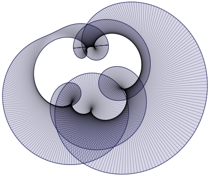
Diagonales de fractions rationnelles & Périodes des intégrales multiples



Pierre Lairez
Specfun
Inria
Saclay

jeudi 7 mars 2013
séminaire des thésards
de l'Institut de mathématiques de Jussieu

Diagonales

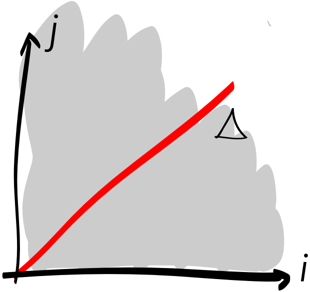
Définition

Si F est une série formelle

$$F = \sum_{i_0,\ldots,i_n \geqslant 0} a_{i_0,\ldots,i_n} x_0^{i_0} \cdots x_n^{i_n},$$

la *diagonale* de f est

$$\Delta_t(F) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i a_{i,\ldots,i} t^i.$$



On s'intéresse aux diagonales des fractions rationnelles développables en séries entières à l'origine.

Diagonales

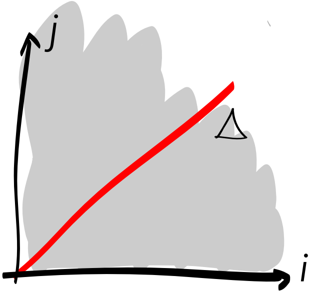
Définition

Si F est une série formelle

$$F = \sum_I a_I \mathbf{x}^I,$$

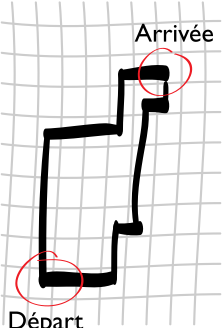
la *diagonale* de f est

$$\Delta_t(F) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i a_{i,\dots,i} t^i.$$



On s'intéresse aux diagonales des fractions rationnelles développables en séries entières à l'origine.

Une série combinatoire



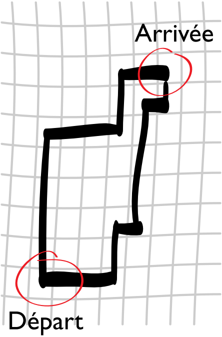
$$a_{i,j} = \#\{\text{chemins de tours de } (0,0) \text{ à } (i,j)\}$$

$$a_{i,j} = \sum_{k<i} a_{k,j} + \sum_{k<j} a_{i,k}$$

Problème

Donner une récurrence pour la suite $(a_{n,n})$.

Une série combinatoire



$$a_{i,j} = \#\left\{\text{chemins de tours de } (0,0) \text{ à } (i,j)\right\}$$

$$F(x,y) = \sum_{i,j\geqslant 0} a_{i,j} x^i y^j = \frac{1}{1 - \frac{x}{1-x} - \frac{y}{1-y}}$$

$$\Delta(F) = \sum_n a_{n,n} t^n$$

Problème

Donner une équation différentielle pour $\Delta(F)$.

Une série combinatoire

- dimension 2

$$9nu_n + (-14 - 10n)u_{n+1} + (2+n)u_{n+2} = 0$$

- dimension 3

$$\begin{aligned} -192n^2(1+n)(88+35n)u_n \\ +(1+n)(54864 + 100586n + 59889n^2 + 11305n^3)u_{n+1} \\ -(2+n)(43362 + 63493n + 30114n^2 + 4655n^3)u_{n+2} \\ +2(2+n)(3+n)^2(53+35n)u_{n+3} = 0 \end{aligned}$$

- dimension 4

$$\begin{gathered} 5000n^3(1+n)^2(2705080 + 3705334n + 1884813n^2 + 421590n^3 + 34983n^4)u_n \\ -(1+n)^2(80002536960 + 282970075928n + \cdots + 6386508141n^6 + 393838614n^7)u_{n+1} \\ +2(2+n)(143370725280 + 500351938492n + \cdots + 2636030943n^7 + 131501097n^8)u_{n+2} \\ -(3+n)^2(26836974336 + 80191745800n + 100381179794n^2 + \cdots + 44148546n^7)u_{n+3} \\ +2(3+n)^2(4+n)^3(497952 + 1060546n + 829941n^2 + 281658n^3 + 34983n^4)u_{n+4} = 0 \end{gathered}$$

