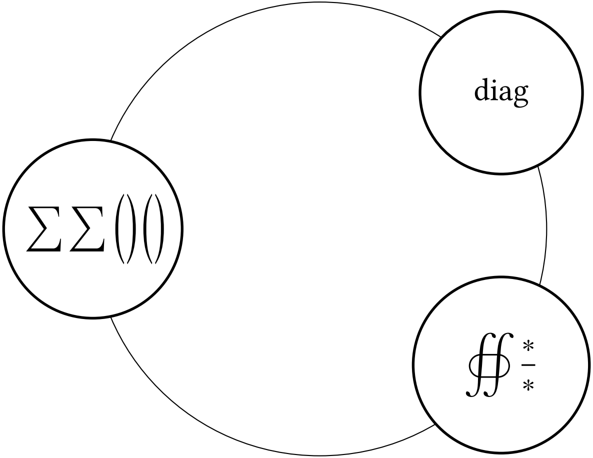
Sommes binomiales multiples et Diagonales de fractions rationnelles

Journées de combinatoire de Bordeaux
4 février 2015

Alin Bostan
Inria

Pierre Lairez
TU Berlin

Bruno Salvy
Inria


diag
$\sum\sum\binom{}{}\binom{}{}$
$\oiint \frac{*}{*}$

Sommes binomiales multiples

Exemples

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}^3 = (-1)^n\frac{(3n)!}{(n!)^3} \qquad \text{(Dixon)}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2 = \sum_{k=0}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}^3 \qquad \text{(Strehl)}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{i+j}{i}^2\binom{4n-2i-2j}{2n-2i} = (2n+1)\binom{2n}{n}^2$$

$$\sum_{r\geqslant 0}\sum_{s\geqslant 0}(-1)^{n+r+s}\binom{n}{r}\binom{n}{s}\binom{n+s}{s}\binom{n+r}{r}\binom{2n-r-s}{n} = \sum_{k\geqslant 0}\binom{n}{k}^4$$

But — Calculer, c'est-à-dire prouver automatiquement ce type d'identités et des récurences.

Sommes binomiales multiples

Des suites intéressantes

Arithmétique

$$n^3 u_n + (n-1)^3 u_{n-2} = (34n^3 - 51n^2 + 27n - 5) u_{n-1}$$

$$\text{avec } u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 \quad \text{(Apéry)}$$

Algorithmique

> *[50] Develop computer programs for simplifying sums that involve binomial coefficients.*
>
> Exercise 1.2.6.63
> *The Art of Computer Programming*
> Knuth (1968)

Et aussi — Combinatoire, physique théorique, etc

Définition

- $\delta : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ est une somme binomiale. ($\delta_0 = 1$ et $\delta_n = 0$ si $n \neq 0$)
- $n \in \mathbb{Z} \mapsto a^n \in \mathbb{C}$ est une somme binomiale pour tout $a \in \mathbb{C}^\times$.
- $(n, k) \in \mathbb{Z}^2 \mapsto \binom{n}{k} \in \mathbb{C}$ est une somme binomiale.

- Si $u, v : \mathbb{Z}^p \to \mathbb{C}$ sont des s.b., alors $u + v$ et uv sont des s.b.
- Si $u : \mathbb{Z}^p \to \mathbb{C}$ est une s.b. et $\lambda : \mathbb{Z}^p \to \mathbb{Z}^q$ une application affine, alors $u \circ \lambda$ est une s.b.
- Si $u : \mathbb{Z}^p \to \mathbb{C}$ est une s.b., alors

$$(n_1, \ldots, n_p) \in \mathbb{Z}^p \mapsto \sum_{k=0}^{n_1} u_{k, n_2, \ldots, n_p} \in \mathbb{C}$$

est une s.b.

