Épreuve orale “Mathématiques Ulm”

Concours MP — Session 2023

Pierre Lairez Romain Tessera

Ce document rassemble les exercices posés aux candidats au concours d’entrée de l’ENS Ulm, en filière MP, lors de l’épreuve orale “Mathématiques Ulm”.

https://github.com/lairez/math-ulm-2023

1 Wronskiens et systèmes de Tchebychev

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert non vide. Soit $C^r(I)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions sur I à valeurs réelles continument dérivables r fois. Pour toutes fonctions $f_1, \dots, f_r \in C^{r-1}(I)$ on définit une fonction $I \to \mathbb{R}$

$$\mathcal{W}[f_1, \dots, f_r](x) = \begin{vmatrix} f_1 & \cdots & f_r \\ f_1' & \cdots & f_r' \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(r-1)} & \cdots & f_r^{(r-1)} \end{vmatrix}.$$

1. Montrer que pour toute fonctions $g, f_1, \dots, f_r \in C^{r-1}(I)$,
$$\mathcal{W}[gf_1, \dots, gf_r](x) = g(x)^r \mathcal{W}[f_1, \dots, f_r](x).$$
2. Soit $f_1, \dots, f_r \in C^{r-1}(I)$ telles que $\mathcal{W}[f_1, \dots, f_k]$ est strictement positif sur I, pour tout $1 \leqslant k \leqslant r$. Montrer que pour tout $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$ non tous nuls, la fonction $a_1 f_1 + \cdots + a_r f_r$ admet au plus $r - 1$ zéros sur I.

Pour la seconde question, le cas r = 2 est instructif. C’est un théorème classique qui admet aussi une réciproque (Karlin & Studden, 1966, Chap. XI, Théorème 1.2)

2 Une propriété de divisibilité du cardinal des matrices inversibles modulo p

Soit p un entier premier impair, et $n \geqslant 3$ un entier. Montrer que n divise le cardinal du groupe $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ des matrices inversibles de taille $n-1$ à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

La restriction à p impair n'est pas nécessaire, mais elle peut simplifier certains calculs. La formule du cardinal n'est pas au programme mais c'est un classique. Pour ceux qui ne la connaissait pas, l'exercice est intéressant. On pouvait aussi s'en passer (voir la solution algébrique).

3 Minimisation locale sur un graphe

Soit E un ensemble fini et $V : E \to \mathcal{P}(E)$ une fonction de E vers les parties de E. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction. Un point $a \in E$ est un *minimum local* si $f(a) \leqslant f(b)$ pour tout $b \in V(a)$.

Soit M un entier tel que $M \geqslant \sqrt{\#E}$. Soient $b_1, \dots, b_M$ des variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées dans E. Soit k tel que $f(b_k) = \min_{1 \leqslant i \leqslant M} f(b_i)$.

Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de E telle que $u_0 = b_k$ et pour tout $n \geqslant 0$:

- si u_n est un minimum local, alors $u_{n+1} = u_n$;
- sinon, $u_{n+1} \in V(u_n)$ et $f(u_{n+1}) < f(u_n)$.

Montrer que u_M est un minimum local avec probabilité au moins $1/2$.

Inspiré par Aldous (1983), même s'il considère cet énoncé précis comme trivial.

4 Espace des translatées d'une fonction

Soit $g \in C(\mathbb{R})$ une fonction intégrable. Pour $A \subseteq \mathbb{Z}$, on note $\mathcal{S}_A$ le sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R})$ engendré par les fonctions $x \mapsto g(x-a)$, avec $a \in A$. On suppose que pour toute $f \in C(\mathbb{R})$ intégrable et tout $\varepsilon > 0$, il existe $h \in \mathcal{S}_{\mathbb{Z}}$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - h(x)| \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

Montrer que pour toute $f \in C(\mathbb{R})$ intégrable et tout $\varepsilon > 0$, il existe $L > 0$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe $A \subset \mathbb{Z}$ et $h \in \mathcal{S}_A$ tels que

$$\#A \leqslant L \text{ et } \int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - h(x)| \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

L'énoncé est correct, mais l'hypothèse est vide, nous avons abusivement simplifié un énoncé véritablement intéressant en replaçant une famille de fonctions par une seule. Il y a donc deux méthodes assez différentes pour résoudre l'exercice : montrer l'implication, ou bien montrer que l'hypothèse est vide.