La suite d'Apéry

Pour prouver l'irrationnalité $\zeta(3)$, Apéry définit

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2.$$

On vérifie *non sans mal* que

$$(n+1)^3 a_{n+1} - (34n^3 + 51n^2 + 27n + 5)a_n + n^3 a_{n-1} = 0.$$

Par ailleurs

$$\sum_n a_n t^n = \Delta\left(\frac{1}{(1-x_1x_2x_3x_4)((1-x_3)(1-x_4)-x_0(1+x_1)(1+x_2))}\right).$$

Quelques résultats

Pour $F \in k(x_0, \ldots, x_n)$ et $G \in k(y_0, \ldots, y_m)$,

$$\Delta(F) = \Delta\left(\frac{F}{1 - x_{n+1}}\right)$$
$$\Delta(F)\Delta(G) = \Delta\left(F(x_0 y_1 \cdots y_m, x_1, \ldots, x_n) G(x_0 \cdots x_n, y_1, \ldots, y_m)\right)$$
$$\Delta(F) \odot \Delta(G) = \Delta\left(F(x_0, \ldots, x_n) G(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m+1})\right)$$

Théorème (Furstenberg)

Pour $f \in k[\![t]\!]$ une série formelle, les propositions suivantes équivalent :

- f *est une série algébrique, c'est-à-dire que* $P(t, f) = 0$ *pour un certain polynôme* $P(t, Z)$ *non nul ;*
- f *est la diagonale d'une fraction rationnelle bivariée.*

Quelques résultats

On vérifie que

$$\Delta\left(\frac{1}{1-x-y-z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{n!^3} t^n$$

n'est pas algébrique. Mais…

Théorème (Furstenberg)

Si $F \in \mathbb{F}_q(\mathbf{x})$, alors $\Delta(F)$ est algébrique.

Théorème (Christol, Lipshitz)

Si $F \in k(\mathbf{x})$, alors il existe des polynômes $a_i(t)$ non tous nuls tels que

$$\sum_i a_i(t) \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i} \Delta(F) = 0.$$

Les diagonales généralisent les séries algébriques.

Le théorème de Furstenberg

Démonstration

$\mathbb{F}_q$ corps de base.

Définition (Opérateur d'extraction)

Pour $r \in \mathbb{Z}$,

$$E_r\left(\sum_i a_i t^i\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i a_{qi+r} t^i \text{ et } E_r\left(\sum_I a_I \mathbf{x}^I\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_I a_{qI+(r,\dots,r)} \mathbf{x}^I$$

On vérifie :

- $\Delta \circ E_r = E_r \circ \Delta$;
- $x_i E_r(F) = E_r(x_i^q F)$;
- $G(\mathbf{x}) E_r(F) = E_r(G(\mathbf{x})^q F)$, car $G(\mathbf{x}^q) = G(\mathbf{x})^q$, où $\mathbf{x}^q = x_0^q, \dots, x_n^q$;
- Si $f(t) = \sum_i a_i t^i$, alors

$$f(t) = \sum_{0 \leqslant r < q} t^r \sum_i a_{qi+r} t^{qi}$$

Le théorème de Furstenberg

Démonstration

$\mathbb{F}_q$ corps de base.

Définition (Opérateur d'extraction)

Pour $r \in \mathbb{Z}$,

$$E_r\left(\sum_i a_i t^i\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i a_{qi+r} t^i \text{ et } E_r\left(\sum_I a_I \mathbf{x}^I\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_I a_{qI+(r,\ldots,r)} \mathbf{x}^I$$

On vérifie :

- $\Delta \circ E_r = E_r \circ \Delta$;
- $x_i E_r(F) = E_r(x_i^q F)$;
- $G(\mathbf{x}) E_r(F) = E_r(G(\mathbf{x})^q F)$, car $G(\mathbf{x}^q) = G(\mathbf{x})^q$, où $\mathbf{x}^q = x_0^q, \ldots, x_n^q$;
- Si $f(t) = \sum_i a_i t^i$, alors

$$f(t) = \sum_{0 \leqslant r < q} t^r \left(\sum_i a_{qi+r} t^i\right)^q$$

Le théorème de Furstenberg

Démonstration

$\mathbb{F}_q$ corps de base.

