Périodes d'intégrales rationnelles
Algorithmes et applications

Soutenance de thèse
12 novembre 2014

Pierre Lairez

Des intégrales particulières

Périodes...

le domaine d'intégration n'a pas de bord

...d'intégrales ...

intégrale simple ou multiple

...rationnelles

de fraction rationnelle continue sur le domaine d'intégration

But — Calculer ces intégrales

Exemples

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \pi$$

- ✓ intégrale
- ✓ de fraction rationnelle
- ✓ sur un domaine sans bord
- ⇝ C'est une période.

Les algorithmes présentés calculent à des constantes près :

- ✗ aucun intérêt quand l'intégrale est constante
- ✓ information utile si elle dépend d'un paramètre

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+t} = \frac{C}{\sqrt{t}}$$

Exemples

Périmètre d'une ellipse

$$p(e) = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2i\pi}\oint \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1-\frac{1-e^2x^2}{(1-x^2)y^2}}$$

$p(e)$: périmètre d'une ellipse d'excentricité e et de grand rayon 1

Proposition (Euler, 1733). $(e-e^3)p'' + (1-e^2)p' + ep = 0.$

- équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux
- caractérise p à des constantes près
- permet son évaluation numérique
- permet de calculer des comportements asymptotiques
- permet de montrer des identités

Exemples

Géométrie algébrique

Une intégrale parmi de nombreuses du même type :

$$\oint \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}w}{xyzw - t\mathrm{P}} = ?$$

$$\begin{aligned} \text{où } \mathrm{P} = xyz + wxy^2z + w^2yz + z^2w^2y + z^2w^2 + wxy \\ + x^2wy + y^2x + x^2y + x^2y^2 + y^2xz + w^2xz + w^2z \\ + y^2wz + wyz + z^2w^2x + w^2xyz + wxz + wx^2yz + x^2yz \\ + xy + wxyz^2 + z^2wx. \end{aligned}$$

- calculs d'invariants des variétés algébriques

Exemples

Sommes binomiales

- Par un développement en série, montrer que

$$\sum_{n\geqslant 0} u_n t^n = \oint \frac{(y-1)y^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(t-y^2(y-1)^2)((x-1)t-xy^2(y^2+x-1))},$$

  où $u_n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{i+j}{j}^2\binom{4n-2i-2j}{2n-2i}$.
- Calculer cette intégrale.
- En déduire que

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{i+j}{j}^2\binom{4n-2i-2j}{2n-2i} = (2n+1)\binom{2n}{n}^2.$$

Travaux précédents

Création télescopique

- Zeilberger, Wilf, Almkvist, Apagodu, 1990–…
- Chyzak, 2000
- Koutschan, 2010

$\mathcal{D}$-modules

- Galligo, 1985
- Takayama, 1990
- Oaku et Takayama, 1999

Intégrales rationnelles

- Bostan, Chen, Chyzak et Li, 2010
- Chen, Kauers et Singer, 2012

Sommes binomiales

- Petkovšek, Wilf et Zeilberger, *A*=*B*, 1996
- Wegschaider, 1997
- Chyzak, 2000
- Koutschan, 2010
- Egorychev, 1984

Motivations

- Limitations intrinsèques au calcul des intégrales ?
- Conception d'algorithmes plus rapides.
- Les périodes d'intégrales rationnelles ont un intérêt propre.

PARTIE I

Calcul des périodes

Cas générique, complexité

Le problème

- $x_1,\dots,x_n$, des variables d'intégration
- t, un paramètre
- $\mathrm{R}(t,x_1,\dots,x_n)$, une fraction rationnelle en t et les x_i
- γ, un n-cycle dans $\mathbb{C}^n$ disjoint des pôles de R
- $y(t) = \oint_\gamma \mathrm{R}(t,x_1,\dots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$

> **Théorème (Euler, Picard, Poincaré, ..., Griffiths) —** Ces intégrales vérifient des équations différentielles linéaires à coefficients polynomiaux.

Problème — Comment les calculer ?