5 Limite d'une série alternée

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ décroissante et tendant vers 0 en $+\infty$. Montrer que la fonction

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f(nx)$$

est bien définie pour $x > 0$. Donner sa limite en 0.

6 Unions de fermés

Montrer que $]0,1[$ n'est pas l'union d'un nombre dénombrable d'intervalles fermés disjoints d'intérieur non vide.

Montrer que le carré ouvert $]0,1[^2$ n'est pas l'union d'un numbre dénombrable de disques fermés.

Le premier énoncé est un cas particulier d'un théorème plus général de Sierpiński *(1918). Le second découle du premier assez directement, mais on note aussi la généralisation due à* Dijkstra *(1984).*

7 Une inégalité isopérimétrique discrète

Soient n et d des entiers strictement positifs et $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^d$. Soit $S = \{\pm e_1, \dots, \pm e_d\}$, où $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in G$, avec le 1 en i^{e} position. Soient X une variable aléatoire uniformément distribuée dans G et $f : G \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que

$$\mathbb{E}\left[|f(X) - \mathbb{E}[f(X)]|\right] \leqslant \frac{dn}{2} \max_{s \in S} \mathbb{E}\left[|f(X) - f(X+s)|\right].$$

Soit X l'ensemble des sommets de l'hypercube $[0,1]^d$. Soit $A \subset X$ un sous-ensemble strict non vide. Soit n_A le nombre d'arrêtes de X ayant une et une seule extrémité dans A. Donner un majorant de

$$\frac{\operatorname{card}(A)\operatorname{card}(X \setminus A)}{n_A}.$$

8 Une caractérisation des matrices antisymétriques

Soit n entier positif impair. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle pour toute matrice antisymétrique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(A+M) = 0$. Montrer que A est antisymétrique.

9 Étude des sous-groupes des isométries affines

Soit G un sous-groupe du groupe des isométries du plan affine $\mathbb{R}^2$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, il existe $g \in G$ tel que $g(x) \neq x$. Montrer que G contient une translation non triviale.

Si de plus G ne stabilise aucune droite, montrer que G contient une deuxième translation non parallèle à la première.

La classification des isométries affines est hors programme (et de fait peu de candidats la connaissait), mais ce n'est pas un prérequis pour l'exercice, surtout si on pense au formalisme complexe pour les similitudes (qui lui est au programme). On s'en sort aussi très bien en s'appuyant sur la classification des isométries vectorielles du plan (au programme). Un raisonnement purement géométrique est aussi possible. On peut aussi supposer que G ne contient que des isométries directes pour simplifier.

10 Résultant

Soient $A, B \in \mathbb{C}[X]$ deux polynômes unitaires, de degrés respectifs a et b. Soit $M_{A,B}$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}[X]/(A)$ défini par $M_{A,B}([P]) = [BP]$. Soit $\mu_{A,B} = \det M_{A,B}$. Montrer que $\mu_{A,B} = (-1)^{ab}\mu_{B,A}$.

Soit $F_{A,B}$ l'unique endomorphisme de $\mathbb{C}[X]_{a+b-1}$ tel que pour tout $U \in \mathbb{C}[X]_{a-1}$ et tout $V \in \mathbb{C}[X]_{b-1}$, $F_{A,B}(U + X^a V) = BU + AV$. Montrer que $\det(F_{A,B}) = \mu_{A,B}$

Le nombre $\mu_{A,B}$ est le résultant *de A et de B.*

11 Composantes connexes d'ensembles de polynômes

Soit $d \geqslant 1$ un entier. Soit P l'ensemble des polynômes unitaires de degré d à coefficients réels.

