REPRÉSENTATIONS INTÉGRALES DES SOMMES BINOMIALES

SÉMINAIRE TEICH
11 avril 2014, Marseille

ALIN BOSTAN PIERRE LAIREZ BRUNO SALVY

Inria

EXEMPLES

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^3 = (-1)^n \frac{(3n)!}{(n!)^3}$$ (Dixon)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 = \sum_{k=0} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^3$$ (Strehl)

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \binom{i+j}{i}^2 \binom{4n-2i-2j}{2n-2i} = (2n+1) \binom{2n}{n}^2$$ (Andrews-Paule)

But — Prouver automatiquement ce type d'identités. Et les découvrir.

MOTIVATIONS

Arithmétique

$$n^3 u_n + (n-1)^3 u_{n-2} = (34n^3 - 51n^2 + 27n - 5) u_{n-1}$$

$$\text{avec } u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 \qquad \text{(Apéry)}$$

Algorithmique

[50] Develop computer programs for simplifying sums that involve binomial coefficients.

Exercise 1.2.6.63
The Art of Computer Programming
Knuth (1968)

Et aussi — Combinatoire, physique théorique, etc

LA MÉTHODE

Somme binomiale

$$a_n \quad = \quad \sum (\ )(\ )$$

LA MÉTHODE

Somme binomiale

$$a_n = \sum (\ )(\ )$$

Encodage

Réprésentation intégrale rationnelle

$$\sum_n a_n t^n = \frac{1}{(2i\pi)^d} \int \cdots \int R(t, \underline{z}) \mathrm{d}\underline{z}$$

LA MÉTHODE

Somme binomiale

$$a_n = \sum (\ )(\ )$$

Encodage

Réprésentation intégrale rationnelle

$$\sum_n a_n t^n = \frac{1}{(2i\pi)^d} \int \cdots \int R(t, \underline{z}) \mathrm{d}\underline{z}$$

Calcul de l'équation de Picard-Fuchs

équation différentielle

$$\sum_{i=0}^{r} p_i(t) y^{(i)} = 0$$

LA MÉTHODE

Somme binomiale

$$a_n \quad = \quad \sum (\ )(\ )$$

Encodage

Réprésentation intégrale rationnelle

$$\sum_n a_n t^n = \frac{1}{(2i\pi)^d} \int \cdots \int R(t, \underline{z}) \mathrm{d}\underline{z}$$

Calcul de l'équation de Picard-Fuchs

équation différentielle

$$\sum_{i=0}^{r} p_i(t) y^{(i)} \quad = \quad 0$$

Test d'égalité, asymptotique,
calcul efficace, etc.

TRAVAUX PRÉCÉDENTS

- *Création télescopique*
  - Zeilberger (1990), sommes simples
  - Wilf-Zeilberger (1992), sommes multiples
  - Wegshaider (1997), améliorations et implémentation
  - Chyzak (2000), généralise Zeilberger
- Intégrales rationnelles
  - Picard (1906), intégrales doubles et triples
  - Griffiths (1969), intégrales multiples
  - Zeilberger, Chyzak, etc
- Représentations intégrales
  - Egoritchev (1984)

L'ensemble va bien au delà des sommes binomiales.

DÉFINITION

Une suite $a : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}$ est une somme binomiale (s.b.) si :

1. $a_n = n$
2. $d = 1$ et $a_n = C^n$, avec $C \in \mathbb{C}$
3. $d = 2$ et $a_{n,k} = \binom{n}{k}$

DÉFINITION

Une suite $a : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}$ est une somme binomiale (s.b.) si :

1. $a_n = n$
2. $d = 1$ et $a_n = C^n$, avec $C \in \mathbb{C}$
3. $d = 2$ et $a_{n,k} = \binom{n}{k}$

4. $a_n = \mu b_n + \lambda c_n$, où b et c sont des s.b. et $\mu, \lambda \in \mathbb{C}$
5. $a_n = b_n c_n$, où b et c sont des s.b.