Le problème

- $x_0, x_1, \ldots, x_n$, des variables d'intégration
- t, un paramètre
- $\mathrm{R}(t, x_0, x_1, \ldots, x_n)$, une fraction rationnelle en t et les x_i
- γ, un $n+1$-cycle dans $\mathbb{C}^{n+1}$ disjoint des pôles de R
- $y(t) = \oint_\gamma \mathrm{R}(t, x_0, x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_0 \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$
- **homogénéité** :
  $\mathrm{R}(t, \lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) \mathrm{d}(\lambda x_0) \cdots \mathrm{d}(\lambda x_n) = \mathrm{R}(t, x_0, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_0 \cdots \mathrm{d}x_n$

> **Théorème (Euler, Picard, Poincaré, ..., Griffiths)** — Ces intégrales vérifient des équations différentielles linéaires à coefficients polynomiaux.

Problème — Comment les calculer ?

Relations fondamentales

Intégrales d'une dérivée $$\oint \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial C_i}{\partial x_i} d\mathbf{x} = 0$$

pas de bord $\Rightarrow$ pas de terme de bord

Intégration par partie $$\oint F \frac{\partial G}{\partial x_i} d\mathbf{x} = -\oint \frac{\partial F}{\partial x_i} G d\mathbf{x}$$

Dérivation sous le signe intégral $$\frac{\partial}{\partial t} \oint F d\mathbf{x} = \oint \frac{\partial F}{\partial t} d\mathbf{x}$$

Réduction de l'ordre du pôle

Soit a/f^q une fraction homogène, $q > 1$

- Si $a = \sum_{i=0}^{n} b_i \partial_i f$, alors

$$\oint \frac{a}{f^q}\mathrm{d}\mathbf{x} = \oint \sum_{i=0}^{n} b_i \frac{\partial_i f}{f^q}\mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{1}{q-1}\oint \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial_i b_i}{f^{q-1}}.$$

Règle de réécriture — $\frac{\sum_i b_i \partial_i f}{f^q} \longrightarrow \frac{1}{q-1}\frac{\sum_i \partial_i b_i}{f^{q-1}}$

Proposition — Si $\mathrm{R} \longrightarrow^* \mathrm{R}'$, alors

$$\oint \mathrm{R}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \oint \mathrm{R}'\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

Théorème de Griffiths-Dwork

Théorème (Dwork, Griffiths, 1969) — Si f est *générique*, alors pour toute fraction homogène a/f^q

$$\exists b \text{ polynôme } : \frac{a}{f^q} \longrightarrow^* \frac{b}{f^n}.$$

Confinement

Les b/f^n homogènes de degré fixé engendrent un espace de dimension finie sur $\mathbb{Q}(t)$. Pour toute suite $b_0/f^n, b_1/f^n, \ldots$ de fractions homogènes de degré $-n-1$ il existe un r et des $c_i(t)$ non tous nuls tel que

$$\sum_{i=0}^{r} c_i(t) \frac{b_i}{f^n} = 0$$

Algorithme

Dans le cas générique

Entrée — Une fraction a/f homogène, avec f générique.
Sortie — Une équation différentielle pour $y(t) = \oint a/f \,\mathrm{d}\mathbf{x}$.

- Pour $k = 0, 1, 2, \ldots$
  - Calculer b_k/f^n tel que $\dfrac{\partial^k}{\partial t^k}\dfrac{a}{f} \longrightarrow^* \dfrac{b_k}{f^n}$
  - Est-ce qu'il existe des polynômes $c_i(t)$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=0}^{k} c_i(t)\frac{b_i}{f^n} = 0?$$

    - Si oui, renvoyer $\sum_{i=0}^{k} c_i(t) y^{(i)}(t) = 0$.
    - Si non, continuer.

Algorithme

Dans le cas générique

Entrée — Une fraction a/f homogène, avec f générique.
Sortie — Une équation différentielle pour $y(t) = \oint a/f\,\mathrm{d}\mathbf{x}$.

- Pour $k = 0, 1, 2, \ldots$
  - Calculer b_k/f^n tel que $\frac{\partial^k}{\partial t^k}\frac{a}{f} \longrightarrow^* \frac{b_k}{f^n}$
  - Est-ce qu'il existe des polynômes $c_i(t)$ non tous nuls tels que

$$\oint \sum_{i=0}^{k} c_i(t)\frac{b_i}{f^n}\mathrm{d}\mathbf{x} = 0?$$

    - Si oui, renvoyer $\sum_{i=0}^{k} c_i(t) y^{(i)}(t) = 0$.
    - Si non, continuer.