Définition (Opérateur d'extraction)

Pour $r \in \mathbb{Z}$,

$$E_r\left(\sum_i a_i t^i\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i a_{qi+r} t^i \text{ et } E_r\left(\sum_I a_I \mathbf{x}^I\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_I a_{qI+(r,\dots,r)} \mathbf{x}^I$$

On vérifie :

- $\Delta \circ E_r = E_r \circ \Delta$;
- $x_i E_r(F) = E_r(x_i^q F)$;
- $G(\mathbf{x}) E_r(F) = E_r(G(\mathbf{x})^q F)$, car $G(\mathbf{x}^q) = G(\mathbf{x})^q$, où $\mathbf{x}^q = x_0^q, \dots, x_n^q$;
- Si $f(t) = \sum_i a_i t^i$, alors

$$f(t) = \sum_{0 \leqslant r < q} t^r E_r(f)^q$$

Le théorème de Furstenberg

Démonstration

Soient une fraction $F = \frac{A}{R} \in \mathbb{F}_q(\mathbf{x})$, l'entier $d = \max(\deg A, \deg R)$ et l'espace vectoriel sur $\mathbb{F}_q$

$$\mathcal{E} = \left\{ \Delta\left(\tfrac{P}{R}\right) \;\middle|\; \deg P \leqslant d \right\}. \qquad \left(\dim \mathcal{E} \leqslant \tbinom{d+n+1}{n+1}\right)$$

1. $\mathcal{E}$ est stabilisé par les E_r.

Démonstration.

$$\begin{aligned} E_r \circ \Delta\left(\frac{P}{R}\right) &= \Delta \circ E_r\left(\frac{PR^{q-1}}{R^q}\right) \\ &= \Delta\left(\frac{E_r(PR^{q-1})}{R}\right) \in \mathcal{E} \end{aligned}$$

□

Le théorème de Furstenberg

Démonstration

Soient une fraction $F = \frac{A}{R} \in \mathbb{F}_q(\mathbf{x})$, l'entier $d = \max(\deg A, \deg R)$ et l'espace vectoriel sur $\mathbb{F}_q$

$$\mathcal{E} = \left\{ \Delta\left(\tfrac{P}{R}\right) \;\middle|\; \deg P \leqslant d \right\}. \quad \left(\dim \mathcal{E} \leqslant \tbinom{d+n+1}{n+1}\right)$$

1. $\mathcal{E}$ est stabilisé par les E_r.
2. Si $f_1, \ldots, f_s$ est une base de $\mathcal{E}$, alors il existe des $c_{ij} \in \mathbb{F}_q[t]$ tels que
$$\forall i, f_i = \sum_j c_{ij} f_j^q.$$

Démonstration.

$$f_i = \sum_{0 \leqslant r < q} t^r E_r(f_i)^q = \sum_{0 \leqslant r < q} t^r \left(\sum_j b_{ij} f_j \right)^q$$
$$= \sum_j \left(\sum_{0 \leqslant r < q} b_{ij}^q t^r \right) f_j^q$$

$\square$

Le théorème de Furstenberg

Démonstration

Soient une fraction $F = \frac{A}{R} \in \mathbb{F}_q(\mathbf{x})$, l'entier $d = \max(\deg A, \deg R)$ et l'espace vectoriel sur $\mathbb{F}_q$

$$\mathcal{E} = \left\{ \Delta\left(\tfrac{P}{R}\right) \,\middle|\, \deg P \leqslant d \right\}. \quad \left(\dim \mathcal{E} \leqslant \tbinom{d+n+1}{n+1}\right)$$

1. $\mathcal{E}$ est stabilisé par les E_r.
2. Si $f_1, \ldots, f_s$ est une base de $\mathcal{E}$, alors il existe des $c_{ij} \in \mathbb{F}_q[t]$ tels que
$$\forall i, f_i = \sum_j c_{ij} f_j^q.$$
3. Tous les éléments de $\mathcal{E}$ sont algébriques.