DÉFINITION

Une suite $a : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}$ est une somme binomiale (s.b.) si :

1. $a_n = n$
2. $d = 1$ et $a_n = C^n$, avec $C \in \mathbb{C}$
3. $d = 2$ et $a_{n,k} = \binom{n}{k}$

4. $a_n = \mu b_n + \lambda c_n$, où b et c sont des s.b. et $\mu, \lambda \in \mathbb{C}$
5. $a_n = b_n c_n$, où b et c sont des s.b.

6. $a_n = b_{\lambda(m)}$, où b est une s.b. et $\lambda : \mathbb{Z}^d \mapsto \mathbb{Z}^{d'}$ une application affine
7. $a_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}^{d'}} b_{n,m} \mathbf{1}_{(n,m)\in\Gamma}$, où b est une s.b. et $\Gamma \in \mathbb{R}^{d+d'}$ un polyèdre rationnel, tel que pour tout n

$$\#\left\{ m \in \mathbb{Z}^{d'} \;\middle|\; (n,m) \in \Gamma \right\} < \infty$$

DÉFINITION

Une suite $a : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}$ est une somme binomiale (s.b.) si :

1. $d = 1$ et $a_n = n \rightsquigarrow n = \binom{n}{1}$
2. $d = 1$ et $a_n = C^n$, avec $C \in \mathbb{C}$
3. $d = 2$ et $a_{n,k} = \binom{n}{k}$
4. $a_n = \mu b_n + \lambda c_n$, où b et c sont des s.b. et $\mu, \lambda \in \mathbb{C}$
5. $a_n = b_n c_n$, où b et c sont des s.b.
6. $a_n = b_{\lambda(m)}$, où b est une s.b. et $\lambda : \mathbb{Z}^d \mapsto \mathbb{Z}^{d'}$ une application affine
7. $a_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}^{d'}} b_{n,m} \mathbf{1}_{(n,m)\in\Gamma}$, où b est une s.b. et $\Gamma \in \mathbb{R}^{d+d'}$ un polyèdre rationnel, tel que pour tout n

$$\#\left\{m \in \mathbb{Z}^{d'} \,\middle|\, (n,m) \in \Gamma\right\} < \infty$$

FORME RÉDUITE

Toute s.b. est combinaison linéaire de s.b. sous la forme :

$$a_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} C^{n,m} n^\alpha m^\beta \prod_{i=1}^{r} \binom{\sum_{j=1}^{d} a_{ij} m_j + \sum_{j=1}^{d'} c_{ij} n_j + e_i}{\sum_{j=1}^{d} b_{ij} m_j + \sum_{j=1}^{d'} d_{ij} n_j + f_i} \mathbf{1}_{(n,m) \in \Gamma}$$

CARACTÉRISATION

Diagonales de fractions rationnelles

Soit $R \in \mathbb{C}(z_1, \dots, z_r)$ une fraction rationnelle, analytique à l'origine :

$$R(z) = \sum_{n_1,\dots,n_r \geqslant 0} c_{n_1,\dots,n_r} z_1^{n_1} \cdots z_r^{n_r}.$$

La *diagonale* de R est $\quad \operatorname{diag} R \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \geqslant 0} c_{n,\dots,n} t^n.$

Théorème

$a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ est une somme binomiale si et seulement si $\sum_n a_n t^n$ est une diagonale de fraction rationnelle.

Corollaire — Si $\sum_n a_n t^n$ est une série algébrique, alors a est une somme binomiale.

SÉRIES FORMELLES

$\mathbb{C}((z_1, \ldots, z_d)) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}((z_1)) \cdots ((z_d))$, le corps des séries de Laurent formelles itérées. *Choix implicite de l'ordre des variables* $z_d \prec \cdots \prec z_1$.