Algorithme

Dans le cas générique

Entrée — Une fraction a/f homogène, avec f générique.
Sortie — Une équation différentielle pour $y(t) = \oint a/f\,\mathrm{d}\mathbf{x}$.

- Pour $k = 0, 1, 2, \ldots$
  - Calculer b_k/f^n tel que $\frac{\partial^k}{\partial t^k}\frac{a}{f} \longrightarrow^* \frac{b_k}{f^n}$
  - Est-ce qu'il existe des polynômes $c_i(t)$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=0}^{k} c_i(t) \oint \frac{b_i}{f^n}\mathrm{d}\mathbf{x} = 0?$$

    - Si oui, renvoyer $\sum_{i=0}^{k} c_i(t) y^{(i)}(t) = 0$.
    - Si non, continuer.

Algorithme

Dans le cas générique

Entrée — Une fraction a/f homogène, avec f générique.
Sortie — Une équation différentielle pour $y(t) = \oint a/f\,\mathrm{d}\mathbf{x}$.

- Pour $k = 0, 1, 2, \ldots$
  - Calculer b_k/f^n tel que $\frac{\partial^k}{\partial t^k}\frac{a}{f} \longrightarrow^* \frac{b_k}{f^n}$
  - Est-ce qu'il existe des polynômes $c_i(t)$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=0}^{k} c_i(t) \oint \frac{\partial^i}{\partial t^i}\frac{a}{f}\mathrm{d}\mathbf{x} = 0$$

    - Si oui, renvoyer $\sum_{i=0}^{k} c_i(t) y^{(i)}(t) = 0$.
    - Si non, continuer.

Algorithme

Dans le cas générique

Entrée — Une fraction a/f homogène, avec f générique.
Sortie — Une équation différentielle pour $y(t) = \oint a/f \, d\mathbf{x}$.

- Pour $k = 0, 1, 2, \ldots$
  - Calculer b_k/f^n tel que $\frac{\partial^k}{\partial t^k}\frac{a}{f} \longrightarrow^* \frac{b_k}{f^n}$
  - Est-ce qu'il existe des polynômes $c_i(t)$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=0}^{k} c_i(t)\frac{\partial^i}{\partial t^i}\left(\oint \frac{a}{f} d\mathbf{x}\right) = 0?$$

    - Si oui, renvoyer $\sum_{i=0}^{k} c_i(t) y^{(i)}(t) = 0$.
    - Si non, continuer.

Complexité

- $R(t, x_0, \dots, x_n) = a/f$ à coefficients dans $\mathbb{Q}$, homogène
- N, le degré de f par rapport aux x_i
- d_t, le degré par rapport à t de R $= \max(\deg_t a, \deg_t f)$

Théorème (Bostan, Lairez, Salvy, 2013) — Il existe une équation différentielle

$$\sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{m} a_{i,j} t^j y^{(i)}(t) = 0,$$

- d'ordre $r \leqslant N^n$ et de degré $m \leqslant N^{3n} e^n d_t$
- calculable en $\tilde{O}(N^{8n} e^{5n} d_t)$ opérations dans $\mathbb{Q}$.

✓ Sans hypothèse de généricité sur R
✓ borne sur l'ordre optimale, génériquement atteinte
✓ améliore les résultats de complexité précédents $O(N^{Cn^2} d_t)$.

Ingrédients de la preuve

- Formulation en termes d'algèbre linéaire (matrices de Macaulay)

$$(b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{Q}(t)[\mathbf{x}]^{n+1} \mapsto \sum_{i=0}^{n} b_i \partial_i f \in \mathbb{Q}(t)[\mathbf{x}]$$

- Complexité de l'algèbre linéaire sur $\mathbb{Q}(t)$

Théorème (Jeannerod, Villard, 2005 ; Zhou, 2013)
L'inverse d'une matrice $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{Q}[t]$ de degré au plus d peut être calculé en $\tilde{\mathrm{O}}(n^3 d)$ opérations dans $\mathbb{Q}$.

- Déformation pour réduire le cas général au cas générique

$$f_\varepsilon = f + \varepsilon \sum_{i=0}^{n} x_i^{\mathrm{N}}$$

Bilan

✓ Bornes fines sur la taille de l'équation calculée

✓ Complexité polynomiale en la taille générique de la sortie

✓ Bonne efficacité pratique dans le cas générique

✗ Dans les applications le dénominateur n'est jamais générique.

