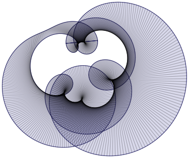
Calcul des intégrales rationnelles multiples



Pierre Lairez
Inria Saclay
Équipe Specfun

18 octobre 2013
Séminaire de calcul formel et complexité
Institut de recherche mathématique de Rennes

Euler, 1733

Périmètre d'une ellipse

Proposition

Soit $p(e)$ le périmètre d'une ellipse d'excentricité e et de demi grand-axe 1,

$$p(e) = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}}\mathrm{d}x \propto \oint \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1-\frac{1-e^2x^2}{(1-x^2)y^2}},$$

alors

$$(e-e^3)p'' + (1-e^2)p' + ep = 0.$$

Euler, 1733

Une preuve calculatoire

$$\left((e-e^3)\partial_e^2+(1-e^2)\partial_e+e\right)\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1-e^2x^2}{(1-x^2)y^2}}\right)=$$
$$\partial_x\left(-\frac{e\left(-1-x+x^2+x^3\right)y^2\left(-3+2x+y^2+x^2\left(-2+3e^2-y^2\right)\right)}{\left(-1+y^2+x^2(e^2-y^2)\right)^2}\right)$$
$$+\,\partial_y\left(\frac{2e\left(-1+e^2\right)x\left(1+x^3\right)y^3}{\left(-1+y^2+x^2(e^2-y^2)\right)^2}\right)$$

C’est ce type de calcul que l’on va étudier.

Motivations

Sommes hypergéométriques

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^3$$

$$\sum_{r\geqslant 0} \sum_{s\geqslant 0} (-1)^{n+r+s} \binom{n}{r} \binom{n+r}{r} \binom{n+s}{s} \binom{2n-r-s}{n} = \sum_{k\geqslant 0} \binom{n}{k}^4$$

Une approche purement différentielle est possible !

Avantages par rapport à l'approche par récurrence :

- plus robuste, une équation différentielle définit mieux une série qu'une récurrence définit une suite ;
- sommes multiples ou sommes simples traitées indifféremment ;
- plus rapide ?

Motivations

Physique théorique

$$\Phi(t) = \oint \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}w}{xyzw - tP}$$

avec $P = xyz + wxy^2z + w^2yz + z^2w^2y + z^2w^2 + wxy$
$+ x^2wy + y^2x + x^2y + x^2y^2 + y^2xz + w^2xz + w^2z$
$+ y^2wz + wyz + z^2w^2x + w^2xyz + wxz + wx^2yz + x^2yz$
$+ xy + wxyz^2 + z^2wx.$

Intégrale issue de la recherche sur les variétés de Calabi–Yau.

Équation de Picard–Fuchs inconnue.

Intégrales rationnelles multiples

Problème

- $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$, des variables d'intégration
- t, un paramètre
- $R(t, \mathbf{x})$, une fraction rationnelle
- γ, un n-cycle dans $\mathbb{C}^n$

$$\oint_\gamma R(t, \mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x}$$

Comment calculer cette intégrale ?

Théorème (Picard)

Ces intégrales vérifient des équations différentielles à coefficients polynomiaux.

Calcul des résidus

(les intégrales simples)

Soit $R = a/f \in \mathbb{C}(t,x)$.

Décomposition en éléments simples

$$R = \sum_{f(\alpha)=0} \frac{r_\alpha(t)}{x-\alpha(t)} + \sum_{n>1} \sum_{f(\alpha)=0} \frac{s_{\alpha,n}(t)}{(x-\alpha(t))^n}$$

On se ramène ainsi à calculer des résultants et des résolvantes différentielles.

Hermite propose une méthode différente.

Calcul des résidus

(les intégrales simples)

Soit $R = a/f \in \mathbb{C}(t, x)$.

Décomposition en éléments simples

$$R = \sum_{f(\alpha)=0} \frac{r_\alpha(t)}{x - \alpha(t)} + \sum_{n>1} \sum_{f(\alpha)=0} \tfrac{-1}{n-1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{s_{\alpha,n}(t)}{(x - \alpha(t))^{n-1}} \right),$$

$$\text{donc } \oint_\gamma R(t, x) \mathrm{d}x = \sum_{f(\alpha)=0} n_\alpha(\gamma) r_\alpha(t).$$

On se ramène ainsi à calculer des résultants et des résolvantes différentielles.

Hermite propose une méthode différente.

Charles Hermite, 1872

(les intégrales simples)

Soit $R = a/f^m \in \mathbb{C}(t,x)$, avec f sans facteur carré.

