avec  $R = 0$  c'est-à-dire  $P^{\circ(n)}(x) = x^{p^n}$ . Pour  $a$  dans  $A$ , la différence  $a^p - \tau(a)$  appartient à  $pA$  et donc  $a^{p^n} - \tau(a)^{p^{n-1}}$  appartient à  $p^n A$ . Il vient :

$$W_n(a_0^p, \dots, a_n^p) - W_n(\tau(a_0), \dots, \tau(a_n)) = \sum p^k (a_k^{p^{n-k+1}} - \tau(a_k)^{p^{n-k}}) \in p^{n+1} A$$

Si on calcule modulo  $p^n A$ , on trouve donc :

$$\begin{aligned} w_n &\equiv W_n(a_0, \dots, a_{n-1}, 0) = W_{n-1}(a_0^p, \dots, a_{n-1}^p) \\ &\equiv \tau(W_{n-1}(a_0, \dots, a_{n-1})) = \tau(w_{n-1}) \pmod{p^n A} \end{aligned}$$

Réciproquement, si  $w_n - \tau(w_{n-1})$  appartient à  $p^n A$  pour tout  $n$ , on peut construire par récurrence une suite  $(a_n)$  de  $A^{\mathbb{N}}$  telle que  $(w_0, \dots, w_n, \dots) = \mathcal{W}(a_0, \dots)$  :

On pose  $a_0 = W(a_0) = w_0$  et, si on connaît  $a_0, \dots, a_{n-1}$ , comme

$$\begin{aligned} w_n - W_{n-1}(a_0^p, \dots, a_{n-1}^p) &\equiv w_n - \tau(W_{n-1}(a_0, \dots, a_{n-1})) \\ &= w_n - \tau(w_{n-1}) \pmod{p^n A}, \end{aligned}$$

il existe  $a_n$  dans  $A$  tel que

$$w_n = W_{n-1}(a_0^p, \dots, a_{n-1}^p) + p^n a_n = W_n(a_0, \dots, a_n). \quad \square$$

Le résultat suivant contient déjà beaucoup de congruences entre nombres binomiaux (voir [49] page 50 une autre manière de présenter la démonstration) :

**Théorème 25.6.** — *Soit  $\Phi$  un polynôme de  $\mathbb{Z}[X, Y]$ . Pour chaque  $n \geq 0$ , on peut choisir un polynôme  $\varphi_n$  de  $\mathbb{Z}[X_0, \dots, X_n, Y_0, \dots, Y_n]$  de telle sorte que l'on ait*

$$W_n(\varphi_0(X_0, Y_0), \dots, \varphi_n(X_0, \dots, X_n, Y_0, \dots, Y_n)) = \Phi(W_n(X_0, \dots, X_n), W_n(Y_0, \dots, Y_n)).$$

*Les polynômes  $\varphi_n$  satisfaisant cette relation sont uniques.*

*Preuve.* — L'anneau  $A = \mathbb{Z}[X_0, Y_0, \dots, X_n, Y_n, \dots]$  est pNR d'après la remarque 25.2-3. Posons  $w_n = \Phi(W_n(X_0, \dots, X_n), W_n(Y_0, \dots, Y_n))$ . On veut montrer que  $(w_n)$  appartient à  $\mathcal{W}(A)$ . D'après la proposition 25.5 il suffit de vérifier que  $w_n - \tau(w_{n-1})$  appartient à  $p^n A$  pour tout  $n$ . Or, en utilisant le lemme 25.4-3, on trouve

$$\begin{aligned} \tau(w_{n-1}) &= \Phi(W_{n-1}(X_0^p, \dots, X_{n-1}^p), W_{n-1}(Y_0^p, \dots, Y_{n-1}^p)) \\ &= \Phi(W_n(X_0, \dots, X_n) - p^n X_n, W_n(Y_0, \dots, Y_n) - p^n Y_n) \\ &\equiv \Phi(W_n(X_0, \dots, X_n), W_n(Y_0, \dots, Y_n)) = w_n \pmod{p^n A}. \quad \square \end{aligned}$$

Si on applique le théorème 25.6 au polynôme  $\Phi(X, Y) = X + Y$  (resp.  $\Phi[X, Y] = XY$ ) et si on note  $S_n$  (resp.  $P_n$ ) les polynômes  $\varphi_n$  correspondants, on en déduit facilement le résultat suivant

**Proposition-définition 25.7.** — *Soit  $A$  un anneau commutatif quelconque. Les lois de compositions suivantes*

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &= (S_0(a_0, b_0), \dots, S_n(a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n), \dots) \\ \mathbf{a}\mathbf{b} &= (P_0(a_0, b_0), \dots, P_n(a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n), \dots) \end{aligned}$$

font de  $A^{\mathbb{N}}$  un anneau commutatif appelé anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans  $A$  et noté  $W(A)$ .

**Exercice 25.8.** — On suppose que  $A = \mathbb{F}_p$  est le corps à  $p$  éléments et on définit une application  $\theta$  de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}_p$  par  $\theta(x) = \lim_{h \rightarrow \infty} x^{p^h}$

1. Vérifier que  $\theta(x) = \theta(y)$  pour  $x$  et  $y$  congrus modulo  $p$  et que  $\theta(xy) = \theta(x)\theta(y)$ .  
On note  $\bar{\theta}$  l'application de  $\mathbb{F}_p$  dans  $\mathbb{Z}_p$  obtenue par passage au quotient.
2. Au vecteur de Witt  $(a_0, \dots, a_n, \dots)$  de  $W(\mathbb{F}_p)$  on associe le nombre de  $\mathbb{Z}_p$

$$\Theta((a_0, \dots, a_n, \dots)) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\theta}(a_n) p^n.$$

Montrer que  $\Theta$  est un isomorphisme de l'anneau  $W(\mathbb{F}_p)$  avec l'anneau  $\mathbb{Z}_p$ .

**Exercice 25.9.** — Soit  $k$  un corps (resp. un corps parfait) de caractéristique  $p$ .

- 1) Vérifier que l'application  $F : W(k) \rightarrow W(k)$  définie par

$$F(a_0, \dots, a_n, \dots) = (a_0^p, \dots, a_n^p, \dots)$$

est un endomorphisme (resp. un automorphisme) d'anneau, appelé endomorphisme de Frobenius, et que  $F(\mathbf{a}) - \mathbf{a}^p$  appartient à  $pW(k)$  pour tout  $\mathbf{a}$  de  $W(k)$ .

- 2) On pose

$$V(a_0, \dots, a_n, \dots) = (0, a_0, \dots, a_{n-1}, \dots).$$

Vérifier que  $F \circ V(\mathbf{a}) = p\mathbf{a}$  [calculer l'image par  $\mathcal{W}$ ].

Nous terminons ce paragraphe en donnant une autre application de la proposition 25.5. Nous nous limitons au cas qui nous sera utile. Au prix de petites difficultés techniques, on peut la généraliser, par exemple, en remplaçant l'anneau  $\mathbb{Z}$  par un anneau pNR quelconque ou bien en remplaçant le polynôme  $R$  (resp.  $Q$ ) par une série entière de  $\mathbb{Z}[[x]]$  (resp. de  $x\mathbb{Z}[[x]]$ ).