Diagonale d'une série formelle

Définition

- $f = \sum_{i_1,\dots,i_n \in \mathbb{N}^n} a_{i_1,\dots,i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \in \mathbb{C}[\![x_1,\dots,x_n]\!]$
- $\operatorname{diag} f \overset{\text{def}}{=} \sum_{i \geqslant 0} a_{i,\dots,i} t^i$

Exemples

(Produit d'Hadamard) $\sum_{i\geqslant 0} a_i b_i t^i = \operatorname{diag}\left(\left(\sum_i a_i x^i\right)\left(\sum_i b_i y^i\right)\right)$

(Produit de diagonales) $(\operatorname{diag} f(x_1,\dots,x_n))\,(\operatorname{diag} g(y_1,\dots,y_m)) = \operatorname{diag}\left(f(x_1 y_2 \cdots y_m, x_2, \dots, x_n) g(x_1 \dots, x_n, y_2, \dots, y_m)\right)$

Diagonale d'une série rationnelle

Propriétés

- Diagonale de série rationnelle : $\operatorname{diag} f$, avec $f \in \mathbb{C}[[\underline{x}]] \cap \mathbb{C}(\underline{x})$

Théorème (Christol, Lipshitz) — La diagonale d'une série rationnelle est solution d'une équa. diff. linéaire à coefficients polynomiaux.

Théorème (Furstenberg) — Si $\sum a_n t^n$ est une série *algébrique*, alors c'est la diagonale d'une fraction rationnelle.

Théorème (Furstenberg) — Si $\sum a_n t^n$ est la diagonale d'une série rationnelle, alors c'est une série algébrique modulo p.

Conjecture (Christol) — Si $\sum a_n t^n$ est une série à coefficients entiers, de rayon de convergence > 0, et solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux, alors c'est la diagonale d'une fraction rationnelle.

Diagonales et sommes binomiales

Théorème (Bostan, Lairez, Salvy) — Une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une somme binomiale **si et seulement si** sa série génératrice $\sum u_n t^n$ est la diagonale d'une série rationnelle.

Exemple

$$\sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2\right)t^n = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)-x_4(x_1+x_2x_3-x_1x_2x_3)}\right)$$

Diagonales et sommes binomiales

Conséquences de l'équivalence

Corollaire du théorème de Furstenberg — Si $\sum u_n t^n$ est une série algébrique, alors (u_n) est une somme binomiale.

Corollaire du théorème de Furstenberg — Si (u_n) est une somme binomiale, alors $\sum u_n t^n$ est une série algébrique modulo p.

Reformulation de la conjecture de Christol — Si (u_n) est une suite d'entiers P-récursive à croissance au plus exponentielle, alors c'est une somme binomiale.

Développer en série des fractions

- Avec une seule variable, c'est facile :

$$\frac{u(x)}{v(x)} = \sum_{n \geqslant -\mathrm{N}} a_n x^n \in \mathbb{C}((x))$$

- Avec plusieurs variables, il faut choisir : $x_1 \prec \cdots \prec x_n$

$$\mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n) \subset \mathbb{C}(x_2, \ldots, x_n)((x_1)) \subset \cdots \subset \mathbb{C}((x_n)) \cdots ((x_1))$$

Exemple — Avec $x \prec y$,

$$\frac{1}{x-y} = \frac{-1}{y} \frac{1}{1 - \frac{x}{y}} = -\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{y^{n+1}}.$$

Résidus

- $f = \sum_{k_1,\dots,k_n} a_{k_1,\dots,k_n} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} \in \mathbb{C}((x_n))\cdots((x_1))$
- $\operatorname{res}_{x_i} f \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k_1,\dots,\widehat{k_i},\dots,k_n} a_{k_1,\dots,k_{i-1},-1,k_{i+1},\dots,k_n} x_1^{k_1} \cdots \widehat{x_i^{-1}} \cdots x_n^{k_n}$
- $\operatorname{res}_{x_i,x_j} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{res}_{x_i} \circ \operatorname{res}_{x_j}$

