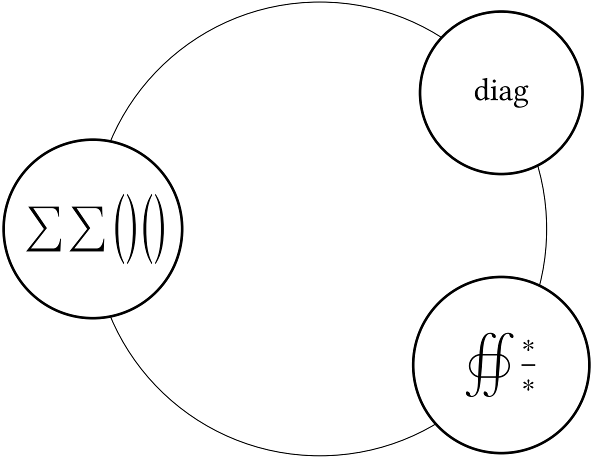
Sommes binomiales multiples et Diagonales de fractions rationnelles

Séminaire tournant de théorie des nombres
Grenoble, 17 mars 2015

Alin Bostan
Inria

Pierre Lairez
TU Berlin

Bruno Salvy
Inria


diag

Équivalence entre diagonales et sommes binomiales

Représentations intégrales

Démonstration du théorème

Sommes binomiales multiples

Exemples

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^3 = (-1)^n \frac{(3n)!}{(n!)^3} \qquad \text{(Dixon)}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 = \sum_{k=0} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^3 \qquad \text{(Strehl)}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \binom{i+j}{i}^2 \binom{4n-2i-2j}{2n-2i} = (2n+1)\binom{2n}{n}^2$$

$$\sum_{r\geqslant 0} \sum_{s\geqslant 0} (-1)^{n+r+s} \binom{n}{r}\binom{n}{s}\binom{n+s}{s}\binom{n+r}{r}\binom{2n-r-s}{n} = \sum_{k\geqslant 0} \binom{n}{k}^4$$

But — Calculer, c'est-à-dire prouver automatiquement ce type d'identités et des récurences.

Définition

- $\delta : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ est une somme binomiale. ($\delta_0 = 1$ et $\delta_n = 0$ si $n \neq 0$)
- $n \in \mathbb{Z} \mapsto a^n \in \mathbb{C}$ est une somme binomiale pour tout $a \in \mathbb{C}^\times$.
- $(n, k) \in \mathbb{Z}^2 \mapsto \binom{n}{k} \in \mathbb{C}$ est une somme binomiale.

- Si $u, v : \mathbb{Z}^p \to \mathbb{C}$ sont des s.b., alors $u + v$ et uv sont des s.b.
- Si $u : \mathbb{Z}^p \to \mathbb{C}$ est une s.b. et $\lambda : \mathbb{Z}^p \to \mathbb{Z}^q$ une application affine, alors $u \circ \lambda$ est une s.b.
- Si $u : \mathbb{Z}^p \to \mathbb{C}$ est une s.b., alors

$$(n_1, \ldots, n_p) \in \mathbb{Z}^p \mapsto \sum_{k=0}^{n_1} u_{k, n_2, \ldots, n_p} \in \mathbb{C}$$

est une s.b.

Diagonale d'une série formelle

Définition

- $f = \sum_{i_1,\ldots,i_n \in \mathbb{N}^n} a_{i_1,\ldots,i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \in \mathbb{C}[\![x_1,\ldots,x_n]\!]$
- $\operatorname{diag} f \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \geqslant 0} a_{i,\ldots,i} t^i$

Exemples

(Produit d'Hadamard) $\sum_{i \geqslant 0} a_i b_i t^i = \operatorname{diag}\left(\left(\sum_i a_i x^i\right)\left(\sum_i b_i y^i\right)\right)$

(Produit de diagonales) $(\operatorname{diag} f(x_1,\ldots,x_n))\,(\operatorname{diag} g(y_1,\ldots,y_m)) =$
$\operatorname{diag}\left(f(x_1 y_2 \cdots y_m, x_2, \ldots, x_n) g(x_1 \ldots, x_n, y_2, \ldots, y_m)\right)$

Diagonale d'une série rationnelle

Propriétés

- Diagonale de série rationnelle : $\operatorname{diag} f$, avec $f \in \mathbb{C}[\![\underline{x}]\!] \cap \mathbb{C}(\underline{x})$

Théorème (Christol, Lipshitz) — La diagonale d'une série rationnelle est solution d'une équa. diff. linéaire à coefficients polynomiaux.

