L'ABC du télescopage créatif

Algorithmes, Bornes, Complexités

Frédéric Chyzak

ÉPI Algo (1994–2012), ÉPI SpecFun (2012–)

Soutenance d'HDR, le 14 avril 2014

Thématique de recherche

Calcul formel

- sommation et intégration symboliques des fonctions spéciales
- complexité des algorithmes sur les opérateurs fonctionnels linéaires
- aspects non commutatifs (polynômes, bases de Gröbner)

Objet central : opérateurs linéaires différentiels / de récurrence

Thématique de recherche

Calcul formel

- sommation et intégration symboliques des fonctions spéciales
- complexité des algorithmes sur les opérateurs fonctionnels linéaires
- aspects non commutatifs (polynômes, bases de Gröbner)

Objet central : opérateurs linéaires différentiels / de récurrence

Incursions dans d'autres domaines / Applications :

- combinatoire énumérative (fonctions symétriques, arbres, marches)
- algorithmique (mots) ; automatique ; ondelettes
- encyclopédie mathématique interactive en ligne (DDMF)
- preuves formelles

Plan

Fil conducteur : sommation et intégration des fonctions spéciales

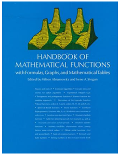
Et aussi : suites combinatoires, polynômes orthogonaux, etc.

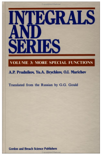
$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{i+j}{i}^2\binom{4n-2i-2j}{2n-2i} = (2n+1)\binom{2n}{n}^2 \qquad \text{(Blodgelt, 1990)}$$

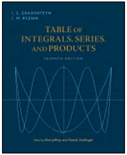
$$\int_0^{+\infty} x\, J_1(ax)\, I_1(ax)\, Y_0(x)\, K_0(x)\, dx = -\frac{\ln(1-a^4)}{2\pi a^2} \qquad \text{(Glasser, Montaldi, 1994)}$$

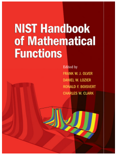
$$\int_{-1}^{+1} \frac{e^{-px} T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = (-1)^n \pi\, I_n(p)$$

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-j} \frac{q^{(i+j)^2+j^2}}{(q;q)_{n-i-j}(q;q)_i(q;q)_j} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{(-1)^k q^{7/2k^2+1/2k}}{(q;q)_{n+k}(q;q)_{n-k}} \qquad \text{(Paule, 1985)}$$









Évaluations symboliques + Preuves d'identités

Principe du télescopage créatif pour les sommes paramétrées

La suite d'Apéry est

$$F_n = \sum_{k=0}^{n} f_{n,k} \quad \text{pour} \quad f_{n,k} = \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2.$$

L'égalité de télescopage créatif

$$(n+2)^3 f_{n+2,k} - (2n+3)(17n^2+51n+39) f_{n+1,k} + (n+1)^3 f_{n,k} = \left[-\frac{4(2n+3)j^4(4n^2-2j^2+12n+3j+8)}{(n+1-j)^2(n+2-j)^2} f_{n,j} \right]_{j=k}^{j=k+1}$$

justifie l'identité

$$(n+2)^3 F_{n+2} - (2n+3)(17n^2+51n+39) F_{n+1} + (n+1)^3 F_n = 0.$$

Principe du télescopage créatif pour les sommes paramétrées

La suite d'Apéry est

$$F_n = \sum_{k=0}^{n} f_{n,k} \quad \text{pour} \quad f_{n,k} = \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2.$$

L'égalité de télescopage créatif

$$\Big((n+2)^3 S_n^2 - (2n+3)(17n^2+51n+39)S_n + (n+1)^3\Big) f =$$
$$(S_k - 1)\left(-\frac{4(2n+3)k^4(4n^2-2k^2+12n+3k+8)}{(n+1-k)^2(n+2-k)^2} f\right)$$

justifie l'identité

$$\Big((n+2)^3 S_n^2 - (2n+3)(17n^2+51n+39)S_n + (n+1)^3\Big) F = 0.$$

$$S_n n = (n+1) S_n, \quad S_k k = (k+1) S_k \quad \text{dans} \quad \mathbb{Q}(n,k)\langle S_n, S_k\rangle$$

Principe du télescopage créatif pour les sommes paramétrées

La suite d'Apéry est

$$F_n = \sum_{k=0}^{n} f_{n,k} \quad \text{pour} \quad f_{n,k} = \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2.$$

L'égalité de télescopage créatif

$$Pf = (S_k - 1)(Qf)$$

justifie l'identité

$$PF = 0.$$

Télescopeur : $P = (n+2)^3 S_n^2 - (2n+3)(17n^2+51n+39)S_n + (n+1)^3.$

Certificat : $Q = -\dfrac{4(2n+3)k^4(4n^2-2k^2+12n+3k+8)}{(n+1-k)^2(n+2-k)^2}.$

Principe du télescopage créatif pour les sommes paramétrées

La suite d'Apéry est

$$F_n = \sum_{k=0}^{n} f_{n,k} \quad \text{pour} \quad f_{n,k} = \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2.$$