**Proposition 25.10.** — Soit  $Q$  et  $R$  dans  $\mathbb{Z}[x]$ . On pose  $P(x) = x^p + pR(x)$ . Alors  
 1)  $(Q(P^{\circ(0)}(x)), \dots, Q(P^{\circ(n)}(x)), \dots)$  appartient à  $\mathcal{W}(W(\mathbb{Z}[x]))$ ,  
 2) si  $Q(0) = R(0) = 0$ ,  $(Q(P^{\circ(0)}(x)), \dots, Q(P^{\circ(n)}(x)), \dots)$  appartient à  $\mathcal{W}(W(x\mathbb{Z}[x]))$ .

*Preuve.* — L'anneau  $\mathbb{Z}[x]$  est pNR pour l'endomorphisme  $\tau(H)(x) = H(x^p)$ . Comme  $P(x) - x^p = pR(x)$  appartient à  $p\mathbb{Z}[x]$ , d'après les congruences 5) et 3) du lemme 25.4, on trouve, modulo  $p^n \mathbb{Z}[x]$ ,

$$Q(P^{\circ(n)}(x)) = Q(P^{\circ(n-1)}(P(x))) \equiv Q(P^{\circ(n-1)}(x^p)) = \tau(Q(P^{\circ(n-1)}(x)))$$

Il suffit maintenant d'appliquer la proposition 25.5.

Si  $Q$  et  $R$  appartiennent à  $x\mathbb{Z}[x]$ , alors, pour  $n \geq 0$ ,  $Q(P^{\circ(n)}(x))$  appartient à  $x\mathbb{Z}[x]$ . Il reste à voir que si  $(w_0, \dots) = \mathcal{W}(a_0, \dots)$  pour des polynômes  $w_n$  de  $x\mathbb{Z}[x]$  alors les  $a_n$  eux aussi appartiennent à  $x\mathbb{Z}[x]$ . Mais ceci se vérifie facilement par récurrence à partir de la formule (77).  $\square$

**Remarque 25.11.** — La proposition 25.10, avec  $Q(x) = x$ , montre qu'il existe  $\mathbf{a}$  dans  $W(\mathbb{Z}[x])$  tel que  $\mathcal{W}(\mathbf{a}) = (P^{\circ(0)}(x), \dots, P^{\circ(n)}(x), \dots)$ . Par définition de la somme et du produit des vecteurs de Witt, on a alors

$$\mathcal{W}(Q(\mathbf{a})) = (Q(P^{\circ(0)}(x)), \dots, Q(P^{\circ(n)}(x)), \dots).$$

L'introduction d'un polynôme  $Q$  dans cette proposition peut donc sembler une généralisation inutile. En fait ce qui va nous être utile est de savoir que, si  $R$  et  $Q$  sont divisibles par  $x$ , il en est de même des composantes de  $Q(\mathbf{a})$ . On peut montrer directement que, si  $Q(0) = 0$ , on a  $Q(W(x\mathbb{Z}[x])) \subset W(x\mathbb{Z}[x])$  mais cette vérification est un peu laborieuse.

**25.2. Exponentielle d'Artin-Hasse.** — Le résultat suivant contient de nouvelles congruences entre factorielles.

**Théorème 25.12.** — La série formelle

$$E(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \exp\left(\sum_{h=0}^{\infty} p^{-h} x^{p^h}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{h=0}^{\infty} p^{-h} x^{p^h}\right)^n = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s x^s$$

à des coefficients  $\alpha_i$  qui appartiennent à  $\mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q}$ .

*Preuve.* — En écrivant l'entier  $n$  sous la forme  $n = dp^h$  avec  $d$  premier à  $p$ , on trouve

$$-\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = \sum_{(d,p)=1} \frac{1}{d} \sum_{h=0}^{\infty} p^{-h} x^{dp^h}$$

La formule d'inversion de Moebius  $\sum_{di=n} \mu(i) = 0$  pour  $n \geq 2$  donne alors :

$$-\sum_{(i,p)=1} \frac{\mu(i)}{i} \log(1-x^i) = \sum_{(i,p)=(d,p)=1} \frac{\mu(i)}{di} \sum_{h=0}^{\infty} p^{-h} x^{dip^h}$$

$$= \sum_{(n,p)=1} \sum_{di=n} \frac{\mu(i)}{n} \sum_{h=0}^{\infty} p^{-h} x^{np^h} = \sum_{h=0}^{\infty} p^{-h} x^{p^h}$$

On trouve finalement

$$E(x) = \prod_{(i,p)=1} (1 - x^i)^{-\mu(i)/i}$$

et on conclut en remarquant que, pour  $a$  dans  $\mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q}$ , la série

$$(1 - x)^{-a} = \sum_s \frac{a(a+1) \cdots (a+s-1)}{s!} x^s$$

appartient à  $(\mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q})[[x]]$ . □

On met ensemble les congruences que nous venons de trouver.

**Proposition 25.13.** — Soit  $A$  un anneau et soit  $\mathbf{a}$  un élément de  $W(A)$ . On a

$$E(\mathbf{a}, x) \stackrel{\text{déf}}{=} \exp \left( \sum_{n=0}^{\infty} W_n(\mathbf{a}) p^{-n} x^{p^n} \right) = \prod_{i=0}^{\infty} E(a_i x^{p^i}).$$

En particulier, la série entière  $E(\mathbf{a}, x)$  appartient à  $A[[x]]$ . De plus on a :

- 1)  $E(\mathbf{a} + \mathbf{b}, x) = E(\mathbf{a}, x) E(\mathbf{b}, x)$
- 2) Si  $V(\mathbf{a}) = (0, a_0, a_1, \dots)$  alors  $E(V(\mathbf{a}), x) = E(\mathbf{a}, x^p)$ .

*Preuve.* — On a

$$\begin{aligned} E(\mathbf{a}, x) &= \exp \left( \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n a_i^{p^{n-i}} p^{i-n} x^{p^n} \right) = \exp \left( \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} a_i^{p^h} p^{-h} x^{p^{h+i}} \right) \\ &= \exp \left( \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} p^{-h} (a_i x^{p^i})^{p^h} \right) = \prod_{i=0}^{\infty} E(a_i x^{p^i}). \end{aligned}$$

La relation 1) est une conséquence immédiate de la définition de la somme dans l'anneau  $W(A)$ . Cette définition s'écrit en effet  $W_n(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = W_n(\mathbf{a}) + W_n(\mathbf{b})$ .

La relation 2) vient de la formule  $W_n(V(\mathbf{a})) = p W_{n-1}(\mathbf{a})$ . □

**Remarque 25.14.** — Si on note  $\mathbf{1} = (1, 0, \dots)$  l'élément neutre de la multiplication dans  $W(A)$ , on a  $E(\mathbf{1}, x) = E(x)$ .

**25.3. Vecteurs de Witt finis.** — En général, la dérivée logarithmique de la fonction  $E(\mathbf{a}, x)$  est une série entière. Pour étudier les équations différentielles (d'ordre un), le seul cas intéressant est celui où cette dérivée logarithmique est un polynôme, c'est-à-dire où les  $W_n(\mathbf{a})$  non nuls sont en nombre fini. Nous sommes donc amenés à construire des vecteurs de Witt ayant cette propriété.

**Définition 25.15.** — Un générateur de Tate  $\varpi$  est une suite  $(\pi_m)$  d'entiers non nuls d'une extension  $K$  de  $\mathbb{Q}_p$  vérifiant

$$P(\pi_0) = 0 \quad \text{et} \quad P(\pi_m) = \pi_{m-1} \quad \text{pour } m \geq 1$$

pour un polynôme  $P(x) = x^p + px + px^2 R(x)$  avec  $R$  dans  $\mathbb{Z}[x]$ . Le polynôme  $P$  est appelé polynôme de Lubin-Tate associé à  $\varpi$ .