Décrire les composantes connexes par arcs de

$$\{(f, x) \in P \times \mathbb{R} \mid f(x) = 0 \text{ et } f'(x) \neq 0\}.$$

Décrire les composantes connexes par arcs de

$$\{f \in P \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0 \text{ ou } f'(x) \neq 0\}.$$

12 Impossibilité de la densité d'un certain espace de translations

Soit $B(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions bornées sur $\mathbb{R}$ muni de la norme uniforme. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à support compact. On note $W(g) \subseteq B(\mathbb{R})$ l'espace engendré par les translatés $x \mapsto g(x-n)$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Etudier l'ensemble $t \in \mathbb{R}$ tels que $\overline{W(g)}$ est invariant par translation par t.

Il s'agit de montrer que si g est non nulle, alors l'ensemble en question est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}$. L'énoncé est inspiré par l'hypothèse vide de l'exercice 4.

13 Valuation p-adique d'un produit

Soit p et q deux entier premiers distincts. Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ (que l'on estimera) tel que pour tout entier $m > 0$, la valuation p-adique du produit

$$N(m) = (q-1)(q^2-1)\dots(q^m-1),$$

est majorée par $cm \log m$.

On peut seulement supposer que q est premier avec p. Il est aussi possible d'obtenir une borne linéaire en m, avec une analyse un peu plus fine.

14 Générateurs d'un groupe de matrices

Soit G le sous-ensemble de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ des matrices à coefficients entiers $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ telles que $a \equiv d \equiv 1 - c \equiv 1 \pmod 3$ et $ad - bc = 1$.

Montrer que G est un sous-groupe engendré par $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

C'est une variante, à peine plus subtile, d'un résultat analogue sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

15 Angles d'un pavage

Soit $G = \{z \longrightarrow az + b \mid a, b \in \mathbb{C}, |a| = 1\}$. C'est un sous-groupe du groupe des bijections $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ muni de la composition. Soit $H \subseteq G$ un sous-groupe contenant deux translations selon des vecteurs $b_1, b_2 \in \mathbb{C}$ formant une famille libre sur $\mathbb{R}$. On suppose de plus que pour tout $h \in H$, soit $h(0) = 0$, soit $|h(0)| \geqslant 1$. Montrer que l'ensemble $\{h'(0) \mid h \in H\}$ est fini.

Montrer que le cardinal de cet ensemble divise 6.

C'est l'un des ingrédients de la classification des pavages du plan. L'existence de deux translations n'est pas nécessaire, une seule suffit, mais en donner deux pouvait rendre l'énoncé plus accessible.

16 Valeurs rationnelles du cosinus

Décrire l'ensemble des nombres rationels r tels que $\cos(r\pi)$ est rationel.

C'est plus classique que ce qui nous aurions aimé. La plupart des candidats ont pensé à l'approche utilisant la réduction $\cos(2x) = 2\cos(x)^2 - 1$. *Nous avions en tête une autre approche utilisant le lemme suivant, que l'on peut montrer sans la machinerie des entiers algébriques. Soit $\mu \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme unitaire, et soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de μ. Pour tout $g \in \mathbb{Z}[X]$, $g(\alpha)$ est racine d'un polynôme unitaire à coefficients entiers.*

17 Théorème de Peano

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert non vide. Soit $C^r(I)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions sur I à valeurs réelles continument dérivables r fois. Pour toutes fonctions $f_1, \dots, f_r \in C^r(I)$ on définit une fonction $I \to \mathbb{R}$

$$\mathcal{W}[f_1, \dots, f_r](x) = \begin{vmatrix} f_1 & \cdots & f_r \\ f_1' & \cdots & f_r' \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(r-1)} & \cdots & f_r^{(r-1)} \end{vmatrix}.$$

Soient $f_1, \dots, f_r \in C^r(I)$. On note $W = \mathcal{W}[f_1, \dots, f_n]$ et, pour $1 \leqslant i \leqslant r$,

$$V_i = (-1)^i \mathcal{W}[f_1, \dots, f_{i-1}, f_{i+1}, \dots, f_r].$$

Montrer que si V_r ne s'annule pas sur I et si $W \equiv 0$, alors les $f_1, \dots, f_r$ forment une famille liée.