Théorème (Furstenberg) — Si $\sum a_n t^n$ est une série *algébrique*, alors c'est la diagonale d'une fraction rationnelle.

Théorème (Furstenberg) — Si $\sum a_n t^n$ est la diagonale d'une série rationnelle, alors c'est une série algébrique modulo p.

Conjecture (Christol) — Si $\sum a_n t^n$ est une série à coefficients entiers, de rayon de convergence > 0, et solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux, alors c'est la diagonale d'une fraction rationnelle.

Théorème de Furstenberg

Exemple

$$f = \sum_n \frac{(3n)!}{n!^3} t^3 = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{1-x-y-z}\right)$$

- $f \equiv (1+t)^{-\frac{1}{4}} \mod 5$
- $f \equiv \left(1-t-t^2\right)^{-\frac{1}{6}} \mod 7$
- $f \equiv \left(1+6t+2t^2+8t^3\right)^{-\frac{1}{10}} \mod 11$
- ...

Par ailleurs,

$$\left(27t^2-t\right) f'' + (54t-1)f' + 6f = 0.$$

Diagonales et sommes binomiales

Théorème (Bostan, Lairez, Salvy) — Une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une somme binomiale **si et seulement si** sa série génératrice $\sum u_n t^n$ est la diagonale d'une série rationnelle.

Exemple

$$\sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2\right)t^n = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)-x_4(x_1+x_2x_3-x_1x_2x_3)}\right)$$

Diagonales et sommes binomiales

Conséquences de l'équivalence

Corollaire du théorème de Christol-Lipshitz — Si (u_n) est une somme binomiale, alors elle est P-récursive.

Corollaire du théorème de Furstenberg — Si $\sum u_n t^n$ est une série algébrique, alors (u_n) est une somme binomiale.

Corollaire du théorème de Furstenberg — Si (u_n) est une somme binomiale, alors $\sum u_n t^n$ est une série algébrique modulo p.

Reformulation de la conjecture de Christol — Si (u_n) est une suite d'entiers P-récursive à croissance au plus exponentielle, alors c'est une somme binomiale.

Développer en série des fractions

- Avec une seule variable, c'est facile :

$$\frac{u(x)}{v(x)} = \sum_{n \geqslant -N} a_n x^n \in \mathbb{C}((x))$$

- Avec plusieurs variables, il faut choisir : $x_1 \prec \cdots \prec x_n$

$$\mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n) \subset \mathbb{C}(x_2, \ldots, x_n)((x_1)) \subset \cdots \subset \mathbb{C}((x_n)) \cdots ((x_1))$$

Exemple — Avec $x \prec y$,

$$\frac{1}{x-y} = \frac{-1}{y} \frac{1}{1 - \frac{x}{y}} = -\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{y^{n+1}}.$$

Résidus

- $f = \sum_{k_1,\ldots,k_n} a_{k_1,\ldots,k_n} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} \in \mathbb{C}(\!(x_n)\!) \cdots (\!(x_1)\!)$
- $\operatorname*{res}_{x_i} f \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k_1,\ldots,\widehat{k_i},\ldots,k_n} a_{k_1,\ldots,k_{i-1},-1,k_{i+1},\ldots,k_n} x_1^{k_1} \cdots \widehat{x_i^{-1}} \cdots x_n^{k_n}$
- $\operatorname*{res}_{x_i,x_j} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname*{res}_{x_i} \circ \operatorname*{res}_{x_j}$