L'égalité de télescopage créatif

$$Pf = (S_k - 1)(Qf)$$

justifie l'identité

$$PF = 0.$$

Terminologie de « *creative telescoping* »
introduite par van der Poorten (1979)

Principe du télescopage créatif pour les intégrales paramétrées

La fonction de Green du réseau carré est

$$F(z) = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{pour} \quad f(x,y,z) = \frac{1}{(1-xyz)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}.$$

L'égalité de télescopage créatif

$$z(1-z^2)\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + (1-3z^2)\frac{\partial f}{\partial z} - zf = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{xz(1-x^2)}{1-x^2z^2}f\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x(1-y^2)(1-2z^2+x^2z^2)}{(1-x^2z^2)^2}f\right)$$

justifie l'identité

$$z(1-z^2)\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + (1-3z^2)\frac{\partial F}{\partial z} - zF = 1.$$

Principe du télescopage créatif pour les intégrales paramétrées

La fonction de Green du réseau carré est

$$F(z) = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{pour} \quad f(x,y,z) = \frac{1}{(1-xyz)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}.$$

L'égalité de télescopage créatif

$$\Big(z(1-z^2)D_z^2 + (1-3z^2)D_z - z\Big)f = D_x\left(-\frac{xz(1-x^2)}{1-x^2z^2}f\right) + D_y\left(-\frac{x(1-y^2)(1-2z^2+x^2z^2)}{(1-x^2z^2)^2}f\right)$$

justifie l'identité

$$\Big(z(1-z^2)D_z^2 + (1-3z^2)D_z - z\Big)F = 1.$$

$D_x x = xD_x + 1,\ D_y y = yD_y + 1,\ D_z z = zD_z + 1 \quad \text{dans} \quad \mathbb{Q}(x,y,z)\langle D_x, D_y, D_z\rangle$

Principe du télescopage créatif pour les intégrales paramétrées

La fonction de Green du réseau carré est

$$F(z) = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{pour} \quad f(x,y,z) = \frac{1}{(1-xyz)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}.$$

L'égalité de télescopage créatif

$$Pf = D_x(Q_1 f) + D_y(Q_2 f)$$

justifie l'identité

$$PF = 1.$$

Télescopeur : $P = z(1-z^2)D_z^2 + (1-3z^2)D_z - z.$

Certificat : $(Q_1, Q_2) = \left(-\frac{xz(1-x^2)}{1-x^2z^2}, -\frac{x(1-y^2)(1-2z^2+x^2z^2)}{(1-x^2z^2)^2}\right).$

Le télescopage créatif, un schéma commun pour $\int$ et $\sum$

$$f(x,y), \qquad \mathbb{K}(x,y)\langle\partial_x,\partial_y\rangle$$

$$\downarrow$$

Téléscopeur
$P \in \mathbb{K}(x)\langle\partial_x\rangle$

$$\boxed{Pf(x,y) = \Delta_y g(x,y)}$$

$\Delta_y = D_y$ ou $\Delta_y = S_y - 1$

Certificat
$g(x,y)$

$$\downarrow$$

PF = combinaison linéaire de spécialisations de g,

pour $F(x) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}y$ ou $F(x) = \sum_{y=a}^{b} f(x,y)$.

Le télescopage créatif, un schéma commun pour $\int$ et $\sum$

$$f(x,y), \qquad \mathbb{K}(x,y)\langle\partial_x,\partial_y\rangle$$

$$\downarrow$$

Téléscopeur
$P \in \mathbb{K}(x)\langle\partial_x\rangle$

$$\boxed{Pf(x,y) = \Delta_y g(x,y)}$$

Certificat
$g = Qf$

$\Delta_y = D_y$ ou $\Delta_y = S_y - 1$

Quels algorithmes pour trouver (P,g) à partir de f ?

Suites hypergéométriques — Fonctions hyperexponentielles

Équations d'ordre 1

Définition

Un terme h est *hypergéométrique* si les quotients

$$\frac{h_{n+1,k}}{h_{n,k}} \quad \text{et} \quad \frac{h_{n,k+1}}{h_{n,k}}$$

sont donnés par des fractions rationnelles en n et k.

Définition

Un terme h est *hyperexponentiel* si les dérivées logarithmiques

$$\frac{\frac{d}{dx}h(x,y)}{h(x,y)} \quad \text{et} \quad \frac{\frac{d}{dy}h(x,y)}{h(x,y)}$$

sont données par des fractions rationnelles en x et y.