On essaie ensuite de donner une démonstration directe, sans utiliser le théorème de Cauchy. On pourra montrer que si $W \equiv 0$, alors pour tout $0 \leqslant k < r$,

$$\sum_{i=1}^{r} V_i(x) f_i^{(k)}(x) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{r} V_i'(x) f_i^{(k)}(x) = 0.$$

C'est un théorème dû à Peano (1889) mais, pour la dernière partie de l'énoncé, nous suivons la démonstration de Bôcher (1900).

18 Une distance sur les matrices symétriques

On note $\mathcal{S}_n^{++}$ l'ensemble des matrices réelles symétriques de taille n définies positives. Montrer que pour toute paire $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}$, il existe $G \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $B = GAG^t$.

Pour toute fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{S}_n^{++}$, donner un sens à $f(A)$. À l'aide de cette définition, on pose

$$d(A, B) = \| \log(A^{-1/2} B A^{-1/2}) \|,$$

où $\|-\|$ est la norme d'opérateur relative à la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$d(GAG^t, GBG^t) = d(A, B)$$

pour tout $G \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, puis que d définit une distance sur $\mathcal{S}_n^{++}$.

19 Norme de l'inverse d'une matrice à lignes unitaires

Soit A une matrice réelle carrée de taille $n \geqslant 1$ donc les lignes $L_1, \dots, L_n$ sont des vecteurs unitaires. Soit $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, la distance euclidienne de L_i au sous espace engendré par les L_j, avec $j \neq i$, est minorée par ε.

Montrer que A est inversible et que $\|A^{-1}x\|_2 \leqslant \varepsilon^{-1}\|x\|_1$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, où $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$ et $\|x\|_2^2 = \sum_i x_i^2$.

20 Disques et carrés

Soit D le disque fermé de centre 0 et rayon 1 dans $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe une suite $C_0, C_1, \dots$ de carrés de $\mathbb{R}^2$ tels que :

(i) $\forall i \geqslant 0, C_i \subseteq D$;

(ii) $\forall i, j \geqslant 0 : i \neq j \Rightarrow \mathring{C}_i \cap \mathring{C}_j = \varnothing$;

(iii) $\sum_{i \geqslant 0} \mathrm{Aire}(C_i) = \pi$.

Soit $C = [-1, 1]^2$. Montrer qu'il existe une suite $D_0, D_1, \dots$ de disques de $\mathbb{R}^2$ tels que :

(i) $\forall i \geqslant 0, D_i \subseteq C$;

(ii) $\forall i, j \geqslant 0 : i \neq j \Rightarrow \mathring{D}_i \cap \mathring{D}_j = \varnothing$;

(iii) $\sum_{i \geqslant 0} \mathrm{Aire}(D_i) = 4$.

21 Certification de racines

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application C^1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, soit B la boule unité fermée. On suppose que pour tout $u, v \in B$,

$$-f(x) + v - \mathrm{d}f(x+u) \cdot v \in \tfrac{1}{2}B.$$

Montrer que f admet un unique zéro dans la boule $x + B$.

C'est un critère dû à Krawczyk (1969), voir aussi Rump (1983). L'approche usuelle pour la démonstration utilise un argument de point fixe, mais la constante $\frac{1}{2}$ permet d'autres approches.

22 Médiane de moyennes

Soient $n, m \geqslant 1$ des entiers et soient $X_{i,j}$, pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant m$, des variables aléatoires discrètes i.i.d. de variance σ^2 et de moyenne μ. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, soit $Y_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} X_{i,j}$. Soit Z une médiane de l'ensemble $\{Y_1, \dots, Y_n\}$.