Démonstration.

$$\forall i, f_i^q = \sum\nolimits_j c_{ij}^q f_j^{q^2}, \text{ etc.}$$

Donc sur $\mathbb{F}_q(t)$, $\operatorname{Vect}\left\{ f_i^{q^k} \,\middle|\, \substack{1\leqslant i\leqslant s \\ 0\leqslant k<N} \right\} \subset \operatorname{Vect}\left\{ f_i^{q^N} \,\middle|\, 1 \leqslant i \leqslant s \right\}$. $\square$

Théorème de Furstenberg

Exemple

Si $f = \sum_n \frac{(3n)!}{n!^3} t^3$, alors

- $f \equiv (1+t)^{-\frac{1}{4}} \mod 5$
- $f \equiv \left(1 - t - t^2\right)^{-\frac{1}{6}} \mod 7$
- $f \equiv \left(1 + 6t + 2t^2 + 8t^3\right)^{-\frac{1}{10}} \mod 11$
- $\ldots$

Par ailleurs,

$$\left(27t^2 - t\right) f'' + (54t - 1) f' + 6f = 0.$$

Le théorème de Christol–Lipshitz

Théorème

Si $F \in k(\mathbf{x})$, alors il existe des polynômes $a_i(t)$ non tous nuls tels que

$$\sum_i a_i(t) \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i} \Delta_t(F) = 0.$$

Changement de variables

$$G_t(x_1, \ldots, x_n) = \tfrac{1}{x_1 \cdots x_n} F\left(\tfrac{t}{x_1 \cdots x_n}, x_1, \ldots, x_n\right)$$

Intégrales complexes

Quelques rappels

- Pour $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ méromorphe, et $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, avec $\gamma(0) = \gamma(1)$, on définit
$$\oint_\gamma f(x)\mathrm{d}x \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t.$$
- Pour $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ méromorphe et $\gamma : [0,1]^n \to \mathbb{C}^n$, avec $\gamma([0,1])^n$ sans bord, on définit
$$\oint_\gamma f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\gamma(\mathbf{u}))\,\mathrm{Jac}(\gamma)(\mathbf{u})\mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_n.$$
- L'intégrale est invariante par déformation du cycle tant que l'intégrande reste fini.

Diagonales et périodes

Proposition

$$\Delta(F) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \oint_\gamma G_t \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n,$$

où γ est le n-cycle $|x_1| = \cdots = |x_n| = \varepsilon$,
c.-à-d. $\gamma : (u_1, \ldots, u_n) \in [0,1]^n \mapsto (\varepsilon e^{2i\pi u_1}, \ldots, \varepsilon e^{2i\pi u_n}) \in \mathbb{C}^n$.

Démonstration.

Développement en série et intégrale de Cauchy :

$$\frac{1}{(2i\pi)^n} \oint_\gamma \mathbf{x}^I \mathrm{d}\mathbf{x} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2i\pi} \oint_{|x_i|=\varepsilon} x_i^{I_i} \mathrm{d}x_i = \begin{cases} 1 & \text{si } I = (-1, \ldots, -1) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad \square$$

Définition

Une *période* est l'intégrale sur un cycle d'une fonction algébrique sans pôle sur ce cycle.

Équations de Picard-Fuchs

Problème

Donné $G_t \in \mathbb{C}(t, \mathbf{x})$, trouver une équation de liaison sur $\mathbb{C}(t)$ entre les

$$\oint_\gamma \partial_t^k G_t \mathrm{d}x, k \in \mathbb{N}$$

Exemple (Euler)

Périmètre d'une ellipse de demi-grand-axe unité et d'excentricité e :

$$p(e) = \oint \sqrt{\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi i}\oint \frac{-\left(1-x^2\right)y^2}{1-e^2x^2-\left(1-x^2\right)y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