Exemples — Avec $x \prec y$

- $\operatorname{res}_x \frac{1}{x-y} = -\operatorname{res}_x \left(\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{y^{n+1}} \right) = 0$
- $\operatorname{res}_y \frac{1}{x-y} = -\operatorname{res}_y \left(\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{y^{n+1}} \right) = -1$
- $\operatorname{diag} f(x_1,\ldots,x_n) = \operatorname{res}_{x_2,\ldots,x_n} \left(\frac{1}{x_2 \cdots x_n} f\left(\frac{x_1}{x_2 \cdots x_n}, x_2, \ldots, x_n \right) \right)$

Représentations intégrales (formelles)

Nombres de Delannoy

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k}$$

Coefficient binomial — $\binom{n}{k} = \operatorname*{res}_z \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}}$

- Les briques de bases sont définies par une représentation intégrale, pas des récurrences.

Multiplication

Représentations intégrales (formelles)

Nombres de Delannoy

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k}$$

Coefficient binomial — $\binom{n}{k} = \operatorname*{res}_z \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}}$

- Les briques de bases sont définies par une représentation intégrale, pas des récurrences.

Multiplication

$$\binom{n}{k} = \operatorname*{res}_z \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}}, \quad \binom{n+k}{k} = \operatorname*{res}_z \frac{(1+z)^{n+k}}{z^{k+1}}$$

Représentations intégrales (formelles)

Nombres de Delannoy

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k}$$

Coefficient binomial — $\displaystyle \binom{n}{k} = \operatorname*{res}_z \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}}$

- Les briques de bases sont définies par une représentation intégrale, pas des récurrences.

Multiplication

$$\binom{n}{k}\binom{n+k}{k} = \left(\operatorname*{res}_z \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}}\right)\left(\operatorname*{res}_z \frac{(1+z)^{n+k}}{z^{k+1}}\right)$$

Représentations intégrales (formelles)

Nombres de Delannoy

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k}$$

Coefficient binomial — $\binom{n}{k} = \operatorname*{res}_z \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}}$

- Les briques de bases sont définies par une représentation intégrale, pas des récurrences.

Multiplication

$$\binom{n}{k}\binom{n+k}{k} = \left(\operatorname*{res}_x \frac{(1+x)^n}{x^{k+1}}\right)\left(\operatorname*{res}_y \frac{(1+y)^{n+k}}{y^{k+1}}\right)$$

Représentations intégrales (formelles)

Nombres de Delannoy

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k}$$

Coefficient binomial — $\binom{n}{k} = \operatorname*{res}_z \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}}$

- Les briques de bases sont définies par une représentation intégrale, pas des récurrences.

Multiplication

$$\binom{n}{k}\binom{n+k}{k} = \operatorname*{res}_{x,y} \frac{(1+x)^n(1+y)^{n+k}}{x^{k+1}y^{k+1}}$$

Représentations intégrale (formelles)

Nombres de Delannoy

Sommation

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k} = \operatorname*{res}_{x,y} \sum_{k=0}^{n} \frac{(1+x)^n(1+y)^{n+k}}{x^{k+1}y^{k+1}}$$

Série génératice

Représentations intégrale (formelles)

Nombres de Delannoy

Sommation

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k} = \operatorname*{res}_{x,y} \frac{1}{xy} \sum_{k=0}^{n} \left((1+x)(1+y)\right)^n \left(\frac{1+y}{xy}\right)^k$$

Série génératice

Représentations intégrale (formelles)

Nombres de Delannoy

Sommation

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} = \operatorname*{res}_{x,y} \left(\frac{(1+x)^n (1+y)^{2n+1}}{(1+y-xy)(xy)^{n+1}} - \frac{(1+x)^n (1+y)^n}{1+y-xy} \right)$$

Série génératice

Représentations intégrale (formelles)

Nombres de Delannoy

Sommation

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k} = \operatorname*{res}_{x,y}\left(\frac{(1+x)^n(1+y)^{2n+1}}{(1+y-xy)(xy)^{n+1}} - \frac{(1+x)^n(1+y)^n}{1+y-xy}\right)$$

Série génératice

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n = \operatorname*{res}_{x,y} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(1+x)^n(1+y)^{2n+1}}{(1+y-xy)(xy)^{n+1}} - \frac{(1+x)^n(1+y)^n}{1+y-xy}\right) t^n,$$