Définition

Par récurrence sur m :

$$[R] = \begin{cases} \left[\frac{u+(m-1)^{-1}v'_x}{f^{m-1}}\right] & \text{avec } a = uf + vf'_x, \text{ si } m > 1, \\ \frac{r}{f} & \text{avec } qf + r = a, \text{ si } m = 1. \end{cases}$$

- $m = 1 \rightsquigarrow \frac{a}{f} = \frac{r}{f} + \frac{\partial \int q}{\partial x}$
- $m > 1 \rightsquigarrow \frac{a}{f^m} = \frac{u}{f^{m-1}} + \frac{vf'_x}{f^m} = \frac{u}{f^{m-1}} + \frac{-1}{m-1}\frac{\partial}{\partial x}\frac{v}{f^{m-1}} + \frac{1}{m-1}\frac{v'}{f^{m-1}}$

Charles Hermite, 1872

(les intégrales simples)

Théorème

Sont équivalents :

1. pour tout cycle γ, $\oint_\gamma R(t,x)\mathrm{d}x = 0$;
2. il existe une fraction $S(t,x)$, sans pôle autre que ceux de R telle que $R = \partial_x S$;
3. $[R] = 0$.

De plus, les $\left[\frac{a}{f^m}\right]$ pour m entier et a dans $\mathbb{C}(t)[x]$ engendrent un espace vectoriel de dimension $\deg_x f$ sur $\mathbb{C}(t)$.

Charles Hermite, 1872

Algorithme

(Bostan, Chen, Chyzak, Li, 2010)

Entrée $R = a/f^m$ une fraction rationnelle en t et x

Sortie L'équa. diff. minimale satisfaite par les $\oint_\gamma R(t,x)\mathrm{d}x$

procedure Hermite(R)
- $G_0 \leftarrow [R]$
- $r \leftarrow 0$
- **loop**
  - **if** $\operatorname{rank}_{\mathbb{C}(t)}(G_0, \dots, G_r) < r + 1$ **then**
    - solve $\sum_{k=0}^{r-1} a_k G_k = G_r$ w.r.t. $a_0, \dots, a_{r-1}$ in $\mathbb{C}(t)$
    - **return** $\partial_t^r - \sum_k a_k \partial_t^k$
  - **else**
    - $G_{r+1} \leftarrow [\partial_t G_r]$
    - $r \leftarrow r + 1$

Intégrales multiples

Théorème (de Rham)

Soit $R(x_1, \ldots, x_n)$ une fraction rationnelle. Sont équivalents :

1. *pour tout cycle γ sur lequel R est continue $\oint_\gamma R(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = 0$;*
2. *il existe une $(n-1)$-forme β sans pôle autre que ceux de R telle que $R(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathrm{d}\beta = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A_i}{\partial x_i}\right) \mathrm{d}\mathbf{x}$;*
3. *???*

Idée de réduction Si $R = a/f^m$, décomposer a comme $uf + \sum_{i=1}^{n} v_i \partial_i f$ et écrire

$$\frac{a}{f^m} = \frac{u + \frac{1}{m-1}\sum_i \partial_i v_i}{f^{m-1}} - \frac{1}{m-1}\sum_i \partial_i \left(\frac{v_i}{f^{m-1}}\right).$$

$\rightsquigarrow$ Problèmes pour contrôler les degrés, équivalence avec (3) dure à obtenir.

Formes différentielles sur l'espace projectif

Vite fait

Soit $f(x_0, \ldots, x_n)$ un polynôme homogène de degré N.
Notons $U = \mathbb{P}^n \setminus V(f)$.

- Les n-formes différentielles sur U peuvent s'écrire $\frac{a}{f^m} \mathrm{d}x_0 \cdots \mathrm{d}x_n$, avec a polynôme homogène de degré $mN - n - 1$.
- Les $(n-1)$-formes sont plus compliquées, mais dans cette écriture, leur différentielles sont les $\mathrm{d}\left(\frac{\beta}{f^m}\right) = \sum_{i=0}^n \partial_i \left(\frac{b_i}{f^m}\right) \mathrm{d}\mathbf{x}$ avec β une n-forme polynomiale de degré mN.

Phillip Griffiths, 1969

Théorème (Griffiths)

Soit $f \in k[x_0, \dots, x_n]$ un polynôme homogène, tel que $V(f)$ soit lisse dans $\mathbb{P}^n$. Soient $U = \mathbb{P}^n \setminus V(f)$ et α/f^m une n-forme sur U avec un pôle d'ordre m.