On pose  $\pi_m = 0$  pour  $m < 0$ . Ainsi on a  $P(\pi_m) = \pi_{m-1}$  pour  $m$  dans  $\mathbb{Z}$ .

**Remarque 25.16.** — En regardant le polygone de Newton du polynôme  $P$ , il est facile de constater que  $|\pi_m| = \omega^{p^{-m}}$ . Plus précisément, si le degré du polynôme  $R$  est au plus  $p$ , toutes les racines non nulles du polynôme  $P^{\circ(m)}$  ont cette valeur absolue mais si le degré de  $R$  est plus grand que  $p$  alors  $P$  a aussi des racines de valeur absolue supérieure à 1. Ces dernières ne joueront aucun rôle.

**Proposition-définition 25.17.** — Soit  $\varpi$  un générateur de Tate et soit  $m \geq 0$  un entier. Il existe un (unique) vecteur de Witt  $\varpi_m$  de  $W(\pi_m \mathbb{Z}[\pi_m])$  tel que  $(\pi_m, \pi_{m-1}, \dots, \pi_0, 0, \dots) = \mathcal{W}(\varpi_m)$ . Autrement dit,  $W_i(\varpi_m) = \pi_{m-i}$  pour tout  $i \geq 0$ . Soit  $Q$  un polynôme de  $x\mathbb{Z}[x]$ . Le vecteur de Witt  $Q(\varpi_m) \stackrel{\text{déf}}{=} (\lambda_0, \lambda_1, \dots)$  a des coefficients  $\lambda_i$  dans  $\pi_m \mathbb{Z}[\pi_m]$ . En particulier on a  $|\lambda_i| < 1$  pour tout  $i \geq 0$ .

*Preuve.* — Soit  $P$  le polynôme de Lubin-Tate associé à  $\varpi$ . D'après la proposition 25.10,  $(P^{\circ(0)}(x), \dots, P^{\circ(n)}(x), \dots)$  appartient à  $\mathcal{W}(W(\mathbb{Z}[x]))$ . On spécialise  $x$  en  $\pi_m$  et on remarque que, par construction,  $P^{\circ(i)}(\pi_m) = \pi_{m-i}$  pour  $i \geq 0$ . On constate que  $(\pi_m, \dots, \pi_0, 0, \dots)$  appartient à  $\mathcal{W}(W(\mathbb{Z}[\pi_m]))$ .

Or  $\mathcal{W}(Q(\varpi_m))$  est la spécialisation de  $(Q(P^{\circ(0)}(x)), \dots, Q(P^{\circ(n)}(x)), \dots)$  qui appartient à  $\mathcal{W}(W(x\mathbb{Z}[x]))$  d'après la proposition 25.10-2. On en déduit que  $Q(\varpi_m)$  appartient à  $W(\pi_m \mathbb{Z}[\pi_m])$ .  $\square$

**Définition 25.18.** — Soit  $\varpi$  un générateur de Tate et soit  $m \geq 0$  un entier. On appelle *exponentielle de Robba* la série entière

$$e_{m,\varpi}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} E(\varpi_m, x) = \exp(\pi_m x + \pi_{m-1} p^{-1} x^p + \dots + \pi_0 p^{-m} x^{p^m}).$$

**Théorème 25.19.** — Soit  $\varpi$  un générateur de Tate et soit  $m \geq 0$  un entier. L'exponentielle de Robba  $e_{m,\varpi}(x)$  appartient à  $\mathbb{Z}[\pi_m][[x]]$  et a un rayon de convergence exactement égal à 1.

*Preuve.* — Puisque  $\varpi_m$  appartient à  $W(\mathbb{Z}[\pi_m])$ , la série  $e_{m,\varpi}$  appartient à  $\mathbb{Z}[\pi_m][[x]]$  d'après la proposition 25.13. Comme  $|\pi_m| < 1$ , ses coefficients sont des entiers  $p$ -adiques et elle a un rayon de convergence au moins égal à 1.

Posons  $\eta(x) = \pi_m + \dots + \pi_0 x^{p^m-1}$  de telle sorte que  $\frac{d}{dx}(e_{m,\varpi}) = \eta(x) e_{m,\varpi}$ . Pour  $\rho$  assez grand, on a

$$|\eta(x)|_\rho = \omega \rho^{p^m-1} > \rho^{-1}.$$

D'après le théorème 8.6, le module différentiel  $\mathcal{M}_\eta$  (de rang 1) associé à l'opérateur  $D - \eta$  a un rayon de convergence

$$\text{Ray}(\mathcal{M}_\eta, \rho) = \omega |\eta|_\rho^{-1} = \rho^{1-p^m}.$$

Pour  $\rho < 1$ , la fonction  $e_{m,\varpi}$  est une solution du module différentiel  $\mathcal{M}_\eta$  qui converge dans le disque générique  $D(t_\rho, \rho)$ . On constate donc que  $\text{Ray}(\mathcal{M}_\eta, \rho) = \rho$  pour  $\rho < 1$

(en fait pour  $\rho \leq 1$ ). La fonction  $\rho \mapsto \text{Ray}(\mathcal{M}_\eta, \rho)$  étant logarithmiquement concave et continue (proposition 9.3), il en résulte que  $\text{Ray}(\mathcal{M}_\eta, \rho) = \rho^{1-p^m} < \rho$  pour  $\rho > 1$  (et pas seulement pour  $\rho$  assez grand). Or, si  $e_{m,\varpi}$  avait un rayon de convergence  $R > 1$ , on devrait avoir  $\text{Ray}(\mathcal{M}_\eta, \rho) = \rho$  pour  $\rho < R$ . Donc le rayon de convergence de  $e_{m,\varpi}$  est exactement 1.  $\square$

**Remarque 25.20.** — Si  $R(x) = 0$ , c'est-à-dire si  $P(x) = x^p + px$ , alors on peut prendre  $\pi_0 = \pi$  (le  $\pi$  de Dwork). Les fonctions  $e_{m,\varpi}$  font partie de celles que Robba obtenait dans [45] lemme 10.8 (voir aussi [46] théorème 13.2.1) par une construction extrêmement astucieuse mais détournée.

Si  $P(x) = (x + 1)^p - 1$ , alors  $\pi_m = \zeta_m - 1$  avec  $\zeta_0^p = 1$  et  $\zeta_m^p = \zeta_{m-1}$ . Autrement dit  $\zeta_m$  est une racine  $p^m$ -ème primitive de l'unité. Les fonctions  $e_{m,\varpi}$  sont celles que Matsuda a construites quand il a introduit les vecteurs de Witt dans l'étude des exponentielles de Robba [37].

La décomposition donnée dans la proposition 25.13 ne permet pas, en général, de trouver le rayon de convergence de la fonction  $E(\mathbf{a}, x)$  car elle fait intervenir un produit infini. Lorsque  $\mathcal{W}(\mathbf{a})$  n'a qu'un nombre fini de composantes non nulles, les fonctions  $e_{m,\varpi}$  vont donner une décomposition en un produit fini permettant de calculer ce rayon de convergence.