Représentations intégrale (formelles)

Nombres de Delannoy

Sommation

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k} = \operatorname*{res}_{x,y} \left(\frac{(1+x)^n(1+y)^{2n+1}}{(1+y-xy)(xy)^{n+1}} - \frac{(1+x)^n(1+y)^n}{1+y-xy} \right)$$

Série génératice

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n = \operatorname*{res}_{x,y} \frac{1}{(xy - t(1+x)(1+y)^2)\,(1 - t(1+x)(1+y))}$$

- avec $t \prec x, y$, pour que la somme converge

Représentations intégrale (formelles)

Nombres de Delannoy

Sommation

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k} = \operatorname*{res}_{x,y} \left(\frac{(1+x)^n(1+y)^{2n+1}}{(1+y-xy)(xy)^{n+1}} - \frac{(1+x)^n(1+y)^n}{1+y-xy} \right)$$

Série génératice

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n = \operatorname*{res}_{x,y} \frac{1}{\left(xy - t(1+x)(1+y)^2\right)\left(1 - t(1+x)(1+y)\right)}$$

- avec $t \prec x, y$, pour que la somme converge
- Pas d'équivalence entre suite et séries génératrices. Les s.g. sont des sommes infinies commes les autres dont on s'attachera à montrer la convergence (formelle).

Sommes binomiales et résidus

Proposition — Si $u : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ est une somme binomiale, alors il existe des fractions rationnelles $R_0, \ldots, R_n \in \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_r)$ telles que

$$u_{k_1,\ldots,k_n} = \operatorname*{res}_{x_1,\ldots,x_r} \left(R_0 R_1^{k_1} \cdots R_n^{k_n} \right).$$

Corollaire — Si $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ est une somme binomiale, alors il existe une fraction rationnelle $R(t, x_1, \ldots, x_r)$ telle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n = \operatorname*{res}_{x_1,\ldots,x_r} R(t, x_1, \ldots, x_r),$$

avec $t \prec x_1 \prec \cdots \prec x_r$.

Bibliographie — Egorychev (1984)

Cacul des résidus

Intégration

- $\mathrm{R}(t, x_1, \ldots, x_n)$ fraction rationnelle, avec $t \prec x_1 \prec \cdots \prec x_n$
- $f(t) = \operatorname*{res}_{x_1,\ldots,x_n} \mathrm{R}(t, x_1, \ldots, x_n)$
- On cherche une équation différentielle vérifiée par f

Principe — Touver $\mathcal{L}(t, \partial_t)$ tel que

$$\mathcal{L}(\mathrm{R}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathrm{C}_i}{\partial x_i} \quad \text{et par suite } \mathcal{L}(f) = \operatorname*{res}_{x_1,\ldots,x_n} \mathcal{L}(\mathrm{R}) = 0$$

Mots clefs — Équations de Picard-Fuchs, création télescopique, intégration des fonctions holonomes, algorithme de Chyzak, algorithme de Koutschan, algorithme de Lairez, etc.

Sommation sur un polyèdre rationnel

Proposition

- $u : \mathbb{Z}^{d+e} \to \mathbb{C}$ une somme binomiale
- $\Gamma \subset \mathbb{R}^{d+e}$ un polyèdre rationnel

Si $\forall \underline{n} \in \mathbb{Z}^d,\ \#\left\{\underline{m} \in \mathbb{Z}^e \;\middle|\; (\underline{n}, \underline{m}) \in \Gamma\right\} < \infty$ alors

$$v : \underline{n} \in \mathbb{Z}^d \mapsto \sum_{\underline{m} \in \mathbb{Z}^e} u_{\underline{n},\underline{m}} \mathbb{1}_\Gamma(\underline{n}, \underline{m})$$

est une somme binomiale.