Notation — Pour $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} c_n z^n$,

$$[z^\alpha] f \stackrel{\text{def}}{=} c_\alpha$$

Attention — Pour $f \in \mathbb{C}(z)$, cela dépend du choix de l'ordre des variables !

$$[x^{-1}y^{-1}] \frac{1}{y(x-y)} = \begin{cases} 1 & \text{si } y \prec x \\ 0 & \text{si } x \prec y \end{cases}.$$

Exemple

$$\forall n, k \in \mathbb{Z}, \binom{n}{k} = [z^0] \frac{(1+z)^n}{z^k}$$

FORMULE INTÉGRALE DE CAUCHY

Soit $f \in \mathbb{C}(z_1, \ldots, z_d)$, avec $z_d \prec \cdots \prec z_1$.

$$[z^\alpha]f = \frac{1}{(2i\pi)^d} \oint_\gamma z^{-\alpha} f(z) \frac{\mathrm{d}z_1}{z_1} \cdots \frac{\mathrm{d}z_d}{z_d}$$

avec $\gamma = \{|z_1| = r_1\} \times \cdots \times \{|z_d| = r_d\}$

et $r_d \ll \cdots \ll r_1 \ll 1.$

FORMULE INTÉGRALE DE CAUCHY

Soit $f \in \mathbb{C}(z_1, \ldots, z_d)$, avec $z_d \prec \cdots \prec z_1$.

$$[z^\alpha]f = \frac{1}{(2i\pi)^d} \oint_\gamma z^{-\alpha} f(z) \frac{\mathrm{d}z_1}{z_1} \ldots \frac{\mathrm{d}z_d}{z_d}$$

avec $\gamma = \{|z_1| = r_1\} \times \cdots \times \{|z_d| = r_d\}$

et $r_d \ll \cdots \ll r_1 \ll 1$.

Choix d'un corps de séries formelles $\Leftrightarrow$ Choix d'un cycle d'intégration

NOMBRES DE DELANOY

Représentation intégrale formelle

$$
\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} = \sum_{k=0}^{n} [u^0 v^0] \frac{(1+u)^n}{u^k} \frac{(1+v)^{n+k}}{v^k} \\
&= [u^0 v^0] \sum_{k=0}^{n} ((1+u)(1+v))^n \left(\frac{1+v}{uv} \right)^k \\
&= [u^0 v^0] R^n S \quad \text{avec } R \text{ et } S \text{ dans } \mathbb{C}(t,u,v). \\
&= [t^n u^0 v^0] \sum_{n \geqslant 0} t^n R^n S \\
&= [t^n u^0 v^0] \frac{uv}{(uv - (1+v)^2(1+u)t)(1-(1+v)(1+u)t)}
\end{aligned}
$$

NOMBRES DE DELANOY

Calcul de l'intégrale

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n t^n = \frac{1}{(2i\pi)^2}\oint \frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{(uv-(1+v)^2(1+u)t)(1-(1+v)(1+u)t)}$$

sur un cycle $|t| \ll |v| \ll |u| \ll 1$

$$= \frac{1}{2i\pi}\oint \frac{\mathrm{d}v}{v-(1+v)(2v+1)t}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-6t+t^2}}$$

NOMBRES DE DELANOY

Calcul de l'intégrale

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n t^n = \frac{1}{(2i\pi)^2} \oint \frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{(uv-(1+v)^2(1+u)t)(1-(1+v)(1+u)t)}$$

sur un cycle $|t| \ll |v| \ll |u| \ll 1$

$$= \frac{1}{2i\pi} \oint \frac{\mathrm{d}v}{v-(1+v)(2v+1)t}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-6t+t^2}}$$

$$(t^2-6t+1)y'(t) + (t-3)y(t) = 0$$

POLYÈDRES RATIONNELS

Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ un polyèdre rationnel.

$$F_\Gamma \overset{\text{def}}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \mathbf{1}_{n\in\Gamma}\, x^n$$

Théorème

Il existe des polynômes P et Q tels que $QF_\Gamma = P$.