**Proposition 25.21.** — Soit  $\varpi$  un générateur de Tate,  $m \geq 0$  un entier,  $A$  un anneau contenant  $\mathbb{Z}[\pi_m]$  et  $\mathbf{a} = (a_0, \dots)$  un vecteur de Witt de  $W(A)$ . On a

$$E(\varpi_m \mathbf{a}, x) = \prod_{i=0}^m e_{m-i,\varpi}(a_i x^{p^i}).$$

En particulier, si  $|a_i| < 1$  pour  $0 \leq i \leq m$ , le rayon de convergence de la fonction  $E(\varpi_m \mathbf{a}, x)$  est strictement plus grand que 1.

*Preuve.* — Par définition, on a  $W_i(\varpi_m \mathbf{a}) = \pi_{m-i} W_i(\mathbf{a})$  pour  $0 \leq i$ . On trouve

$$\begin{aligned} E(\varpi_m, x) &= \exp\left(\sum_{i=0}^m \pi_{m-i} \left(\sum_{j=0}^i p^j a_j^{p^{i-j}}\right) p^{-i} x^{p^i}\right) \\ &= \exp\left(\sum_{j=0}^m \sum_{h=0}^{m-j} \pi_{m-h-j} a_j^{p^h} p^{-h} x^{p^{h+j}}\right) = \prod_{j=0}^m e_{m-j,\varpi}(a_j x^{p^j}). \end{aligned}$$

Si  $|a_i| < 1$  pour  $0 \leq i \leq m$ , chacune des fonctions  $e_{m-i,\varpi}(a_i x^{p^i})$  a un rayon de convergence strictement supérieur à 1. Il en est de même de leur produit.  $\square$

L'un des points de départ des travaux de Dwork est de remarquer que la fonction  $\exp(\pi x - \pi x^p)$  a un rayon de convergence strictement supérieur à 1. Le résultat suivant en est une généralisation.

**Théorème 25.22 ([41] théorème 2.5).** — La fonction  $\frac{e_{m,\varpi}(x)}{e_{m,\varpi}(x^p)}$  a un rayon de convergence strictement supérieur à 1.

*Preuve.* — Comme  $\pi_{-1} = 0$ , on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{e_{m,\varpi}(x)}{e_{m,\varpi}(x^p)} &= \exp\left(\pi_m x + \pi_{m-1} \frac{x^p}{p} + \dots + \pi_0 \frac{x^{p^m}}{p^m} - \pi_m x^p - \dots - \pi_0 \frac{x^{p^{m+1}}}{p^m}\right) \\ &= \exp(p\pi_{m+1} x) \exp\left(\left(\pi_m - p\pi_{m+1}\right)x + \left(\pi_{m-1} - p\pi_m\right) \frac{x^p}{p} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \left(\pi_0 - p\pi_1\right) \frac{x^{p^m}}{p^m} + \left(\pi_{-1} - p\pi_0\right) \frac{x^{p^{m+1}}}{p^{m+1}}\right) \end{aligned}$$

Posons  $Q(x) = \frac{1}{x}(P(x) - xp) = x^{p-1} + px R(x)$  de telle sorte que

$$\pi_{k-1} - p\pi_k = P(\pi_k) - p\pi_k = \pi_k Q(\pi_k) = W_{m+1-k}(\varpi_{m+1} Q(\varpi_{m+1})).$$

Il vient

$$\frac{e_{m,\varpi}(x)}{e_{m,\varpi}(x^p)} = \exp(p\pi_{m+1} x) E(\varpi_{m+1} Q(\varpi_{m+1}), x)$$

Le polynôme  $Q$  appartient à  $x\mathbb{Z}[x]$ . D'après la proposition 25.17,  $Q(\varpi_m) = (\lambda_0, \dots)$  avec  $|\lambda_i| < 1$ . D'après la proposition 25.21, la fonction  $E(\varpi_m Q(\varpi_m), x)$  a un rayon de convergence strictement supérieur à 1. Comme  $|p\pi_{m+1}| < \omega$ , il en est de même de la fonction  $\exp(p\pi_{m+1} x)$ .  $\square$

**Exercice 25.23.** — Soit  $\varpi$  et  $\varpi'$  deux générateurs de Tate. En s'inspirant de la démonstration du théorème 25.22 montrer que la fonction  $e_{m,\varpi}(x)/e_{m,\varpi'}(x)$  a un rayon de convergence strictement supérieur à 1. [Poser  $Q(x) = \frac{1}{x}(P(x) - P'(x))$ ].

#### 25.4. Equations différentielles d'ordre un. —

**Proposition 25.24.** — Pour tout nombre  $\beta$  du corps  $K$  tel que  $|\beta| \leq \omega$  et tout entier  $n \geq 1$ , il existe une extension finie  $K'$  de  $K$ , une fonction  $f_{n,\beta}(x)$  de  $\mathcal{A}_{K'}([0, 1])$  et un polynôme  $L_{n,\beta}$  de degré  $n-1$  de  $K'[x]$  tels que  $D(f_{n,\beta}) = (\beta x^{n-1} + L_{n,\beta}(x)) f_{n,\beta}$ .

*Preuve.* — On écrit  $n = dp^m$  avec  $(d, p) = 1$  et on choisit un générateur de Tate  $\varpi$  et un nombre  $\gamma$  tel que  $\beta = \pi_0 d \gamma^{p^m}$ . On a  $|\beta| \leq \omega = |\pi_0|$  c'est-à-dire  $|\gamma| \leq 1$ . On pose

$$f_{n,\beta}(x) = e_{m,\varpi}(\gamma x^d) = \exp\left(\sum_{i=0}^m \pi_{m-i} p^{-i} \gamma^{p^i} x^{dp^i}\right),$$

La fonction  $f_{n,\beta}$  appartient à  $\mathbb{Z}[\pi_m, \gamma][[x]]$  donc à  $\mathcal{B}_{K[\pi_m, \gamma]}([0, 1])$  (c'est même une fonction analytique bornée par 1 dans son disque de convergence) et on trouve

$$D(f_{n,\beta}) f_{n,\beta}^{-1} = \sum_{i=0}^m \pi_{m-i} d \gamma^{p^i} x^{dp^i-1} = \beta x^{n-1} + \sum_{i=0}^{m-1} \pi_{m-i} d \gamma^{p^i} x^{dp^i-1}$$

ce qui est le résultat cherché avec  $K' = K(\pi_m, \gamma)$ .  $\square$

**Remarques 25.25.** — Si  $|\beta| < \omega$ , on constate que la fonction  $e_{n,\beta}$  a un rayon de convergence strictement supérieur à 1.

Si  $|\beta| = \omega$ , on constate aussi que les coefficients de  $L_{n,\beta}$  ont une valeur absolue

$$|\pi_{m-i} d\gamma^i| = |\pi_{m-i}| = \omega^{p^{-m+i}} \quad (0 \leq i \leq m-1)$$

qui se trouve dans l'intervalle  $]\omega, 1[$ .

**Théorème 25.26.** — Le  $\mathcal{H}_{K'}^\dagger$ -module  $\mathcal{M}_{n,\beta} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{H}_{K'}^\dagger f_{n,\beta}(\frac{1}{x})$  est un module différentiel (de rang 1) soluble. Il est isomorphe à  $\mathcal{H}_{K'}^\dagger$ , si et seulement si  $|\beta| < \omega$ .

Les  $\mathcal{H}_{K'}^\dagger$ -modules différentiels  $\tilde{\varphi}^*(\mathcal{M}_{n,\beta})$  et  $\mathcal{M}_{n,\beta}$  sont isomorphes.