Idéalisation de suites telles α^n, $n!$, $\binom{n}{k}$, factorielles descendantes $n^{\underline{k}} = n\,(n-1)\cdots(n-k+1)$.

Exemples : x^α, $\exp x$, $y \exp \frac{y}{1-x^3}$.

Algorithme de Zeilberger (1991)

ENTRÉE : un terme hypergéométrique $f_{n,k}$.
SORTIE : des fractions rationnelles $p_0(n), \dots, p_r(n)$, $Q(n,k)$ pour r minimal, telles que $p_r(n) f_{n+r,k} + \cdots + p_0(n) f_{n,k} = Q(n,k+1) f_{n,k+1} - Q(n,k) f_{n,k}$.

Principes

- Calculer pour des valeurs croissantes de $r = 0, 1, \dots$
- Rechercher une somme indéfinie du membre gauche par une variation de l'algorithme de décision de Gosper (1978).

Variantes pour le différentiel, le q-calcul, les cadres mixtes.

Algorithme de Zeilberger (1991)

ENTRÉE : un terme hypergéométrique $f_{n,k}$.
SORTIE : des fractions rationnelles $p_0(n), \dots, p_r(n)$, $Q(n,k)$ pour r minimal, telles que $p_r(n) f_{n+r,k} + \cdots + p_0(n) f_{n,k} = Q(n,k+1) f_{n,k+1} - Q(n,k) f_{n,k}$.

Principes

- Calculer pour des valeurs croissantes de $r = 0, 1, \dots$
- Rechercher une somme indéfinie du membre gauche par une variation de l'algorithme de décision de Gosper (1978).

Variantes pour le différentiel, le q-calcul, les cadres mixtes.

Terminaison

- garantie dans le cas « holonome », non garantie en général,
- critère explicite pour le cadre pur des récurrences par Abramov (2003),
- critères pour cadres mixtes dans (Chen, Chyzak, Feng, Fu, Li, (soumis)).

L'équation comme structure de données

Constat : toute base de données d'identités est incomplète.

Thèse

Représenter implicitement les suites et fonctions spéciales comme solutions de systèmes linéaires différentiels et de récurrences permet une algorithmique uniforme.

Exemple : la famille des fonctions de Bessel $J_n(x)$ vérifie

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0,$$
$$x J_n'(x) + x J_{n+1}(x) = n J_n(x),$$
$$J_{n+2}(x) + J_n(x) = 2(n+1) J_{n+1}(x).$$

L'équation comme structure de données

Constat : toute base de données d'identités est incomplète.

Thèse

Représenter implicitement les suites et fonctions spéciales comme solutions de systèmes linéaires différentiels et de récurrences permet une algorithmique uniforme.

Exemple : la famille des fonctions de Bessel $J_n(x)$ vérifie

$$\begin{gathered} x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0, \\ x J_n'(x) + x J_{n+1}(x) = n J_n(x), \\ J_{n+2}(x) + J_n(x) = 2(n+1) J_{n+1}(x). \end{gathered}$$

Pour de « vraies » fonctions : ajouter des conditions initiales

L'équation comme structure de données

Constat : toute base de données d'identités est incomplète.

Thèse

Représenter implicitement les suites et fonctions spéciales comme solutions de systèmes linéaires différentiels et de récurrences permet une algorithmique uniforme.

Exemple : la famille des fonctions de Bessel $J_n(x)$ vérifie

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0,$$
$$x J_n'(x) + x J_{n+1}(x) = n J_n(x),$$
$$J_{n+2}(x) + J_n(x) = 2(n+1) J_{n+1}(x).$$

Pour de « vraies » fonctions : ajouter des conditions initiales et des coupures (Chyzak, Davenport, Koutschan, Salvy, 2011)

Fonctions ∂-finies

(Chyzak, Salvy, 1998)

t est ∂-fini par rapport à l'algèbre tordue $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_m)\langle \partial_1, \dots, \partial_m \rangle$

$$\Updownarrow$$

les $\partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_m^{\alpha_m} t$ engendrent un $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_m)$-espace vectoriel de dimension finie

$\Rightarrow$ t est décrit par des équations fonctionnelles linéaires d'ordre supérieur.

Fonctions ∂-finies

(Chyzak, Salvy, 1998)

t est ∂-fini par rapport à l'algèbre tordue $\mathbb{K}(x_1,\dots,x_m)\langle\partial_1,\dots,\partial_m\rangle$

$$\Updownarrow$$

les $\partial_1^{\alpha_1}\dots\partial_m^{\alpha_m}t$ engendrent un $\mathbb{K}(x_1,\dots,x_m)$-espace vectoriel de dimension finie

$\Rightarrow$ t est décrit par des équations fonctionnelles linéaires d'ordre supérieur.