1. *Si $\alpha/f^m = \mathrm{d}B$ pour un certain $B \in \Omega^{n-1}(U)$, alors $\alpha/f^m = \mathrm{d}\left(\beta/f^{m-1}\right)$ pour un certain β.*
2. *Il existe un $B \in \Omega^{n-1}(U)$ tel que $\alpha/f^m = \gamma/f^n + \mathrm{d}B$.*

Point clef Soit $\beta \in \Omega^n(\mathbb{A}^{n+1})$. Si $\mathrm{d}f \wedge \beta = 0$ alors il existe $\gamma \in \Omega^{n-1}(\mathbb{A}^{n+1})$ tel que $\beta = \mathrm{d}f \wedge \gamma$.
C'est-à-dire que si $\sum_i b_i \partial_i f = 0$, alors il existe des polynômes $c_{i,j}$ tels que $b_i = \sum_j c_{i,j} \partial_j f$ et $c_{i,j} = -c_{j,i}$.

Réduction des formes différentielles

Principe

Proposition

Soit $\frac{a\mathrm{d}\mathbf{x}}{f^m}$ une n-forme sur U.

$$\frac{a\mathrm{d}\mathbf{x}}{f^m} = \frac{\gamma}{f^{m-1}} + \mathrm{d}\frac{\beta}{f^\ell} \Leftrightarrow a \in (\partial_0 f, \dots, \partial_n f).$$

Analyse Supposons qu'il existe β, c et ℓ tels que $\frac{a\mathrm{d}\mathbf{x}}{f^m} = \frac{c\mathrm{d}\mathbf{x}}{f^{m-1}} + \mathrm{d}\frac{\beta}{f^l}$.
Par Griffiths, on peut supposer $\ell = m - 1$.
En notant $\beta = \sum_i (-1)^i b_i \widehat{\mathrm{d}x_i}$,

$$a = \sum_i b_i \partial_i f + \left(c + \sum_i \partial_i b_i\right) f \in (\partial_0 f, \dots, \partial_i f)\,.$$

Synthèse Supposons que $a = \sum_i b_i \partial_i f$, alors $a\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathrm{d}f \wedge \beta$,
avec $\beta = \sum_i (-1)^i b_i \widehat{\mathrm{d}x_i}$, et

$$\frac{a\mathrm{d}\mathbf{x}}{f^m} = \frac{1}{m-1}\frac{\mathrm{d}\beta}{f^{m-1}} - \frac{1}{m-1}\mathrm{d}\frac{\beta}{f^{m-1}}.$$

Réduction des formes différentielles

Algorithme

Calculer une base de Gröbner GB pour $(\partial_0 f, \ldots, \partial_n f)$

procedure $[\cdot](a\mathrm{d}\mathbf{x}/f^m)$

  if $m = 1$ **then return** $a\mathrm{d}\mathbf{x}/f^m$

  else

    Décomposer $a\mathrm{d}\mathbf{x}$ comme $r\mathrm{d}\mathbf{x} + \mathrm{d}f \wedge \gamma$ à l'aide de GB

    return $\dfrac{r\mathrm{d}\mathbf{x}}{f^m} + \left[\frac{1}{m-1}\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{f^{m-1}}\right] \quad \left(-\frac{1}{m-1}\mathrm{d}\frac{\gamma}{f^{m-1}}\right)$

Théorème (de Rham, Griffiths)

Soit α une n-forme différentielle sur $U = \mathbb{P}^n \setminus V(f)$. Si $V(f)$ est lisse, alors sont équivalents :

1. *pour tout cycle γ de U l'intégrale $\oint_\gamma \alpha$ s'annule ;*
2. *il existe une $(n-1)$-forme β sur U telle que $\alpha = \mathrm{d}\beta$;*
3. $[\alpha] = 0$.

Intégrales affines

Complexité

- $R = \frac{a}{f}$, une fraction rationnelle en t et $x_1, \dots, x_n$;
- N, le degré de f par rapport à $\mathbf{x}$;
- $d_t, \max(\deg_t f, \deg_t a)$;
- pour simplifier, $\deg_{\mathbf{x}} a + n + 1 \leqslant N$;
- *pas d'hypothèse de régularité sur f.*

Théorème (Bostan, Lairez, Salvy, 2013)

Une équation différentielle $L(t, \partial_t)$ pour $\oint R \mathrm{d}\mathbf{x}$ peut-être calculée en $\widetilde{\mathcal{O}}(e^{3n} N^{8n} d_t)$ opérations sur le corps de base, uniformément en tous les paramètres. L'équation calculée est d'ordre $\leqslant N^n$ et de degré $\mathcal{O}(e^n N^{3n} d_t)$.

Remarque

Si $L(t, \partial_t) \cdot R \mathrm{d}x = \mathrm{d}\beta$, alors β contient au moins $N^{n^2/2}$ coefficients si R est générique.

Formes différentielles rationnelles sur l'espace projectif

Plutôt que de considérer des intégrales sur l'espace affine, on va utiliser l'espace projectif.