Brion (1988), formule de décomposition. Barvinok (1994), calcul efficace.

Remarques

- Si Γ contient une droite, alors $P = 0$.
- Si $F_\Gamma \in \mathbb{C}((z))$, alors $F_\Gamma = P/Q$.
- $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \mathbf{1}_{n\in\Gamma}\, n^\alpha x^n = \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(x_d \frac{\partial}{\partial x_d}\right)^{\alpha_d} F_\Gamma$

REPRÉSENTATION INTÉGRALE

Soit $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ une somme binomiale :

$$a_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} C^{n,m} \prod_{i=1}^{r} \binom{\sum_{j=1}^d a_{ij} m_j + c_i b + e_i}{\sum_{j=1}^d b_{ij} m_j + d_i n + f_i} \mathbf{1}_{(n,m) \in \Gamma}$$

REPRÉSENTATION INTÉGRALE

Soit $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ une somme binomiale :

$$a_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} C^{n,m} \prod_{i=1}^{r} \binom{\sum_{j=1}^{d} a_{ij} m_j + c_i b + e_i}{\sum_{j=1}^{d} b_{ij} m_j + d_i n + f_i} \mathbf{1}_{(n,m)\in\Gamma}$$

$$= [z_1^0 \cdots z_r^0] \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} S^n \prod_{j=1}^{d} R_j(z_1, \ldots, z_r)^{m_j} \mathbf{1}_{(n,m)\in\Gamma}$$

REPRÉSENTATION INTÉGRALE

Soit $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ une somme binomiale :

$$a_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} C^{n,m} \prod_{i=1}^{r} \binom{\sum_{j=1}^{d} a_{ij} m_j + c_i b + e_i}{\sum_{j=1}^{d} b_{ij} m_j + d_i n + f_i} \mathbf{1}_{(n,m)\in\Gamma}$$

$$= [z_1^0 \cdots z_r^0] \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} S^n \prod_{j=1}^{d} R_j(z_1, \ldots, z_r)^{m_j} \mathbf{1}_{(n,m)\in\Gamma}$$

$$= [t^n z_1^0 \cdots z_r^0] \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^d} (tS(z))^n \prod_{j=1}^{d} R_j(z_1, \ldots, z_r)^{m_j} \mathbf{1}_{(n,m)\in\Gamma}$$

REPRÉSENTATION INTÉGRALE

Soit $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ une somme binomiale :

$$a_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} C^{n,m} \prod_{i=1}^{r} \binom{\sum_{j=1}^{d} a_{ij} m_j + c_i b + e_i}{\sum_{j=1}^{d} b_{ij} m_j + d_i n + f_i} \mathbf{1}_{(n,m) \in \Gamma}$$

$$= [z_1^0 \cdots z_r^0] \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} S^n \prod_{j=1}^{d} R_j(z_1, \dots, z_r)^{m_j} \mathbf{1}_{(n,m) \in \Gamma}$$

$$= [t^n z_1^0 \cdots z_r^0] \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^d} (tS(z))^n \prod_{j=1}^{d} R_j(z_1, \dots, z_r)^{m_j} \mathbf{1}_{(n,m) \in \Gamma}$$

$$= [t^n z_1^0 \cdots z_r^0] F_\Gamma(tS(z), R_1(z), \dots, R_d(z))$$

REPRÉSENTATION INTÉGRALE

Conclusion

$$\sum_n t^n \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} C^{n,m} \prod_{i=1}^{r} \binom{\sum_{j=1}^d a_{ij}m_j + c_i b + e_i}{\sum_{j=1}^d b_{ij}m_j + d_i n + f_i} \mathbf{1}_{(n,m)\in\Gamma}$$
$$= \frac{1}{(2i\pi)^r} \oint F_\Gamma(tS(z), R_1(z), \dots, R_d(z)) \frac{\mathrm{d}z_1}{z_1} \dots \frac{\mathrm{d}z_r}{z_r}$$

Question — Comment calculer cette intégrale ?