Exemples — Avec $x \prec y$

- $\operatorname{res}_x \frac{1}{x-y} = -\operatorname{res}_x \left(\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{y^{n+1}} \right) = 0$
- $\operatorname{res}_y \frac{1}{x-y} = -\operatorname{res}_y \left(\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{y^{n+1}} \right) = -1$
- $\operatorname{diag} f(x_1,\dots,x_n) = \operatorname{res}_{x_2,\dots,x_n} \left(\frac{1}{x_2\cdots x_n} f\left(\frac{x_1}{x_2\cdots x_n}, x_2, \dots, x_n\right)\right)$

Représentations intégrales (formelles)

Nombres de Delannoy

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k}$$

Coefficient binomial — $\displaystyle \binom{n}{k} = \operatorname*{res}_z \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}}$

- Les briques de bases sont définies par une représentation intégrale, pas des récurrences.

Multiplication

Représentations intégrales (formelles)

Nombres de Delannoy

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k}$$

Coefficient binomial — $\binom{n}{k} = \operatorname*{res}_z \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}}$

- Les briques de bases sont définies par une représentation intégrale, pas des récurrences.

Multiplication

$$\binom{n}{k} = \operatorname*{res}_z \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}}, \quad \binom{n+k}{k} = \operatorname*{res}_z \frac{(1+z)^{n+k}}{z^{k+1}}$$

Représentations intégrales (formelles)

Nombres de Delannoy

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k}$$

Coefficient binomial — $\binom{n}{k} = \operatorname{res}_z \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}}$

- Les briques de bases sont définies par une représentation intégrale, pas des récurrences.

Multiplication

$$\binom{n}{k} \binom{n+k}{k} = \left(\operatorname{res}_z \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}} \right) \left(\operatorname{res}_z \frac{(1+z)^{n+k}}{z^{k+1}} \right)$$

Représentations intégrales (formelles)

Nombres de Delannoy

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k}$$

Coefficient binomial — $\binom{n}{k} = \operatorname*{res}_z \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}}$

- Les briques de bases sont définies par une représentation intégrale, pas des récurrences.

Multiplication

$$\binom{n}{k}\binom{n+k}{k} = \left(\operatorname*{res}_x \frac{(1+x)^n}{x^{k+1}}\right)\left(\operatorname*{res}_y \frac{(1+y)^{n+k}}{y^{k+1}}\right)$$

Représentations intégrales (formelles)

Nombres de Delannoy

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k}$$

Coefficient binomial — $\binom{n}{k} = \operatorname{res}_z \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}}$

- Les briques de bases sont définies par une représentation intégrale, pas des récurrences.

Multiplication

$$\binom{n}{k} \binom{n+k}{k} = \operatorname{res}_{x,y} \frac{(1+x)^n (1+y)^{n+k}}{x^{k+1} y^{k+1}}$$

Représentations intégrale (formelles)

Nombres de Delannoy

Sommation

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} = \operatorname*{res}_{x,y} \sum_{k=0}^{n} \frac{(1+x)^n (1+y)^{n+k}}{x^{k+1} y^{k+1}}$$

Série génératice

Représentations intégrale (formelles)

Nombres de Delannoy

Sommation

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k} = \operatorname*{res}_{x,y} \frac{1}{xy} \sum_{k=0}^{n} \left((1+x)(1+y)\right)^{n} \left(\frac{1+y}{xy}\right)^{k}$$

Série génératice

Représentations intégrale (formelles)

Nombres de Delannoy

Sommation

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k} = \operatorname*{res}_{x,y}\left(\frac{(1+x)^n(1+y)^{2n+1}}{(1+y-xy)(xy)^{n+1}} - \frac{(1+x)^n(1+y)^n}{1+y-xy}\right)$$

Série génératice

Représentations intégrale (formelles)

Nombres de Delannoy

Sommation

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k} = \operatorname*{res}_{x,y} \left(\frac{(1+x)^n(1+y)^{2n+1}}{(1+y-xy)(xy)^{n+1}} - \frac{(1+x)^n(1+y)^n}{1+y-xy} \right)$$

