μ=1		classic			new			behavior on median instance							
r	ν	min	med	max	min	med	max	class.	nb	mono.	nbits	tord	δs	δe	$\delta_{\mathbb{Z}}$e
2	2	0.12	0.13	0.14	0.45	0.54	0.72	**0.13**	2	86%	100	8	10	71	–
2	3	0.14	0.15	0.16	0.66	0.70	2.0	**0.15**	2	81%	100	12	0.19	35	–
2	4	0.14	0.15	0.16	0.47	1.3	1.5	**0.15**	4	83%	168	16	4.1	22	9
2	5	0.22	0.23	0.23	0.55	1.1	2.0	**0.23**	2	83%	190	20	0.03	26	–
2	6	0.30	0.32	0.33	0.69	1.0	4.0	**0.30**	2	80%	104	24	0.53	35	–
3	2	0.16	0.17	0.18	0.79	1.2	2.6	**0.16**	2	83%	460	36	1.8	88	–
3	3	0.31	0.32	0.32	1.1	2.4	9.4	**0.32**	3	83%	400	54	4.6	64	–
3	4	0.54	0.60	0.65	1.6	2.9	3.8	**0.54**	2	84%	762	36	3.8	83	8
3	5	1.6	1.7	1.8	2.7	20	712	**1.8**	3	98%	1600	45	0.24	17	–
3	6	2.8	5.2	5.3	2.1	7.8	609	**2.8**	4	95%	400	54	0.48	35	12
4	2	0.37	0.38	2.2	1.1	3.5	15	**0.38**	2	89%	1600	64	15	70	–
4	3	0.73	1.2	7.8	2.4	4.0	20	**1.2**	3	90%	665	48	4.2	62	11
4	4	2.0	2.4	2.5	1.4	15	∞	**2.5**	3	94%	1352	64	0.64	55	–
4	5	9.0	10	14	2.9	35	89	**11**	3	99%	1714	80	1.6	134	–
4	6	51	59	63	2.9	**11**	15	51	3	94%	780	96	0.14	72	31
5	2	*19*	*29*	*244*	1.3	**4.7**	6.9	*85*	2	93%	1200	50	1.4	41	–
5	3	*45*	*124*	*501*	7.3	**9.1**	34	*45*	3	96%	1200	75	3.8	36	–
5	4	*126*	*161*	*1007*	6.0	**89**	136	*161*	2	98%	4332	100	3.9	34	–
5	5	*449*	*1126*	∞	15	**103**	123	*1126*	3	100%	2396	100	1.6	111	–
5	6	*742*	*829*	*1560*	17	**346**	∞	*773*	2	99%	5516	100	0.44	44	–
6	2	*194*	*301*	*972*	2.5	**7.2**	75	*319*	2	90%	1372	72	5.9	62	–
6	3	*332*	*580*	*1804*	10	**770**	∞	*1177*	3	100%	5608	100	1.6	132	–
6	4	*710*	*923*	*3223*	17	**20**	3160	*3223*	3	97%	1052	100	3.0	156	22
6	5	*749*	*1874*	∞	33	**260**	∞	*1874*	2	100%	4146	100	1.4	69	29
6	6	∞	∞	∞	44	**197**	968	∞	2	98%	3184	100	1.0	34	–
7	2	*233*	*297*	*539*	24	**112**	∞	*297*	2	98%	3628	196	2.4	41	–
7	3	*512*	*1199*	∞	70	**549**	∞	*1199*	2	99%	7896	100	1.0	64	6
7	4	*922*	∞	∞	40	**1040**	∞	*1520*	3	100%	4104	100	0.60	60	–
7	5	*3085*	∞	∞	541	**1790**	∞	∞	2	100%	3952	100	0.55	96	12
7	6	∞	∞	∞	409	**1140**	∞	∞	2	99%	5912	100	2.0	133	–
8	2	*553*	*626*	*1496*	43	**353**	∞	*645*	2	99%	6980	200	2.5	54	–
8	3	*1315*	*2295*	*2897*	109	**708**	∞	*1525*	2	100%	5660	100	0.90	41	2
8	4	*2965*	∞	∞	38	∞	∞	∞	–	–	–	–	0.80	75	19
8	5	∞	∞	∞	2020	∞	∞	∞	–	–	–	–	0.14	37	30
8	6	∞	∞	∞	148	∞	∞	∞	–	–	–	–	0.30	96	21

Table 3: Comparison of `DEtools[DFactor]` with our new implementation on irreducible operators of order r with ν finite singularities when multiplicity μ is 1. Key as in Table 1. Italicized times indicate that `DEtools[DFactor]` issued 'factorization may be incomplete'.