FORME ANALYIQUE

Problème

- $x_1, \ldots, x_n$, des variables d'intégration
- t, un paramètre
- $R(t, x_1, \ldots, x_n)$, une fraction rationnelle sur $\mathbb{C}$
- γ, un n-cycle dans $\mathbb{C}^n$

Calculer $L \in \mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$ tel que

$$L \cdot \oint_\gamma R(t, x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = 0.$$

Théorème (Picard, etc) — Ces intégrales vérifient des équations différentielles à coefficients polynomiaux.

FORME ALGÉBRIQUE

Problème

- $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle avec une dérivation δ, usuellement $\mathbb{Q}(t)$
- $x_0, \ldots, x_n$, des variables d'intégration
- $R(x) = a/f^q$, une fraction rationnelle sur $\mathbb{K}$, homogène de degré $-n-1$

Calculer $L \in \mathbb{K}\langle\delta\rangle$ tel qu'il existe des polynômes $b_0, \ldots, b_n$ et un entier s tels que

$$L(R) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{b_i}{f^s}\right),$$

alias création télescopique.

Oubli du cycle d'intégration + homogénéisation + formulation algébrique

PROBLÈME NON-PARAMÉTRÉ

Réduction des périodes

Problème

- $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle
- $x = x_0, \ldots, x_n$, des variables
- $R(\mathbf{x}) = a/f^q$, une fraction rationnelle sur $\mathbb{K}$, homogène de degré $-n-1$

Donner un algorithme pour décider s'il existe des polynômes $b_0, \ldots, b_n$ et un entier s tels que

$$R = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{b_i}{f^s} \right),$$

PROBLÈME NON-PARAMÉTRÉ

Réduction des périodes

Problème

- $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle
- $x = x_0, \ldots, x_n$, des variables
- $R(\mathbf{x}) = a/f^q$, une fraction rationnelle sur $\mathbb{K}$, homogène de degré $-n-1$

Donner un algorithme pour décider s'il existe des polynômes $b_0, \ldots, b_n$ et un entier s tels que

$$R \mathrm{d}x_0 \cdots \mathrm{d}x_n = \mathrm{d}\left(\frac{\beta}{f^s}\right),$$

Mots clefs — Cohomologie de Rham du complémentaire d'une hypersurface projective, connexion de Gauss-Manin

RÉDUCTION DE L'ORDRE DU PÔLE

Notations

- $A = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$
- $A_f = A[1/f]$

$$\sum_{i=0}^{n} \partial_i \left(\frac{b_i}{f^{q-1}} \right) = \frac{\sum_{i=0}^{n} \partial_i b_i}{f^{q-1}} - (q-1) \frac{\sum_{i=0}^{n} b_i \partial_i f}{f^q}$$

Proposition — Si $a \in (\partial_0 f, \dots, \partial_n f)$ et $q > 0$, alors il existe un polynôme a' tels que

$$\frac{a}{f^q} = \frac{a'}{f^{q-1}} \mod \sum_{i=0}^{n} \partial_i A_f .$$

THÉORÈME DE GRIFFITHS (1969)

Si l'hypersurface projective $V(f)$ est régulière, alors pour toute fraction homogène a/f^q de degré $-n-1$ les assertions

(i) $a \in (\partial_0 f, \dots, \partial_n f)$

(ii) il existe un a' tel que $a/f^q = a'/f^{q-1} \mod \sum_{i=0}^n \partial_i A_f$

sont équivalentes.

Remarque — Les hypothèses suivantes sont équivalentes :

- l'hypersurface projective $V(f)$ est régulière
- l'idéal $(\partial_0 f, \dots, \partial_n f)$ est de dimension zéro
- si $\sum_{i=0}^n b_i \partial_i f = 0$, alors il existe des polynômes c_{ij} tels que $c_{ij} = -c_{ji}$ et

$$b_i = \sum_{j=0}^{n} c_{ij} \partial_j f$$

CAS SINGULIER

L'équivalence de Griffiths n'est *jamais* vraie quand $V(f)$ est singulier.