Série génératice

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n = \operatorname*{res}_{x,y} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(1+x)^n(1+y)^{2n+1}}{(1+y-xy)(xy)^{n+1}} - \frac{(1+x)^n(1+y)^n}{1+y-xy} \right) t^n,$$

Représentations intégrale (formelles)

Nombres de Delannoy

Sommation

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k} = \operatorname*{res}_{x,y} \left(\frac{(1+x)^n(1+y)^{2n+1}}{(1+y-xy)(xy)^{n+1}} - \frac{(1+x)^n(1+y)^n}{1+y-xy} \right)$$

Série génératice

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n = \operatorname*{res}_{x,y} \frac{1}{(xy - t(1+x)(1+y)^2)\,(1 - t(1+x)(1+y))}$$

- avec $t \prec x, y$, pour que la somme converge

Représentations intégrale (formelles)

Nombres de Delannoy

Sommation

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k} = \operatorname*{res}_{x,y}\left(\frac{(1+x)^n(1+y)^{2n+1}}{(1+y-xy)(xy)^{n+1}} - \frac{(1+x)^n(1+y)^n}{1+y-xy}\right)$$

Série génératice

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n = \operatorname*{res}_{x,y} \frac{1}{\left(xy - t(1+x)(1+y)^2\right)\left(1 - t(1+x)(1+y)\right)}$$

- avec $t \prec x, y$, pour que la somme converge
- Pas d'équivalence entre suite et séries génératrices. Les s.g. sont des sommes infinies commes les autres dont on s'attachera à montrer la convergence (formelle).

Sommes binomiales et résidus

Proposition — Si $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ est une somme binomiale, alors il existe une fraction rationnelle $\mathrm{R}(t, x_1, \ldots, x_n)$ telle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n = \operatorname*{res}_{x_1,\ldots,x_n} \mathrm{R}(t, x_1, \ldots, x_n),$$

avec $t \prec x_1 \prec \cdots \prec x_n$.

Corollaire — Il existe des algorithmes pour

- calculer une récurrence satisfaite par une somme binomiale ;
- tester l'égalité de deux sommes binomiales.

Bibliographie — Egorychev (1984)

Cacul des résidus

Intégration

- $\mathrm{R}(t, x_1, \ldots, x_n)$ fraction rationnelle, avec $t < x_1 < \cdots < x_n$
- $f(t) = \operatorname*{res}_{x_1, \ldots, x_n} \mathrm{R}(t, x_1, \ldots, x_n)$
- On cherche une équation différentielle vérifiée par f

Principe — Touver $\mathcal{L}(t, \partial_t)$ tel que

$$\mathcal{L}(\mathrm{R}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathrm{C}_i}{\partial x_i} \quad \text{et par suite } \mathcal{L}(f) = \operatorname*{res}_{x_1, \ldots, x_n} \mathcal{L}(\mathrm{R}) = 0$$

Mots clefs — Équations de Picard-Fuchs, création télescopique, intégration des fonctions holonomes, algorithme de Chyzak, algorithme de Koutschan, algorithme de Lairez, etc.

Création télescopique (intermède)

À la Zeilberger

Pour calculer $a_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n} u_{n,k}$, on cherche $\mathcal{P}(n, \sigma_n)$ tel que

$$\mathcal{P}(u_{n,k}) = v_{n,k+1} - v_{n,k} = \Delta_k v_{n,k},$$

et on somme sur k : $\mathcal{P}(a_n) \simeq \sum_{k=0}^{n+*} \mathcal{P}(u_{n,k}) \simeq v_{n,n+*+1} - v_{n,0} \simeq 0.$

Exemple — Avec $u_{n,k} = (-1)^k \binom{2n}{k}^3$, on calcule que

$$(n+1)^2 u_{n+1,k} + 3(3n+1)(3n+2)u_{n,k} = \Delta_k \frac{[\ldots] \quad u_{n,k}}{(2n-k+2)^3(2n-k+1)^3}$$