✗ Les équations sont souvent bien plus petites que les bornes.

Typiquement, l'équation qu'on cherche est d'ordre <10, alors que l'équation générique est d'ordre 500 ou 1000.

✗ La méthode de déformation ne peut pas exploiter cela.

⇝ Le cas général doit être étudié plus précisément.

PARTIE II

Calcul des périodes

Cas général, algorithme efficace

Le théorème de Dimca

Théorème (Dwork, Griffiths, 1969) — Si f est générique, alors pour toute fraction homogène a/f^q

$$\exists b \text{ polynôme } : \frac{a}{f^q} \longrightarrow^* \frac{b}{\boxed{f^n}}.$$

Théorème (Dimca, 1991) — Quel que soit f, pour toute fraction homogène a/f^q

$$\exists b \text{ polynôme } \forall \gamma : \oint_\gamma \frac{a}{f^q} \mathrm{d}\mathbf{x} = \oint_\gamma \frac{b}{\boxed{f^n}} \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Question — Comment trouver un b qui convient ?

Réduction de l'ordre du pôle

Griffiths-Dwork — Règle de réécriture :

$$\boxed{\frac{\sum_i b_i \partial_i f}{f^{q+1}} \longrightarrow \frac{1}{q} \frac{\sum_i \partial_i b_i}{f^q}}$$

- Il n'y a pas unicité des b_i.
- Si $\sum_i b_i \partial_i f = 0$, la *règle*

$$0 \longrightarrow \frac{1}{q} \frac{\sum_i \partial_i b_i}{f^q}$$

permet de déduire de nouvelles relations.

Réduction de l'ordre du pôle

Lairez, rang 2 — Règles de réécriture :

$$(\text{Griffiths-Dwork}) + \left(\underbrace{\sum_{i=0}^{n} b_i \partial_i f = 0}_{\text{condition d'application}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\sum_{i=0}^{n} \partial_i b_i}{f^q} \longrightarrow 0} \right)$$

- Les règles sont encore équivoques.
- On peut avoir

$$\begin{tikzcd} & \frac{b}{f^{q-1}} \\ \frac{a}{f^q} \arrow[ur, "\text{rg } 1"] \arrow[dr, "\text{rg } 2"'] & \\ & 0 \end{tikzcd} \qquad \text{sans que } \; b/f^{q-1} \xrightarrow{\text{rg } 2} 0.$$

- Donne une nouvelle règle $b/f^{q-1} \xrightarrow{\text{rg } 3} 0$.

Réduction de l'ordre du pôle

Lairez, rang 3 — Règles de réécriture :

$$(\text{Lairez, rang 2}) + \left(\begin{array}{c} \frac{a}{f^q} \xrightarrow{\text{rg } 1} \frac{b}{f^{q-1}} \\ \frac{a}{f^q} \xrightarrow[\text{rg } 2]{} 0. \end{array} \Rightarrow \boxed{\frac{b}{f^q} \longrightarrow 0} \right)$$

Lairez, rang ⩾ 4 — *idem*

> **Théorème (Lairez, 2014)** — Les règles de réduction sont exhaustives :
> $$\boxed{\forall f\ \exists r}\ \forall \frac{a}{f^q}\ \exists b \text{ polynôme} : \frac{a}{f^q} \xrightarrow{\text{rg } r}{}^{*} \frac{b}{f^n}.$$

Un exemple

$$f = 2xyz(w-x)(w-y)(w-z) - w^3(w^3 - w^2 z + xyz)$$

$e(q,r)$: # de fractions indépendantes homogènes a/f^q qu'on ne peut pas réduire avec les règles de rang r.

q	0	1	2	3	4	$q > 4$
sans règle	0	10	165	680	1771	$\sim 36q^3$
$e(q,1)$	0	10	86	102	120	$\sim 18q$
$e(q,2)$	0	10	7	6	6	6
$e(q,3)$	0	9	1	0	0	0

Algorithme efficace

Entrée — Une fraction a/f homogène, avec f quelconque.
Sortie — Une équation différentielle pour $y(t) = \oint a/f \, \mathrm{d}\mathbf{x}$.