*Preuve.* — Comme

$$\eta(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{d}{dx} \left( f_{n,\beta}(\frac{1}{x}) \right) f_{n,\beta}^{-1}(\frac{1}{x}) = -\beta x^{-n-1} - x^{-2} L_{n,\beta}(\frac{1}{x}) \in K'[\frac{1}{x}] \subset \mathcal{H}_{K'}^\dagger,$$

$\mathcal{M}_{n,\beta}$  est un  $\mathcal{H}_{K'}^\dagger$ -module différentiel. Plus précisément on a

$$\mathcal{M}_{n,\beta} = \mathcal{H}_{K'}^\dagger \langle D \rangle / \mathcal{H}_{K'}^\dagger \langle D \rangle \cdot (D - \eta).$$

Comme  $f_{n,\beta}(\frac{1}{x})$  appartient à  $\mathcal{B}_{K'}(]1, \infty])$ , l'espace  $\text{Hom}_{\mathcal{H}_{K'}^\dagger \langle D \rangle}(\mathcal{M}_{n,\beta}, \mathcal{B}_{K'}(]1, \infty])$  est de dimension 1. Le corollaire 14.5 affirme alors que

$$\dim_{K'} \left( \text{Hom}_{\mathcal{H}_{K'}^\dagger \langle D \rangle}(\mathcal{M}_{n,\beta}, \mathcal{A}_{t_1}(1)) \right) = 1 = \dim_{\mathcal{H}_{K'}^\dagger}(\mathcal{M}_{n,\beta}).$$

Autrement dit,  $\text{Ray}(\mathcal{M}_{n,\beta}, 1) = 1$  et  $\mathcal{M}_{n,\beta}$  est soluble.

Le module différentiel  $\mathcal{M}_{n,\beta}$  est isomorphe à  $\mathcal{H}_{K'}^\dagger$ , si et seulement si  $f_{n,\beta}(\frac{1}{x})$  appartient à  $\mathcal{H}_{K'}^\dagger$ , c'est-à-dire si  $f_{n,\beta}$  a un rayon de convergence strictement supérieur à 1 donc si  $|\beta| < \omega$ .

On choisit l'automorphisme  $\sigma$  par  $\sigma(\pi_m) = \pi_m$  et  $\sigma(\gamma) = \gamma^p$ . D'après le théorème

25.22, la fonction  $f(x) = \frac{e_{m,\varpi}(x)}{e_{m,\varpi}(x^p)}$  a un rayon de convergence strictement supérieur à 1. Donc la fonction

$$\frac{f_{n,\beta}(x^{-1})}{f_{n,\beta}^\sigma(x^{-p})} = \frac{e_{m,\varpi}(\gamma x^{-d})}{e_{m,\varpi}(\gamma^p x^{-dp})} = f(\gamma x^{-d})$$

appartient à  $\mathcal{H}_{K'}^\dagger$ , et le module différentiel  $\tilde{\varphi}^*(\mathcal{M}_{n,\beta}) = \mathcal{H}_{K'}^\dagger f_{n,\beta}^\sigma(\frac{1}{x^p})$  est isomorphe à  $\mathcal{M}_{n,\beta}$ .  $\square$

## CHAPITRE IX ANNEXES

### Index des notations

- |   |  |
|---|--|
| $A\langle D \rangle$ , 69<br>$\mathcal{A}$ , 22, 64<br>$\mathcal{A}(I)$ , 22<br>$\mathcal{A}([\rho])$ , 22<br>$\mathcal{A}^*(I)$ , 49<br>$\mathcal{A}^{\neq 0}(I)$ , 49<br>$\mathcal{A}_K(I)$ , 22<br>$\mathcal{A}_a(\rho)$ , 37<br>$\mathcal{A}_{a,K}(\rho)$ , 37<br>$\mathcal{A}_{t_\rho}(r)$ , 38<br>$\mathcal{B}_a(\rho)$ , 37<br>$\mathcal{B}_{a,K}(\rho)$ , 37<br>$\mathcal{B}_{t_\rho}(r)$ , 38<br>$\mathbb{C}_p$ , 6, 9<br>$D$ , 32<br>$D(a, r)$ , 6, 37<br>$D(a, r^+)$ , 6<br>$D = \frac{d}{dx}$ , 69, 86<br>$D_K(a, r)$ , 6<br>$D_K(a, r^+)$ , 6<br>$D_\alpha^\infty(\varepsilon)$ , 40<br>$D_1^\infty(\varepsilon)$ , 65<br>$D_\rho^0(\varepsilon)$ , 40<br>$\text{diag}(\mu, A)$ , 70<br>$\text{diag}(a_1, \dots, a_\mu)$ , 136<br>$\text{div}(f)$ , 49<br>$\mathfrak{D}(I)$ , 49<br>$\mathfrak{D} = K((x))\langle D \rangle$ , 95<br>$\mathfrak{D}^+(I)$ , 49<br>$E_\rho$ , 33<br>$E(\mathbf{a}, x)$ , 182<br>$E(x)$ , 181<br>$\mathfrak{E}\mathfrak{p}(\mathcal{M})$ , 123<br>$\mathfrak{E}_\mu$ , 115<br>$\varepsilon_{m,\varpi}$ , 183<br>$\mathcal{F}(I)$ , 23, 146<br>$\mathcal{F}^*(I)$ , 49<br>$\varphi$ , 149<br>$f_{n,\beta}$ , 185<br>$G$ , 87<br>$G_s$ , 72, 87<br>$\text{Gl}(\mu, A)$ , 70<br>$H^0(\mathcal{C}(I), \mathcal{M})$ , 48<br>$H^1(\mathcal{C}(I), \mathcal{M})$ , 48<br>$\text{Hom}_A(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ , 72<br>$\mathcal{H}(I)$ , 35 | $\mathcal{H}^\dagger$ , 64<br>$I$ , 21<br>$I^p$ , 149<br>$I_\alpha = [\alpha, 1[$ , 63<br>$I$ (matrice identité), 72<br>$I_{J,J'}$ , 46, 49<br>$\overset{\circ}{I}$ , 50<br>$K^{\text{alg}}$ , 6<br>$\widehat{K}^{\text{alg}}$ , 6<br>$K$ corps valué complet, 6<br>$ K^* $ , 9<br>$\sqrt{ K^* }$ , 6<br>$\text{“lim”}$ , 20, 50<br>$\text{“lim”}_{n \rightarrow \infty}$ , 20, 50<br>$\text{Mat}(\mu, A)$ , 70<br>$\text{MLC}$ , 70<br>$\text{MLCF}(\mathcal{R})$ , 160<br>$\text{MLCS}(\mathcal{R})$ , 95<br>$\text{MLCSNL}(\mathcal{R})$ , 175<br>$\mathcal{M}^\tau$ , 78<br>$\mathcal{M}^{\leq \lambda}$ , 172<br>$\mathcal{M}_\alpha$ , 94<br>$\mathcal{M}_{> \lambda}$ , 169<br>$\mathcal{M}_{n,\beta}$ , 186<br>$\tau^*(\mathcal{M})$ , 78<br>$\tau_*(\mathcal{M})$ , 79<br>$N_\rho(f)$ , 22<br>$\text{New}(\mathcal{M})$ , 174<br>$n_\rho(f)$ , 22<br>$\mathcal{O}_{\rho,r}$ , 104<br>$P^{o(n)}$ , 178<br>$\pi_m$ , 183<br>$\text{pt}(\mathcal{M})$ , 95<br>$\varpi$ , 183<br>$\varpi_m$ , 183<br>$\mathbb{Q}_p$ , 6<br>$\mathcal{R}$ , 63<br>$\text{Ray}(\mathcal{M}, 1^-)$ , 95<br>$\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho)$ , 87, 95<br>$\text{Rob}(\mathcal{A}(I))$ , 116<br>$\mathcal{T}(\mu, A)$ , 129<br>$\mathcal{T}^\rho(\mu, A)$ , 129<br>$\mathcal{T}_\lambda$ , 161<br>$\mathcal{T}_{\lambda,Q}$ , 161<br>$\mathcal{T}_{\rho,r}$ , 104 |
|---|--|