On vérifie l'équation différentielle

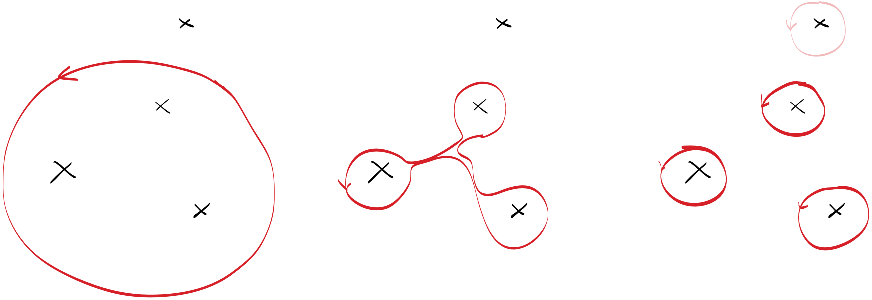
$$e(1-e^2)p'' + (1-e^2)p' + ep = 0.$$

Réduction topologique

Intégrales simples

$G_t = \frac{A}{R^m} \in \mathbb{C}(t,x)$. Soient les $x_i(t)$ les racines de $R(x)$ et des *petits* contours $\gamma_i(t)$ autour des $x_i(t)$.

$$\oint_\gamma G_t \mathrm{d}x = \sum_i n_i \oint_{\gamma_i} G_t \mathrm{d}x$$



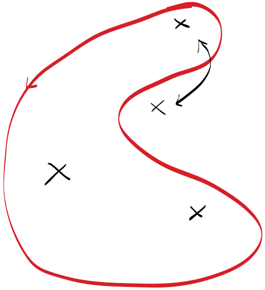
Réduction topologique

Monodromie

Posons $f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \oint_\gamma G_t \mathrm{d}x$ et $g_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} \oint_{\gamma_i} G_t \mathrm{d}x$.

Ces fonctions ne sont pas méromorphes sur $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$:

- leur pôles sont finis ;
- on peut les prolonger partout ;
- mais il y a de la monodromie.



Réduction topologique

Intégrales simples

La fonction f est solution de l'équation différentielle

$$\begin{vmatrix} y & g_1 & \dots & g_s \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y^{(s-1)} & g_1^{(s-1)} & \dots & g_s^{(s-1)} \\ y^{(s)} & g_1^{(s)} & \dots & g_s^{(s)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} g_1 & \dots & g_s \\ \vdots & & \vdots \\ g_1^{(s-1)} & \dots & g_s^{(s-1)} \end{vmatrix}^{-1} = 0$$

Proposition

Cette équation est à coefficients rationnels en t.

Démonstration.

1. Il suffit de montrer que les coefficients n'ont pas de monodromie.
2. La monodromie permute les g_i.
3. Les coefficients sont symétriques en les g_i. $\square$

Réduction topologique

Intégrales multiples

Idem !

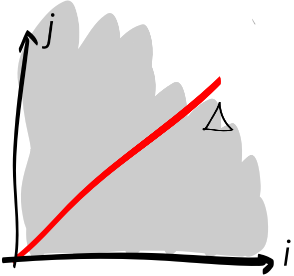
(en plus compliqué)

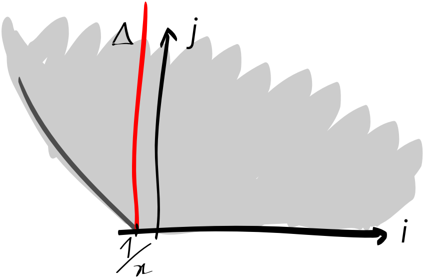
Point clef

Tout n-cycle dans $\mathbb{P}^n \setminus V(R)$ se décompose à déformation près en combinaison linéaire d'un nombre fini d'entre eux.

