Une marche aléatoire biaisée

approche expérimentale

Pierre Lairez

Université Paris–Saclay, Inria, France

7 décembre 2022

European Research Council
Established by the European Commission

Marche 1D, échauffement

Soit $a \in [0,1]$.
$(X_n)_{n\geq 0}$ marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$:

- $X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 & \text{avec probabilité } \frac{1+a}{2} \\ X_n + 1 & \text{avec probabilité } \frac{1-a}{2} \end{cases}$
- Les $X_{n+1} - X_n$ sont indépendants.

Problème

Trouver a tel que

$$E(a) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}\left[\#\left\{n \mid X_n = X_0\right\}\right] = 2$$

Une formule de dénombrement

$$
\begin{aligned}
E(a) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left[X_n = X_0\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \left(\frac{1+a}{2}\right)^n \left(\frac{1-a}{2}\right)^n \\
&= \frac{1}{a}
\end{aligned}
$$

Le problème en 2D

Soit $a \in [0,1]$.
$(X_n)_{n\geq 0}$ marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^2$:

- $X_{n+1} = \begin{cases} X_n - (0,1) & \text{avec probabilité } \frac{1}{4} \\ X_n + (0,1) & \text{avec probabilité } \frac{1}{4} \\ X_n - (1,0) & \text{avec probabilité } \frac{1+a}{4} \\ X_n + (1,0) & \text{avec probabilité } \frac{1-a}{4} \end{cases}$
- Les $X_{n+1} - X_n$ sont indépendants.

Problème

Trouver a tel que

$$E(a) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}\left[\#\left\{n \mid X_n = X_0\right\}\right] = 2$$

Une formule de dénombrement

$$
\begin{aligned}
E(a) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left[X_n = X_0\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \left(\frac{1+a}{4}\right)^k \left(\frac{1-a}{4}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} \\
&= ???
\end{aligned}
$$

Objectif

Calculer mille chiffres de la solution de l'équation $E(a) = 2$ en 1 seconde !

Méthode 1 (naïve)

1. On choisit N grand.
2. On calcule le polynôme
$$E_N(a) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{N} \binom{2n}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \left(\frac{1+a}{4}\right)^k \left(\frac{1-a}{4}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}.$$
3. On calcule la (?) racine de l'équation $E_N(a) = 0$ dans l'intervalle $[0, 1]$.

Méthode 2 (évaluation rapide + dichotomie)

1. On trouve une relation de récurrence sur les $p_n(a)$, où

   $$p_n(a) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}[X_n = X_0] = \binom{2n}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \left(\frac{1+a}{4}\right)^k \left(\frac{1-a}{4}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}.$$

   Cette relation permet de calculer efficacement $E(a)$ à grande précision.

2. On résout $E(a) = 2$ par dichotomie.

Méthode 3 (formule analytique + itération de Newton)

1. On trouve que

$$E(a) = \frac{4K\left(\frac{2(1-a^2)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{a^2+2\sqrt{1-a^2}+2}}\right)}{\pi\sqrt{a^2+2\sqrt{1-a^2}+2}},$$

   où K est l'intégrale elliptique de première espèce.

   (Il suffisait d'y penser !)

2. On applique l'itération de Newton

$$a_{n+1} = a_n - \frac{E(a_n) - 2}{E'(a_n)}$$

   qui va très vite converger vers la solution.