$t_{0,\rho}$ , 37	$\chi(\mathcal{M}, B)$ , 77
$t_{a,\rho}$ , 37	$(a)_n$ , 108
$W(A)$ , 180	$\zeta^\Delta$ , 116
$\mathcal{C}(I)$ , 21	$ \cdot _\infty$ sur $\mathbb{N}$ (valeur absolue ordinaire), 112
$\mathcal{C}_\Omega(I)$ , 21	$ \cdot $ sur $\mathbb{N}$ (valeur absolue $p$ -adique), 112
$w_{\mathcal{Z}}(\rho)$ , 59	$ \cdot $ sur $K$ , 6
$Y_G(x, y)$ , 88	$ \cdot _\rho$ sur $K[x]$ , 27
$\mathbb{Z}_p$ , 6	$ \cdot _\rho$ sur $\mathcal{A}(I)$ , 22
$\alpha^{(h)}$ , 112	$ \cdot _\gamma$ sur $A\langle D \rangle$ , 80, 83
$\tilde{\Delta} \oplus \tilde{\Delta}'$ , 124	$\ \cdot\ _{\mathcal{C}(I)}$ sur $\mathcal{B}(I)$ , 35
$\phi(I)$ , 78	$\ \cdot\ _{\mathcal{C}(J)}$ sur $\mathcal{A}(J)$ , 28
$\phi^*$ , 78	$\ \cdot\ _{\epsilon,\rho}$ sur un $E_\rho$ -module différentiel, 86
$f^\sigma$ , 78	$\ \cdot\ _{\epsilon,Q}$ sur un $A$ -module différentiel, 82
$f^+$ , 40	$\ \cdot\ _{\text{Sp},\epsilon,\rho}$ sur un $E_\rho$ -module différentiel, 87
$f^-$ , 40	$\ \cdot\ _{\text{op},B}$ sur $A\langle D \rangle$ , 79
$\Gamma_h$ , 116	$\ \cdot\ _\rho$ sur les matrices, 87
$k[x]_\rho$ , 27	$\ \cdot\ _{\rho,\rho^\lambda}$ , 82
$\text{New}(f)$ , 35	$\ \cdot\ _{\rho,r}$ sur $E_\rho\langle D \rangle$ , 80
$\pi$ , 94	$\ \cdot\ _{\lambda,\rho}$ , 161
$\sigma^*$ , 78	$\ \cdot\ _{\text{op},\rho,r}$ , 103
$\Omega$ , 37	$\ \cdot\ _{\text{op},\lambda,\rho}$ , 161
$\omega$ , 8	$\tilde{\epsilon}$ , 114

## Index terminologique

Absolument convexe, 12	C-compacte (partie —), 15
Absolument irréductible, 175	C-extraite (suite), 17
Absorbante (partie —), 9	Caractéristique résiduelle, 6
Anneau	Changement de variable, 78
$p$ non ramifié, 178	Cohérent, 52
d'Amice, 63	Compactoïde (partie —), 17
de Bezout, 57	Complet, 12
de Robba, 63	Condition
propriétés algébriques, 63	de Fuchs, 96
propriétés topologiques, 64	de Mittag-Leffler, 42
de valuation, 6	de Mittag-Leffler forte, 42
des vecteurs de Witt, 180	Convexe, 12
différentiel, 68	espace localement —, 11
Antécédent	partie —, 12
faible, 160	partie absolument —, 12
fort, 160	topologie localement —, 11
Application horizontale, 72	Corps
Banach (espace de —), 11	à valuation discrète, 9, 35
Base de filtre, 11	des éléments analytiques, 33
convexe, 16	des constantes, 5, 68
Base pseudo-cyclique, 92	des fonctions méromorphes, 23
Bezout (anneau de —), 57	des restes, 6
Birkhoff (théorèmes de) , 129	différentiel, 68
Bornée (partie —), 9	localement compact, 10
Bornés	maximalement complet, 9
de $\mathcal{A}(I)$ , 39	sphériquement complet, 9, 20

- ultramétrique, 6
- Couronne, 21
- Cyclique (théorème du vecteur  $\rightarrow$ ), 73
- Disque générique, 33
- Diviseur, 48
  - effectif, 48
- Divisible (module), 14
- Dual d'un espace topologique, 9
- Dwork-Robba
  - majorations explicites, 108
  - théorème de décomposition, 107
- Élément analytique, 33
  - dans la couronne  $\mathcal{C}(I)$ , 35
- Effectif (diviseur), 48
- Emboîtée (famille de parties), 11
- Ensemble affinoïde connexe, 29
- Ensemble ordonné filtrant, 41
- Enveloppe injective, 18
- Espace
  - analytique, 21
  - complet, 12
  - de Banach, 11
  - de Fréchet, 11
  - de Montel, 65
  - dual, 9
  - localement convexe, 11
  - normé, 11
  - séquentiellement complet, 12
  - tonnelé, 12
  - vectorel de dimension finie, 10
  - vectorel topologique, 9
- Espace de Fréchet, 12
- Essentielle (extension  $\rightarrow$ ), 13
- Exponentielle de Robba, 183
- Exposant
  - à différences non Liouville, 115
  - non Liouville, 115
  - d'un module différentiel quotient, 124
  - d'un sous-module différentiel, 124
  - ensemble des  $\rightarrow$ s, 112
  - rationalité de l' $\rightarrow$ , 170, 173
  - d'un  $\mathcal{A}(I)$ -module différentiel
    - $I$  fermé, 123
    - $I$  ouvert, 124
  - d'un  $\mathcal{R}$ -module différentiel, 170
    - de pente nulle, 170
- Exposant naïf, 112
- Exposants, 98
- Extension essentielle, 13
- Extension immédiate, 9
- Faisceau, 46
  - cohérent, 52
  - groupes de cohomologie d'un, 48
  - libre, 55
  - localement libre, 52
- Filtre, 11
  - convergent, 11
  - convexe, 16
  - convexe maximal, 16
  - de Cauchy, 11
  - plus fin, 11
- Foncteur de Frobenius, 149
- Fonction
  - analytique, 22
  - analytique bornée, 35
  - méromorphe, 23
  - surconvergente, 63
- Fréchet (espace de  $\rightarrow$ ), 11
- Frobenius (structure de), 159, 160
- Fuchs
  - (condition de), 96
- Générateur
  - de Tate, 182
- Groupe des valeurs absolues, 6
- Groupes de cohomologie, 48
- Hahn-Banach (théorème de), 20
- Hasse-Arf
  - théorème, 174
- Hensel (lemme de)
  - classique, 28
  - général, 26
  - pour les fonctions analytiques, 30
  - pour les polynômes, 27
  - pour les polynômes différentiels, 85, 86
- Idéal maximal, 6
- Image inverse, 149
- Indice
  - d'un module différentiel, 77
  - d'un opérateur différentiel injectif, 110
- Intersections finies non vides, 11
- Lazard (théorème de), 52, 60
- Lemme de Hensel
  - classique, 28
  - général, 26
  - pour les fonctions analytiques, 30
  - pour les polyômes, 27
  - pour les polynômes différentiels, 85, 86
- Libre, 55
- Limite banachique
  - d'une suite de  $K$ , 20
  - d'une suite de fonctions, 50
- Limite projective, 41
- Linéairement compact ( $\mathcal{O}_K$ -module  $\rightarrow$ ), 13
- Liouville
  - exposant à différences non  $\rightarrow$ , 115
  - exposant non  $\rightarrow$ , 115