Point de vue formel

$$F(x, y) = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j \qquad G_t = \frac{1}{x} F(x, \tfrac{t}{x}) = \sum_{i,j} b_{i,j} x^i t^j$$

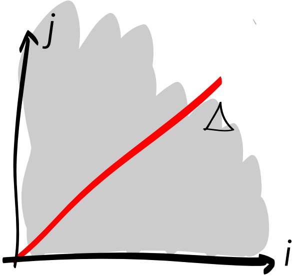


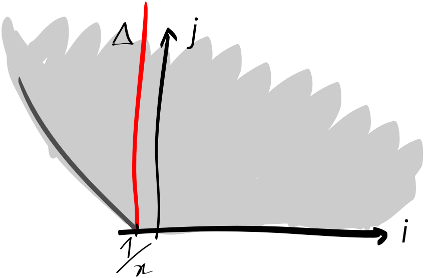


$$L(t, \partial_t) \cdot G_t = \partial_x(U) \quad \Rightarrow \quad L(t, \partial_t) \cdot \Delta_t(F) = 0$$

Point de vue formel

$$F(x,y) = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j \qquad G_t = \frac{1}{x} F(x, \tfrac{t}{x}) = \sum_{i,j} b_{i,j} x^i t^j$$





$$L(t, \partial_t) \cdot G_t = \sum_{i=1}^{n} \partial_i(U_i) \quad \Rightarrow \quad L(t, \partial_t) \cdot \Delta_t \left(F(x_1, \ldots, x_n)\right) = 0$$

Réduction algébrique

Intégrales simples

Soit $G = \frac{A}{R^m} \in \mathbb{C}(t, x)$.

Algorithme

1. $A = UR + V\partial_x R$
2. $G_t = \dfrac{U + \frac{1}{m-1}\partial_x V}{R^{m-1}} + \partial_x \left(\dfrac{-V}{(m-1)R^{m-1}} \right)$
3. On définit, par récurrence sur l'ordre du pôle, la forme réduite $[G_t] = \left[\frac{U+\frac{1}{m-1}\partial_x V}{R^{m-1}} \right]$.

Proposition

Les $[\partial_t^k G_t]$ engendrent un espace de dimension finie sur $\mathbb{C}(t)$.

Réduction algébrique

Intégrales multiples

Idem !

(sous certaines conditions)

Soit $G = \frac{A}{R^m} \in \mathbb{C}(t, \mathbf{x})$.

$$A = UR + \sum_i V_i \partial_i R \Longrightarrow$$

$$\frac{A}{R^m} = \frac{U + \frac{1}{m-1} \sum_i \partial_i V_i}{R^{m-1}} + \sum_i \partial_i \left(\frac{-V_i}{(m-1)R^{m-1}} \right)$$

Hypothèse

La variété $V(R)$ est une sous-variété lisse de $\mathbb{P}^n$.

On ramène à ce cas par déformation :

$$R \rightsquigarrow R + \varepsilon \left(\sum_i x_i^N + 1 \right)$$

Réduction algébrique

Cohomologie de Rham

Proposition (Grothendieck)

$$\frac{\left\{ \frac{A}{R^m} \;\middle|\; A \in \mathbb{C}[\mathbf{x}], m \geqslant 0 \right\}}{\left\{ \sum_i \partial_i \left(\frac{B_i}{R^m} \right) \;\middle|\; B_i \in \mathbb{C}[\mathbf{x}], m \geqslant 0 \right\}} \simeq H^n \left(\mathbb{C}^n \setminus V(R) \right)$$

Deux approches

Soit une fraction $G_t = \frac{A}{R^m} \in \mathbb{C}(t, \mathbf{x})$, avec R sans facteur carré.

Topologie

Pour tout n-cycle γ ne passant pas par $V(R)$, il existe une décomposition

$$\oint_\gamma G_t \mathrm{d}\mathbf{x} = \sum_i n_i(\gamma) \oint_{\gamma_i} G_t \mathrm{d}\mathbf{x}$$

en utilisant $\oint_{\partial D} G_t \mathrm{d}x = 0$.

Algèbre

Pour toute fraction H à pôles dans $V(R)$, il existe une décomposition

$$\oint_\gamma H \mathrm{d}\mathbf{x} = \sum_i \lambda_i(H) \oint_\gamma F_i \mathrm{d}\mathbf{x}$$

en utilisant $\oint_\gamma \partial_i U \mathrm{d}x = 0$.
Par le théorème de Grothendieck, on peut choisir des F_i rationnels.