Et en effet $(n+1)^2 a_{n+1} + 3(3n+1)(3n+2)a_n = 0$

Création télescopique (intermède)

Sommes multiples

Pour calculer $a_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} u_{n,i,j}$, on cherche $\mathcal{P}(n,\sigma_n)$ tel que

$$\mathcal{P}(u_{n,i,j}) = (v_{n,i+1,j} - v_{n,i,j}) + (w_{n,i,j+1} - w_{n,i,j}) = \Delta_i v_{n,i,j} + \Delta_j w_{n,i,j}.$$

Exemple — Avec $u_{n,i,j} = \binom{i+j}{j}^2 \binom{4n-2i-2j}{2n-2i}$, on trouve

$$u_{n,i,j} = \Delta_i \left(\frac{[\ldots] \quad u_{n,i,j}}{(1+j)(i+j-2n)} \right) + \Delta_j \left(\frac{[\ldots] \quad u_{n,i,j}}{(1+j)(i+j-2n)} \right) \rightsquigarrow a_n = (2n+1)\binom{2n}{n}^2$$

Bibliographie — Zeilberger (1990), Wilf-Zeilberger (1992), Wegshaider (1997), Chyzak (2000), Koutschan (2010)

Résumé

✓ Algorithmique pour calculer des récurrence et démontrer des identités.

✓ Manipulation des suites non pas par des récurrences, mais par des identités de la forme

$$u_{n_1,\dots,n_k} = \operatorname*{res}_{x_1,\dots,x_r} \left(\mathrm{G} \cdot \mathrm{F}_1^{n_1} \cdots \mathrm{F}_k^{n_k} \right).$$

(Quand $\mathrm{F}_i = 1/x_i$, on retrouve les séries génératrices usuelles.)

✓ Preuves automatiques de bout en bout.

✗ Limité aux sommes binomiales, alors que la création télescopique fait bien plus.

Calcul partiel des résidus

- $\mathrm{R}(t, x_1, \ldots, x_n)$ fraction rationnelle, avec $t \prec x_1 \prec \cdots \prec x_n$
- $$\operatorname*{res}_{x_1,\ldots,x_n} \mathrm{R} = \operatorname*{res}_{x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_n} \underbrace{\operatorname*{res}_{x_i} \mathrm{R}}_{\text{fraction rationnelle ?}}$$
- Parfois oui, parfois non
- Quand c'est le cas, on peut parfois le détecter

Exemple — $x_1 \prec \ldots \prec x_i \prec y \prec x_{i+1} \prec \cdots \prec x_n$

$$\operatorname*{res}_y \frac{a(\underline{x})}{y - b(\underline{x})} = \begin{cases} a(\underline{x}) & \text{si } \mathrm{mt}(b) \prec y \\ 0 & \text{si } \mathrm{mt}(b) \succ y \end{cases}$$

Calcul partiel des résidus

- $R(\underline{x}, y) = \frac{a(\underline{x}, y)}{f(\underline{x}, y)}$ fraction rationnelle
- Par la décomposition en éléments simples, on peut supposer f irréductible.
- $\exists N > 0$ tel que $f(\underline{x}, y)$ soit scindé dans $\mathbb{C}((x_n^{1/N}))\cdots((x_1^{1/N}))[y]$. Soit A l'ensemble des racines.
- $R = \displaystyle\sum_{\alpha \in A} \frac{u_\alpha}{y - \alpha} + \frac{\partial}{\partial y}(\cdots)$

Trois possibilités :

- $\operatorname{mt}(\alpha) \succ y$ pour tout $\alpha \in A$, dans ce cas $\operatorname{res}_y R = 0$;
- $\operatorname{mt}(\alpha) \prec y$ pour tout $\alpha \in A$, dans ce cas $\operatorname{res}_y R = \operatorname*{res.\,rat.}_{y=\infty} R$;
- ni l'un, ni l'autre, on ne peut rien dire.

Démo !