- nombre de, 113
- Localement convexe (espace —), 11
- Localement libre, 52
- Logarithmiquement (avoir — une propriété), 23
- Lubin-Tate (polynôme de), 183
- Majorations explicites de Dwork-Robba , 108
- Matrice représentant la dérivation, 71
- Maximalement complet (corps), 9
- Mittag-Leffler
  - (théorème de), 44
  - Condition de, 42
  - Condition forte, 42
  - décomposition de, 33
- Module
  - linéairement compact, 13
- Module différentiel, 70, 71
  - complètement irréductible, 175
  - de pentes supérieures à  $\lambda$ , 169
  - de Robba, 115
  - pentés d'un —, 174
  - purement de pente  $\beta$ , 169
  - singulier-régulier, 96
  - soluble, 76, 95
- Monodromie  $p$ -adique, 170
- Montel (espace de —), 65
- Multiplicité, 98
- Nombre de Liouville, 113
- Norme, 11
- Norme de  $K$ -algèbre, 79
- Norme de Gauss
  - sur  $A(D)$ , 80
- Norme de Gauss, 22, 33
- Norme spectrale, 87
- Normes équivalentes, 11
- Partie
  - absorbante, 9
  - bornée, 9
  - c-compacte, 15
  - compactoïde, 17
- Pente
  - plus grande —, 95
  - purement de —  $\beta$ , 169
  - supérieure à  $\lambda$ , 169
- Pentes, 98, 101
- Pentes d'un module différentiel, 174
- Pochhammer (symbole de ), 108
- Point
  - adhérent, 11
  - de Berkovich, 32, 37
  - fermé, 21
  - générique, 37, 88
  - géométrique, 21
  - ordinaire, 148
  - singulier régulier, 96
- Polaire (d'une partie), 9
- Polygone de Newton, 23, 83, 98, 174
- Polygone de valuation, 24
- Polynôme
  - $\rho$ -extrémal, 25
  - de Lubin-Tate, 183
  - différentiel, 69
  - différentiel hypergéométrique, 108
- Préfaisceau, 46
- Présentation (d'un module différentiel), 81
- Presque périodique, 36
- Puiseux (théorème de), 101
- Résolvante, 88
- Rayon
  - d'un point générique, 37
- Rayon de convergence
  - fonction —, 93
- Rayon de convergence, 87
- Restriction des scalaires, 79
- Robba
  - module différentiel de, 115
  - théorème de l'indice de, 110
- Séquentiellement complet, 12
- Sections globales, 54
- Semi-norme, 10
- Semi-norme quotient, 82
- Signature (d'un  $\mathcal{A}(J)$ -module), 52
- Singularité
  - apparente, 146
  - apparente (élimination), 147
  - régulière, 148
- Soluble (Module différentiel), 76
- Sphériquement complet (corps —), 9
- Structure de Frobenius, 160
  - faible, 159
  - forte, 160
- Suite exacte longue, 48
- Symbole de Pochhammer, 108
- Système cofinal dénombrable, 41
- Système projectif, 41
  - d'espaces vectoriels, 44
  - de groupes, 44
- Tate (générateur de), 182
- Théorème
  - d'annulation de Mittag-Leffler, 44
  - de Baire, 12
  - de Birkhoff algébrique, 129, 143
  - de Birkhoff analytique, 136, 142, 144
  - de décomposition de Mittag-Leffler, 33
  - de Hahn Banach, 20
  - de Hasse-Arf, 174

- de l'indice de Robba, 110
- de Lazard, 52, 60
- de Puiseux, 101
- du vecteur cyclique, 73
- Tonnelé (espace topologique —), 12
- Topologie
  - définie par la valeur absolue, 6
  - de  $\mathcal{A}(I)$ , 39
  - localement convexe, 11
  - produit, 17
  - quotient, 82
- Topologique (espace vectoriel), 9
- Transformations de cisaillement, 97
- Transport de structure, 78
- Ultrafiltres, 11
- Uniformisante, 9, 36
- Valeur absolue non-archimédienne, 6
- Valuation, 6
- Valuation discrète, 9, 35
- Witt (anneau des vecteurs de), 180
- Wronskien, 108

### Références

- [1] Y. ANDRÉ – “Filtrations de type Hasse-Arf et monodromie  $p$ -adique.”, *Invent. Math.* **148** (2002), no. 2, p. 285–317.
- [2] E. ARTIN – *Algebraic numbers and algebraic functions.*, Notes on Mathematics and its Applications. New York-London-Paris: Gordon and Breach, Science Publishers. xiv, 349 p. , 1967.
- [3] E. ARTIN – *Algebraic numbers and algebraic functions. Reprint of the 1967 original.*, Providence, RI: AMS Chelsea Publishing. xiii, 349 p. , 2006.
- [4] G. D. BIRKHOFF – “The generalized *Riemann* problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and  $q$ -difference equations.”, *Amer. Acad. Proc.* **49** (1913), p. 521–568, (*Amer. Math. Soc. Bull.* (2) 19, 508-509).
- [5] E. BOMBIERI & S. SPERBER – “On the  $p$ -adic analyticity of solutions of linear differential equations.”, *Ill. J. Math.* **26** (1982), p. 10–18.
- [6] N. BOURBAKI – *Éléments de mathématiques. Algèbre. Chapitre 10: Algèbre homologique.*, Paris etc.: Masson. VII, 216 p. , 1980.
- [7] ———, *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitres 4 à 7.*, Paris etc.: Masson. VII, 422 p. , 1981.
- [8] ———, *Éléments de mathématique. Topologie générale. Chapitres 1 à 4. Reprint of the 1971 original.*, Berlin: Springer. xv, 350 p. , 2007.
- [9] G. CHRISTOL – “Décomposition des matrices en facteurs singuliers applications aux équations différentielles.”, Groupe Etude Anal. Ultramétrique, 7e-8e Années 1979-1981, Exposé No.5, 17 p. (1981)., 1981.
- [10] ———, “Systèmes différentiels linéaires  $p$ -adiques, structure de Frobenius faible.”, *Bull. Soc. Math. Fr.* **109** (1981), p. 83–122.
- [11] ———, *Differential modules and  $p$ -adic differential equations. (Modules différentiels et équations différentielles  $p$ -adiques.)*, Queen’s Papers in Pure and Applied Mathematics, 66. Kingston, Ontario, Canada: Queen’s University. VI, 218 p. , 1983.
- [12] ———, “Un théorème de transfert pour les disques singuliers réguliers.”, *Cohomologie  $p$ -adique*, Astérisque 119-120, 151-168 (1984)., 1984.
- [13] G. CHRISTOL & B. M. DWORK – “Modules différentiels sur les couronnes.”, *Ann. Inst. Fourier* **44** (1994), no. 3, p. 663–701.
- [14] G. CHRISTOL & Z. MEBKHOUT – “Sur le théorème de l'indice des équations différentielles  $p$ -adiques. II.”, *Ann. Math.* **146** (1997), no. 2, p. 345–410.
- [15] ———, “Sur le théorème de l'indice des équations différentielles  $p$ -adiques. III.”, *Ann. Math.* **151** (2000), no. 2, p. 385–457.