μ=r		classic			new			behavior on median instance							
r	ν	min	med	max	min	med	max	class.	nb	mono.	nbits	tord	δs	δe	$\delta_{\mathbb{Z}}$e
2	2	0.13	0.18	0.23	0.46	1.2	1.4	**0.18**	2	88%	100	8	1.1	34	
2	3	0.22	0.28	33	0.52	**1.1**	2.5	33	2	75%	100	24	3.6	60	
2	4	0.24	0.31	2.1	0.89	4.1	7.8	**2.1**	2	94%	588	16	0.51	45	
2	5	0.25	0.38	0.75	0.47	0.95	3.6	**0.38**	2	81%	100	20	0.74	40	
2	6	0.28	0.59	1.3	0.67	1.5	6.9	**0.28**	2	86%	224	24	1.9	28	
3	2	15	28	99	0.72	**2.4**	8.9	47	2	76%	1180	72	8.3	67	
3	3	7.3	56	114	0.58	**1.1**	45	56	3	87%	230	27	3.1	54	
3	4	41	69	234	7.4	**10.0**	20	234	2	94%	1106	36	3.3	102	
3	5	119	176	424	2.1	**5.2**	30	176	3	92%	800	45	0.72	30	
3	6	242	566	679	1.8	**5.5**	175	679	2	93%	728	54	2.0	99	
4	2	71	107	178	5.1	**5.4**	435	178	2	91%	1600	64	17	91	
4	3	90	162	174	2.1	**5.6**	66	167	3	89%	752	48	8.3	37	
4	4	538	859	1183	200	1660	2160	**859**	2	99%	15380	64	0.76	104	
4	5	616	810	1832	1.5	1100	∞	**780**	3	100%	2827	80	0.03	43	
4	6	529	1292	∞	155	**448**	733	1105	2	100%	4841	96	0.69	36	
5	2	*113*	*226*	*438*	3.5	**34**	147	*197*	2	97%	4800	100	8.8	39	
5	3	*211*	*335*	*1778*	23	**32**	184	*335*	3	98%	1258	75	2.5	36	
5	4	*487*	*732*	*1987*	51	**92**	∞	*487*	2	99%	2593	100	1.5	37	
5	5	*1146*	*2956*	∞	140	**1590**	∞	∞	2	99%	4921	100	0.54	104	
5	6	*2216*	*3542*	∞	17	**611**	1950	∞	2	100%	4752	100	0.02	71	
6	2	*129*	*414*	*716*	6.3	**14**	33	*129*	2	96%	2400	72	13	24	
6	3	*957*	*1707*	*3202*	51	**1680**	∞	*3202*	3	100%	7714	100	1.9	74	
6	4	*1194*	*2567*	∞	∞	∞	∞	***2567***	–	–	–	–	0.12	54	
6	5	*2985*	∞	∞	344	2990	∞	***2985***	3	100%	6556	100	0.53	36	
6	6	∞	∞	∞	1150	**2350**	∞	∞	2	100%	9578	100	1.0	49	
7	2	*556*	*1198*	*1533*	36	756	3560	***556***	2	100%	5020	98	3.2	35	
7	3	*1367*	∞	∞	166	**859**	∞	*1367*	3	100%	5006	100	6.4	38	
7	4	∞	∞	∞	1860	**2850**	∞	∞	2	100%	9088	100	0.81	160	
7	5	∞	∞	∞	200	**1050**	∞	∞	2	100%	4636	100	0.94	132	
7	6	∞	∞	∞	824	∞	∞	∞	–	–	–	–	0.01	55	
8	2	*679*	∞	∞	158	**1970**	∞	∞	2	99%	9004	100	18	103	
8	3	∞	∞	∞	926	**2140**	∞	∞	2	100%	9592	100	10	111	
8	4	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	–	–	–	–	1.9	146	
8	5	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	–	–	–	–	1.3	241	
8	6	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	–	–	–	–	0.19	122	

Table 4: Analogue of Table 3 when multiplicity μ is r.

[26] Fritz Schwarz. 1989. A factorization algorithm for linear ordinary differential equations. In *Proceedings of the ACM-SIGSAM 1989 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, 17–25.

[27] Michael F. Singer. 1996. Testing reducibility of linear differential operators: a group theoretic perspective. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, 7, 2, 77–104.

[28] David E Speyer. 2012. Invariant subspaces if f is defined by more than one matrix. (version: 2017-04-13).

[29] Mengxiao Sun. 2019. *On the Complexity of Computing Galois Groups of Differential Equations*. PhD thesis. City University of New York.

[30] Sergey P. Tsarev. 1994. Problems that appear during factorization of ordinary linear differential operators. *Programming and Computer Software*, 20, 1.

[31] Mark van Hoeij. 1997. Factorization of differential operators with rational functions coefficients. *Journal of Symbolic Computation*, 24, 5, 537–561.

[32] Mark van Hoeij. 2004. FactorOrder4. https://www.math.fsu.edu/~hoeij/algorithms/various/FactorOrder4.

[33] Mark van Hoeij. 1996. Rational solutions of the mixed differential equation and its application to factorization of differential operators. In *Proceedings of the 1996 international symposium on Symbolic and algebraic computation*, 219–225.

[34] Mark van Hoeij. 1997. The diffop package. https://www.math.fsu.edu/~hoeij/daisy/lib/DEtools/diffop/.

[35] Joris van der Hoeven. 2007. Around the numeric-symbolic computation of differential Galois groups. *Journal of Symbolic Computation*, 42, 1–2, 236–264.

[36] Joris van der Hoeven. 2010. Ball arithmetic. In *Logical approaches to Barriers in Computing and Complexity* (Preprint-Reihe Mathematik) number 6. Arnold Beckmann, Christine Gaßner, and Bededikt Löwe, editors. Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald, 179–208.

[37] Joris van der Hoeven. 2007. Efficient accelero-summation of holonomic functions. *Journal of Symbolic Computation*, 42, 4, 389–428.

[38] Joris van der Hoeven. 2016. On the complexity of skew arithmetic. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, 27, 2, 105–122.

[39] Marius van der Put and Michael F. Singer. 2003. *Galois Theory of Linear Differential Equations*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.