- $r \leftarrow 1$
- Pour $k = 0, 1, 2, \ldots$
  - Calculer b_k/f^n tel que $\frac{\partial^k}{\partial t^k} \frac{a}{f} \xrightarrow{\text{rg } r}_* \frac{b_k}{f^n}$
    - Si c'est impossible, alors augmenter r et recommencer.
  - Est-ce qu'il existe des polynômes $c_i(t)$ tels que

$$\sum_{i=0}^{k} c_i(t) \frac{b_i}{f^n} = 0?$$

    - Si oui, renvoyer $\sum_{i=0}^{r} c_i(t) y^{(i)}(t) = 0$.
    - Si non, continuer.

Calcul des réécritures

Principes de l'algorithme

Rang 1 — Réduction modulo l'idéal $(\partial_0 f, \dots, \partial_n f)$ avec cofacteurs. Utilisation de base de Gröbner de module.

Rang 2 — Calcul d'une base des syzygies non triviales et algèbre linéaire

$$\mathrm{H}^n(\mathrm{d}f) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\left\{(b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=0}^n b_i \partial_i f = 0\right\}}{\mathbb{K}[\mathbf{x}]\left\langle (\dots, \underbrace{\partial_j f}_{i^e}, \dots, \underbrace{-\partial_i f}_{j^e}, \dots) \right\rangle}$$

Rang $\geqslant 3$ — Algèbre linéaire

Bilan

- ✓ Algorithme pour calculer rapidement les règles de réécriture
- ✓ Seulement des bases de Gröbner et de l'algèbre linéaire
- ✓ Mise en œuvre en Magma
- ✓ Des *premières*
- ✓ Des utilisateurs réguliers

- ✗ Pas de borne prouvée sur r, donc pas d'analyse de complexité

PARTIE III
Sommes binomiales

Exemples

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2, \textit{ nombres d'Apéry}$$

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \left(\binom{2k+2}{k+1} - \binom{2k+2}{k+2} \right), \textit{ nombres de Motzkin}$$

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^3$$

On cherche à prouver automatiquement que :

- $n^3 u_n = (34n^3 - 51n^2 + 27n - 5)u_{n-1} - (n-1)^3 u_{n-2}$
- $(n+2)v_n = (2n+1)v_{n-1} + (3n-3)v_{n-2}$
- $u_n = w_n$

Représentations intégrales

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n = \frac{1}{(2i\pi)^3} \oint \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1-x)(1-y)(1-z)xyz - t(x+yz-xyz)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n t^n = \frac{1}{2i\pi} \oint \frac{(1-x)(1+x)^2}{x(x-(x^2+x+1))t}\mathrm{d}x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n t^n = \frac{1}{(2i\pi)^3} \oint \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1-x)(1-y)(1-z)xyz-t(1-z-y(1-(2+x(1-y)(1-z))z))}$$

Principe — Les séries génératrices des sommes admettent des représentations comme périodes d'intégrales rationnelles.

Et c'est algorithmique.

Briques élémentaires

Exemple des nombres de Delannoy

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k}$$

Coefficient binomial

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{2i\pi} \oint_\gamma \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}} \mathrm{d}z$$

Multiplication

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{2i\pi} \oint_\gamma \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}} \mathrm{d}z, \quad \binom{n+k}{k} = \frac{1}{2i\pi} \oint_\gamma \frac{(1+z)^{n+k}}{z^{k+1}} \mathrm{d}z$$

Briques élémentaires

Exemple des nombres de Delannoy

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k}$$

Coefficient binomial

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{2i\pi} \oint_\gamma \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}} \mathrm{d}z$$

Multiplication

$$\binom{n}{k}\binom{n+k}{k} = \frac{1}{(2i\pi)^2} \left(\oint_\gamma \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}} \mathrm{d}z\right) \left(\oint_\gamma \frac{(1+z)^{n+k}}{z^{k+1}} \mathrm{d}z\right)$$

Briques élémentaires

Exemple des nombres de Delannoy

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k}$$

Coefficient binomial

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{2i\pi} \oint_\gamma \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}} \mathrm{d}z$$

Multiplication

$$\binom{n}{k}\binom{n+k}{k} = \frac{1}{(2i\pi)^2} \left(\oint_\gamma \frac{(1+x)^n}{x^{k+1}} \mathrm{d}x \right) \left(\oint_\gamma \frac{(1+y)^{n+k}}{y^{k+1}} \mathrm{d}y \right)$$

Briques élémentaires

Exemple des nombres de Delannoy

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k}$$

Coefficient binomial

$$\binom{n}{k} = \tfrac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma} \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}} \mathrm{d}z$$