- [16] ———, “Sur le théorème de l’indice des équations différentielles  $p$ -adiques. IV.”, *Invent. Math.* **143** (2001), no. 3, p. 629–672.
- [17] ———, “Équations différentielles  $p$ -adiques et coefficients  $p$ -adiques sur les courbes.”, Berthelot, Pierre (ed.) et al., *Cohomologies  $p$ -adiques et applications arithmétiques (II)*. Paris: Société Mathématique de France. Astérisque. 279, 125-183 (2002)., 2002.
- [18] R. CREW – “Finiteness theorems for the cohomology of an overconvergent isocrystal on a curve.”, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **31** (1998), no. 6, p. 717–763.
- [19] N. DE GRANDE-DE KIMPE, J. KAKOL, C. PEREZ-GARCIA & W. SCHIKHOF – “ $p$ -adic locally convex inductive limits.”, Schikhof, W. H. (ed.) et al.,  *$p$ -adic functional analysis. Proceedings of the fourth international conference, Nijmegen, Netherlands, June 3–7, 1996*. New York, NY: Marcel Dekker. Lect. Notes Pure Appl. Math. 192, 159-222 (1997)., 1997.
- [20] B. M. DWORK – “On  $p$ -adic differential equations. II: The  $p$ -adic asymptotic behavior of solutions of ordinary linear differential equations with rational function coefficients.”, *Ann. Math.* **98** (1973), p. 366–376.
- [21] ———, “On exponents of  $p$ -adic differential modules.”, *J. Reine Angew. Math.* **484** (1997), p. 85–126.
- [22] B. M. DWORK & P. ROBBA – “On ordinary linear  $p$ -adic differential equations.”, *Trans. Am. Math. Soc.* **231** (1977), p. 1–46.
- [23] ———, “Effective  $p$ -adic bounds for solutions of homogeneous linear differential equations.”, *Trans. Am. Math. Soc.* **259** (1980), p. 559–577.
- [24] M. EICHLER – *Introduction to the theory of algebraic numbers and functions.*, New York and London: Academic Press 1966. XIV, 324 p. , 1966.
- [25] A. ESCASSUT – *Analytic elements in  $p$ -adic analysis.*, Singapore: World Scientific. x, 390 p. , 1995.
- [26] A. ESCASSUT & L. HADDAD – *Correspondances privées*, 2007.
- [27] J. FRESNEL & M. VAN DER PUT – *Géométrie analytique rigide et applications.*, Progress in Mathematics, 18. Boston-Basel-Stuttgart: Birkhäuser. XII, 215 p., 1981.
- [28] A. GROTHENDIECK – “Sur la classification des fibres holomorphes sur la sphère de Riemann.”, *Am. J. Math.* **79** (1957), p. 121–138.
- [29] ———, “Éléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de Jean Dieudonné) III : Étude cohomologique des faisceaux cohérents (première partie).”, *Publ. Math., Inst. Hautes études. Sci.* **11** (1961), p. 5–167.
- [30] ———, *Espaces vectoriels topologiques.*, Sao Paulo: Publicacao da Sociedade de Matematica de Sao Paulo. IX, 329 p., 1964.
- [31] L. GRUSON – “Théorie de Fredholm  $p$ -adique.”, *Bull. Soc. Math. Fr.* **94** (1966), p. 67–95.
- [32] I. KAPLANSKY – “Maximal fields with valuations.”, *Duke Math. J.* **9** (1942), p. 303–321.
- [33] N. M. KATZ – “Nilpotent connections and the monodromy theorem: Applications of a result of Turrittin.”, *Publ. Math., Inst. Hautes études. Sci.* **39** (1970), p. 175–232.
- [34] K. S. KEDLAYA – “A  $p$ -adic local monodromy theorem.”, *Ann. Math.* **160** (2004), no. 1, p. 93–184.
- [35] R. KIEHL – “Theorem A und B in der nichtarchimedischen Funktionentheorie.”, *Invent. Math.* **2** (1967), p. 256–273.
- [36] M. LAZARD – “Les zéros des fonctions analytiques d’une variable sur un corps valué complet.”, *Publ. Math., Inst. Hautes études. Sci.* **14** (1962), p. 47–75.
- [37] S. MATSUDA – “Local indices of  $p$ -adic differential operators corresponding to Artin-Schreier-Witt coverings.”, *Duke Math. J.* **77** (1995), no. 3, p. 607–625.

- [38] Z. MEBKHOUT – “Analogie  $p$ -adique du théorème de Turrittin et le théorème de la monodromie  $p$ -adique.”, *Invent. Math.* **148** (2002), no. 2, p. 319–351.
- [39] S. OORTWIJN – “Locally convex modules over valuation rings.”, Universiteit Nijmegen thesis, 191 p., 1995.
- [40] S. PRIESS-CRAMPE & P. RIBENBOIM – “A general Hensel’s lemma.”, *J. Algebra* **232** (2000), no. 1, p. 269–281.
- [41] A. PULITA – “Rank one solvable  $p$ -adic differential equations and finite Abelian characters via Lubin-Tate groups.”, *Math. Ann.* **337** (2007), no. 3, p. 489–555.
- [42] P. ROBBA – “On the index of  $p$ -adic differential operators. I.”, *Ann. Math.* **101** (1975), p. 280–316.
- [43] ———, “Lemmes de Hensel pour les opérateurs différentiels. Application à la réduction formelle des équations différentielles.”, *Enseign. Math.* **26** (1980), p. 279–311.
- [44] ———, “Conjectures sur les équations différentielles  $p$ -adiques linéaires.”, Groupe d’Étude Anal. Ultramétrique 12ème année 1984/85, No.1, Exposé No.2, 8 p., 1985.
- [45] ———, “Indice d’un opérateur différentiel  $p$ -adique. IV: Cas des systèmes. Mesure de l’irrégularité dans un disque.”, *Ann. Inst. Fourier* **35** (1985), no. 2, p. 13–55.
- [46] P. ROBBA & G. CHRISTOL – *Équations différentielles  $p$ -adiques. Applications aux sommes exponentielles.*, Paris: Hermann. xii, 236 p. , 1994.
- [47] P. ROBBA – “Solutions bornées des systèmes différentiels linéaires. Application aux fonctions hypergéométriques. (D’après un travail en commun avec B. Dwork).”, Groupe d’Étude Anal. Ultramétrique, 3ème année 1975/76, Fasc. 1, Exposé No.5, 16 p., 1977.
- [48] W. H. SCHIKHOF – “Some properties of  $c$ -compact sets in  $p$ -adic spaces.”, Report 8632, Mathematisch Instituut Katholieke Universiteit Nijmegen the Netherlands 12 p., 1986.
- [49] J.-P. SERRE – *Local fields. (Corps locaux.)*, Publications de l’Institut de Mathématique de l’Université de Nancago 8; Actualités Scientifiques et Industrielles 1296. Paris: Hermann & Cie. 243 pp. , 1962.
- [50] P. T. YOUNG – “Radii of convergence and index for  $p$ -adic differential operators.”, *Trans. Am. Math. Soc.* **333** (1992), no. 2, p. 769–785.