- Les p-formes rationnelles sur $\mathbb{P}^n$ sont données par les

$$\sum_{i_1,\dots,i_p} A_{i_1,\dots,i_p}\left(\frac{x_1}{x_0},\dots,\frac{x_n}{x_0}\right)\mathrm{d}\left(\frac{x_{i_1}}{x_0}\right)\cdots\mathrm{d}\left(\frac{x_{i_p}}{x_0}\right).$$

- Ce sont les $\theta \lrcorner \alpha$, avec α une $(p+1)$-forme rationnelle sur $\mathbb{A}^{n+1}$, homogème de degré 0, et θ la dérivation $\sum_{i=0}^n x_i\partial_i$.

Formulaire

- $\theta \lrcorner f\mathrm{d}x = f\theta(x)$
- $\theta \lrcorner (\alpha\wedge\beta) = (\theta\lrcorner\alpha)\wedge\beta + (-1)^{|\alpha|}\alpha\wedge(\theta\lrcorner\beta)$
- $\theta\lrcorner\theta\lrcorner\alpha = 0$ et le complexe $\Omega^\bullet(K(\mathbb{A}^{n+1}))$ muni de la différentielle $\theta\lrcorner$ est exact.

Cohomologie de Rham

Soient $f \in k[x_0, \ldots, x_n]$ un polynôme homogène et $U = \mathbb{P}^n \setminus V(f)$.

Remarque U est une variété affine.

Théorème (Grothendieck)

Si $k = \mathbb{C}$, la cohomologie de Rham de U est donnée par la cohomologie du complexe $(\Omega^\bullet(U), \mathrm{d})$ des formes algébriques.

Filtration par le poids de la cohomologie

Soient $f \in k[x_0, \dots, x_n]$ un polynôme homogène et $U = \mathbb{P}^n \setminus V(f)$.

$$P^s\Omega^p(U) \overset{\text{def}}{=} \{\alpha \in \Omega^p(U) : -\operatorname{ord}_f \alpha \leqslant p - s + 1\}$$

Filtration décroissante : $0 = P^{p+2}\Omega^p(U) \subset P^{p+1}\Omega^p(U) \subset \cdots$,
qui induit une filtration sur la cohomologie :

$$\mathrm{d}\,(P^s\Omega^p(U)) \subset P^s\Omega^{p+1}(U) \rightsquigarrow P^s H^p(U).$$

Théorème (Griffiths, reformulation)

Si $V(f)$ est lisse, alors

1. $P^1 H^n(U) = H^n(U)$;
2. $\dfrac{P^s H^n(U)}{P^{s+1} H^n(U)} = \left(\dfrac{k[\mathbf{x}]}{\operatorname{Jac} f}\right)_{sN-n-1}$.

Alexandru Dimca, 1990

Double complexe de Rham-Koszul

Posons $C^{p,q} = \Omega^{p+q}_{qN}$. Il y a une application naturelle

$$h : \alpha \in C^{p,q} \mapsto \theta \lrcorner \frac{\alpha}{f^q} \in P^p\Omega^{p+q-1}(U).$$

Notons $\operatorname{Tot}^m C = \oplus_{p+q=m} C^{p,q}$ avec la différentielle

$$D_f : \alpha \in C^{p,q} \mapsto -q\mathrm{d}f \wedge \alpha + \mathrm{d}\alpha \in C^{p,q+1} \oplus C^{p+1,q}$$

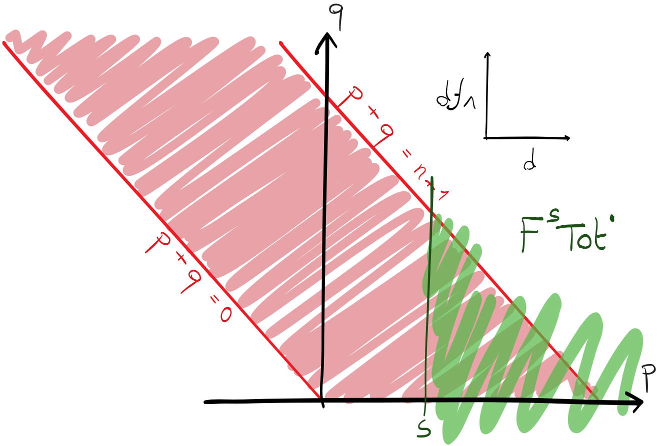
On filtre aussi $\operatorname{Tot}^\bullet C$ par $F^s Tot^m C = \oplus_{p=s}^m C^{p,m-p}$.
On vérifie que $h \circ D_f = -\mathrm{d} \circ h$.

Théorème (Dimca)

Le morphisme de complexe h induit un isomorphisme en cohomologie.

Alexandru Dimca, 1990

Double complexe de Rham-Koszul



Alexandru Dimca, 1990

Double complexe de Rham-Koszul

Preuve du théorème de Griffiths.