Montrer que

$$\mathbb{P}\left[|Z - \mu| \leqslant \frac{2\sigma}{\sqrt{m}}\right] \geqslant 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

23 Sous-espace stable

Soit V un espace vectoriel normé de dimension finie. On considère deux endomorphismes de V, notés h_1 et h_2, préservant la norme, et tels que h_1 et h_2 commutent avec leur commutateur $h_1 h_2 h_1^{-1} h_2^{-1}$. Montrer que le sous-espace des vecteurs invariants par h_1 et h_2 admet un supplémentaire également stable par h_1 et h_2.

24 Théorème d'Hermite–Kakeya

Soient P et $Q \in \mathbb{R}[X]$ des polynômes non constants. On dit que P et Q *s'entrelacent* si : (1) leurs racines sont réelles et simples, (2) ils n'ont pas de racines réelles communes et (3) entre deux racines consécutives de Q (resp. P), il y a une et une seule racine de P (resp. Q).

Montre que si pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, les racines de $\lambda P + \mu Q$ sont toutes réelles et simples, alors P et Q s'entrelacent.

Montrer la réciproque.

Rahman et Schmeisser (2002) donnent une démonstration, mais on peut faire plus élémentaire (surtout pour la réciproque).

25 Un groupe de polynômes

Soit p un nombre premier. On considère l'anneau A des fractions rationnelles en X à coefficients dans $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ de la forme $X^{-k}P(X)$, avec P un polynôme. Décrire le groupe $A^\times$ des éléments inversibles (pour la multiplication) et montrer qu'il n'est pas engendré par un nombre fini d'éléments.

26 Matrices de traces nulles et sommes de deux carrés

Soient $A, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ (le groupes des matrices 2×2 à coefficients entiers et déterminant 1). Montrer que si $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B) = 0$, alors A est conjuguée à B ou $-B$.

Montrer que si $n > 1$ et x sont des entiers tels que $x^2 \equiv -1 \pmod{n}$, alors il existe des entiers a et b tels que $n = a^2 + b^2$.

27 Théorème d'Hermite–Sylvester

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n \geqslant 1$. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ ses racines, avec multiplicité. Soit $H \in \mathbb{C}^{n \times n}$ la matrice définie par

$$H_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{i+j}.$$

Montrer que H est une matrice symétrique réelle. Montrer que le rang de H est égal au nombre de racines distincte, et que H est positive si et seulement si toutes les racines sont réelles.

Il faudrait parler de la signature d'une forme quadratique pour énoncer le théorème de manière plus précise, mais c'est hors programme. Cette version se passe de la théorie des formes quadratiques.

Références

ALDOUS, D. (1983). Minimization algorithms and random walk on the d-cube. *Ann. Probab.*, *11*(2), 403-413. https://doi.org/10/d82wz3

BÔCHER, M. (1900). The Theory of Linear Dependence. *Ann. Math.*, *2*(1), 81-96. https://doi.org/10/bq7fvt

DIJKSTRA, J. J. (1984). A Generalization of the Sierpiński Theorem. *Proc. Am. Math. Soc.*, *91*(1), 143-146. https://doi.org/10/cwp6db

KARLIN, S., & STUDDEN, W. (1966). *Tchebycheff systems : with applications in analysis and statistics* (T. 15). Interscience.

KRAWCZYK, R. (1969). Newton-Algorithmen zur Bestimmung von Nullstellen mit Fehlerschranken. *Computing*, *4*(3), 187-201. https://doi.org/10/css7z9

PEANO, G. (1889). Sur le déterminant wronskien. *Mathesis*, *9*, 75-76, 110-112.

RAHMAN, Q. I., & SCHMEISSER, G. (2002). *Analytic Theory of Polynomials.* Oxford University Press.

RUMP, S. M. (1983). Solving Algebraic Problems with High Accuracy. In U. W. KULISCH & W. L. MIRANKER (Éd.), *A New Approach to Scientific Computation* (p. 51-120). Academic Press. https://doi.org/10/kh8k

SIERPIŃSKI, W. (1918). Un théorème sur les continus. *Tohoku Math. J.*, *13*, 300-303.