Multiplication

$$\binom{n}{k}\binom{n+k}{k} = \tfrac{1}{(2i\pi)^2} \oint_{\gamma\times\gamma} \frac{(1+x)^n (1+y)^{n+k}}{x^{k+1} y^{k+1}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Briques élémentaires

Exemple des nombres de Delannoy

Sommation

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k} = \frac{1}{(2i\pi)^2}\oint_{\gamma\times\gamma}\sum_{k=0}^{n}\frac{(1+x)^n(1+y)^{n+k}}{x^{k+1}y^{k+1}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Série génératrice

Briques élémentaires

Exemple des nombres de Delannoy

Sommation

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k} = \frac{1}{(2i\pi)^2} \oint_{\gamma\times\gamma} \sum_{k=0}^{n} \left((1+x)(1+y)\right)^n \left(\frac{1+y}{xy}\right)^k \frac{\mathrm{d}x}{x}\frac{\mathrm{d}y}{y}$$

Série génératrice

Briques élémentaires

Exemple des nombres de Delannoy

Sommation

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k} = \frac{1}{(2i\pi)^2} \oint \left(\frac{(1+x)^n(1+y)^{2n+1}}{(1+y-xy)(xy)^{n+1}} - \frac{(1+x)^n(1+y)^n}{1+y-xy} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Série génératrice

Briques élémentaires

Exemple des nombres de Delannoy

Sommation

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k} = \frac{1}{(2i\pi)^2} \oint \left(\frac{(1+x)^n(1+y)^{2n+1}}{(1+y-xy)(xy)^{n+1}} - \frac{(1+x)^n(1+y)^n}{1+y-xy} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Série génératrice

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n = \frac{1}{(2i\pi)^2} \oint \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(1+x)^n(1+y)^{2n+1}}{(1+y-xy)(xy)^{n+1}} - \frac{(1+x)^n(1+y)^n}{1+y-xy} \right) t^n \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Briques élémentaires

Exemple des nombres de Delannoy

Sommation

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k} = \frac{1}{(2i\pi)^2}\oint\left(\frac{(1+x)^n(1+y)^{2n+1}}{(1+y-xy)(xy)^{n+1}} - \frac{(1+x)^n(1+y)^n}{1+y-xy}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Série génératrice

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n = \frac{1}{(2i\pi)^2}\oint\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(xy - t(1+x)(1+y)^2\right)\left(1-t(1+x)(1+y)\right)}$$

Sommes binomiales et périodes

Proposition — Si $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ est une somme binomiale, alors il existe une fraction rationnelle $\mathrm{R}(t, x_1, \ldots, x_n)$ telle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n = \frac{1}{(2i\pi)^n} \oint \mathrm{R}(t, \mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Corollaire — Il existe des algorithmes pour

- calculer une récurrence satisfaite par une somme binomiale ;
- tester l'égalité de deux sommes binomiales.

Théorème (Bostan, Lairez, Salvy, 2014) — Une suite $u : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ est une somme binomiale si et seulement si sa série génératrice est la diagonale d'une fraction rationnelle développable en série entière.

Sommes binomiales et diagonales

Conséquences de l'équivalence

Corollaire d'un théorème de Furstenberg — Si $\sum u_n t^n$ est une série algébrique, alors (u_n) est une somme binomiale.

Corollaire d'un théorème de Furstenberg — Si (u_n) est une somme binomiale, alors $\sum u_n t^n$ est une série algébrique modulo p.

Reformulation d'une conjecture de Christol — Si (u_n) est une suite d'entier P-récursive à croissance au plus exponentielle, alors c'est une somme binomiale.

Bilan

- ✓ Procédure de simplification des représentations intégrales
- ✓ Algorithmique souple et efficace
- ✓ Preuves automatiques de bout en bout
- ✓ Équivalence entre sommes binomiales et diagonales

- ✗ Limité aux sommes binomiales, alors que la création télescopique fait bien plus

Conclusion

- Amélioration de l'efficacité théorique du calcul des périodes d'intégrales rationnelles
- Amélioration de l'efficacité pratique
- Application de ces résultats au calcul des sommes binomiales

Perspectives

- Extension de la classe des objets traités
- Calcul *a priori* d'une borne sur r
- Calcul de la cohomologie de Rham
- Reconstruction de diagonale