Diagonale → somme binomiale

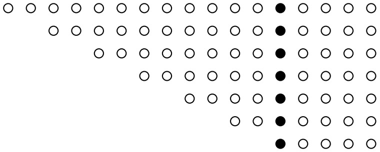
- Soit $R \in \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)$ une série entière rationnelle avec un monôme au numérateur.
- On peut écrire $R = S(\underline{x}^{\underline{m}_0}, \ldots, \underline{x}^{\underline{m}_r})$ avec

$$S = \frac{y_0}{1 + a_1 y_1 + \cdots + a_r y_r} = y_0 \sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^r} \underbrace{\binom{k_1 + \cdots + k_r}{k_1, \ldots, k_r} a_1^{k_1} \cdots a_r^{k_r}}_{C_{\underline{k}}} y_1^{k_1} \cdots y_r^{k_r}.$$

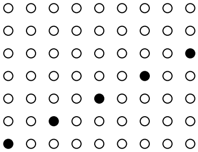
- $[x_1^n \cdots x_d^n]R = \displaystyle\sum_{k \in \mathbb{Z}^e} C_{\underline{k}} \mathbb{1}_\Gamma(n, \underline{k})$ où

$$\Gamma = \left\{ (n, \underline{k}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^e \;\middle|\; \underline{m}_0 + \sum_{i=1}^{e} k_i \underline{m}_i = (n, \ldots, n) \right\}.$$

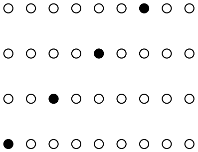
(Somme binomiale →) résidu → diagonale



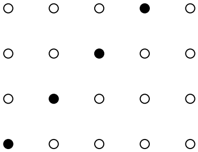
$$u_n = [y^n]\mathrm{R}(x,y)$$



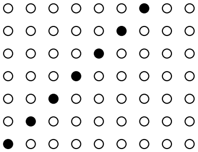
$$[x^{2n}y^n]\mathrm{R}(x,x^2y)$$



$$[x^{2n}y^{2n}]\mathrm{R}(x,x^2y^2)$$



$$\frac{1}{2}[x^{2n}y^{2n}](\mathrm{R}(x,x^2y^2)+\mathrm{R}(-x,x^2y^2))$$



$$\frac{1}{2}[x^ny^n](\mathrm{R}(\sqrt{x},xy)+\mathrm{R}(-\sqrt{x},xy))$$

Questions ?

Calcul partiel des résidus

- $\mathrm{R}(t, x_1, \ldots, x_n)$ fraction rationnelle, avec $t \prec x_1 \prec \cdots \prec x_n$
- $\underset{x_1,\ldots,x_n}{\operatorname{res}} \mathrm{R} = \underset{x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_n}{\operatorname{res}} \underbrace{\underset{x_i}{\operatorname{res}} \mathrm{R}}_{\text{fraction rationnelle ?}}$
- Parfois oui, parfois non
- Quand c'est le cas, on peut parfois le détecter

Exemple — $x_1 \prec \ldots \prec x_i \prec y \prec x_{i+1} \prec \cdots \prec x_n$

$$\underset{y}{\operatorname{res}} \frac{a(\underline{x})}{y - b(\underline{x})} = \begin{cases} a(\underline{x}) & \text{si } \mathrm{mt}(b) \prec y \\ 0 & \text{si } \mathrm{mt}(b) \succ y \end{cases}$$

Calcul partiel des résidus

- $R(\underline{x}, y) = \frac{a(\underline{x}, y)}{f(\underline{x}, y)}$ fraction rationnelle
- Par la décomposition en éléments simples, on peut supposer f irréductible.
- $\exists N > 0$ tel que $f(\underline{x}, y)$ soit scindé dans $\mathbb{C}((x_n^{1/N}))\cdots((x_1^{1/N}))[y]$. Soit A l'ensemble des racines.
- $R = \sum_{\alpha \in A} \frac{u_\alpha}{y - \alpha} + \frac{\partial}{\partial y}(\cdots)$

Trois possibilités :

- $\operatorname{mt}(\alpha) \succ y$ pour tout $\alpha \in A$, dans ce cas $\operatorname{res}_y R = 0$;
- $\operatorname{mt}(\alpha) \prec y$ pour tout $\alpha \in A$, dans ce cas $\operatorname{res}_y R = \operatorname*{res.\,rat.}_{y=\infty} R$;
- ni l'un, ni l'autre, on ne peut rien dire.

Démo !