Exemple — Avec $f = xy^2 - z^3$,

$$x^3/f^2 = \partial_x\left(\tfrac{2}{7}x^4/f^2\right) - \partial_y\left(\tfrac{1}{7}x^3y/f^2\right)$$

alors que x^3 n'est pas dans $(\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f) = (xy, y^2, z^2)$.

Réductions d'ordre supérieur

$$\sum_{i=0}^{n} b_i \partial_i f = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} \partial_i \left(\frac{b_i}{f^q}\right) = \frac{\sum_{i=0}^{n} \partial_i b_i}{f^q}.$$

REFORMULATION

- $B_q = \{a/f^q \mid a \in A\}$
- $W_q^1 \overset{\text{def}}{=} \left\{ \left(\frac{(q-1)\sum_{i=0}^n b_i \partial_i f}{f^q}, \frac{\sum_{i=0}^n \partial_i b_i}{f^{q-1}} \right) \,\middle|\, b_0, \ldots, b_n \in A \right\}$
- $W_q^1 \subset B_q \times B_{q-1}$
- Si $(R, R') \in W_q^1$ alors $R \equiv R' \mod \sum_i \partial_i A_f$.

Reformulation de Griffiths — Si $V(f)$ est régulier, alors pour tout $R \in B_q$ homogène de degré $-n-1$

$$R \in B_{q-1} + \sum_{i=0}^n \partial_i A_f \Leftrightarrow \exists R' \in B_{q-1}, (R, R') \in W_q^1.$$

RÉDUCTIONS D'ORDRE SUPÉRIEUR

Remarque — Si $(0, R) \in W_q^1$, alors $R \equiv 0 \mod \sum_i \partial_i A_f$.

$$W_q^2 \stackrel{\text{def}}{=} W_q^1 + \{(R, 0) \mid (0, R) \in W_q^1\}$$

RÉDUCTIONS D'ORDRE SUPÉRIEUR

Remarque — Si $(0, R) \in W_q^1$, alors $R \equiv 0 \mod \sum_i \partial_i A_f$.

$$W_q^2 \stackrel{\text{def}}{=} W_q^1 + \left\{ (R, 0) \mid (0, R) \in W_q^1 \right\}$$

$$W_q^{r+1} \stackrel{\text{def}}{=} W_q^r + \left\{ (R, 0) \mid (0, R) \in W_{q+1}^r \right\}$$

Proposition — Soit $R \in B_q$. Pour r assez grand

$$R \in B_{q-1} + \sum_i \partial_i A_f \Leftrightarrow \exists R' \in B_{q-1}, (R, R') \in W_q^r.$$

Problème — Comment déterminer r ?

THÉORÈMES DE DIMCA

Théorème (Dimca) — Il existe un r ne dépendant que de f tel que pour tout $a \in A$ et $q \geqslant 0$, si a/f^q est dans $\sum_i \partial_i A_f$, alors

$$a/f^q = \sum_{i=0}^{n} \partial_i (b_i/f^{q+r}),$$

pour certains polynômes b_i.

Conjecture (Dimca) — $r = n + 1$ convient.

Théorème (Dimca) — Pour tout $R \in A_f$, il existe un polynôme a tel que

$$R \equiv a/f^n \mod \sum_i \partial_i A_f.$$

CALCUL DES INTÉGRALES RATIONNELLES

$$\frac{1}{(2i\pi)^d} \oint \frac{a(t,x)}{f(t,x)} \mathrm{d}x$$

1. Choisir un r, par exemple 1
2. Chercher une relation linéaire entre les $\partial_t^k R$, modulo $\sum_i \partial_i A_f$, à l'aide des W_q^r.
3. Si l'on tombe sur un b/f^q, avec $q > n$, que l'on ne peut réduire, augmenter r.

+ algorithme rapide pour calculer W_r^q.