Clôtures par $+$, $\times$, les ∂_i (Chyzak, Salvy, 1998)

- Idéal annulateur $\to$ base de Gröbner tordue $\to$ formes normales en dimension finie
- Algorithme itératif par recherche de dépendances linéaires

Clôtures par $\int$, $\sum$

- Heuristiques par bases de Gröbner tordues (Chyzak, Salvy, 1998)
- Généralisation de l'algorithme de Zeilberger (Chyzak, 2000)

$\rightsquigarrow$ simplification et test à zéro des expressions ∂-finies.

Fonctions ∂-finies

(Chyzak, Salvy, 1998)

t est ∂-fini par rapport à l'algèbre tordue $\mathbb{K}(x_1,\dots,x_m)\langle\partial_1,\dots,\partial_m\rangle$

$$\Updownarrow$$

les $\partial_1^{\alpha_1}\dots\partial_m^{\alpha_m}t$ engendrent un $\mathbb{K}(x_1,\dots,x_m)$-espace vectoriel de dimension finie

$\Rightarrow$ t est décrit par des équations fonctionnelles linéaires d'ordre supérieur.

Clôtures par $+$, $\times$, les ∂_i (Chyzak, Salvy, 1998)

- Idéal annulateur $\to$ base de Gröbner tordue $\to$ formes normales en dimension finie
- Algorithme itératif par recherche de dépendances linéaires

Clôtures par $\int$, $\sum$

- Heuristiques par bases de Gröbner tordues (Chyzak, Salvy, 1998)
- Généralisation de l'algorithme de Zeilberger (Chyzak, 2000)

$\rightsquigarrow$ simplification et test à zéro des expressions ∂-finies.

Implantation : packages Ore_algebra, Groebner, Mgfun (1994–) pour Maple.

Algorithme de Chyzak (Chyzak, 2000)

ENTRÉE : $\begin{cases} \text{un terme } \partial\text{-fini } u \text{ par rapport à } A = \mathbb{K}(x,y)\langle\partial_x,\partial_y\rangle, \\ \text{une base de Gröbner } G \text{ de } \operatorname{ann} u. \end{cases}$

SORTIE : $\begin{cases} P \in \mathbb{K}(x)\langle\partial_x\rangle, \\ Q \in A \text{ en forme normale modulo } G \text{ et tel que } Pu = \Delta_y Qu. \end{cases}$

Principes

- Coefficients indéterminés pour $P = p_r(x)\partial_x^r + \dots + p_0(x)$ et $Q = \sum_{i,j} q_{i,j}(x,y)\partial_x^i\partial_y^j$ (somme « sous l'escalier »).
- Forme normale pour $P - \Delta_y Q \to$ système paramétré d'ordre 1.
- Découplage $\to$ équations d'ordre supérieur $\to$ résolution par des variantes des algorithmes de décision d'Abramov (1971–).

Algorithme de Chyzak (Chyzak, 2000)

ENTRÉE : $\begin{cases} \text{un terme } \partial\text{-fini } u \text{ par rapport à } A = \mathbb{K}(x,y)\langle\partial_x,\partial_y\rangle, \\ \text{une base de Gröbner } G \text{ de } \operatorname{ann} u. \end{cases}$

SORTIE : $\begin{cases} P \in \mathbb{K}(x)\langle\partial_x\rangle, \\ Q \in A \text{ en forme normale modulo } G \text{ et tel que } Pu = \Delta_y Q u. \end{cases}$

Principes

- Coefficients indéterminés pour $P = p_r(x)\partial_x^r + \cdots + p_0(x)$ et $Q = \sum_{i,j} q_{i,j}(x,y)\partial_x^i\partial_y^j$ (somme « sous l'escalier »).
- Forme normale pour $P - \Delta_y Q$ → système paramétré d'ordre 1.
- Découplage → équations d'ordre supérieur → résolution par des variantes des algorithmes de décision d'Abramov (1971–).

- Alternative : implémenter les algos directs (Barkatou, 1999) avec paramètres ?
- Complexité du découplage dans (Bostan, Chyzak, Panafieu, 2013).
- Heuristique efficace sans découplage par (Koutschan, 2010).

Sommations et intégrations itérées

(Chyzak, 2000) :

1. Remplacer $P = p_r(x)\partial_x^r + \cdots + p_0(x)$ par $P = \sum_{0 \leq i+j \leq r} p_{i,j}(x,y)\partial_x^i \partial_y^j$ permet de calculer ann $\tilde{f}$ pour :

$$\tilde{f}(x,y) = \int_a^b f(x,y,z)\,\mathrm{d}z, \qquad \tilde{f}_{x,y} = \sum_{z=a}^{b} f_{x,y,z}, \qquad \text{etc.}$$

2. Appliquer l'algorithme de base sur $F(x) = \int_{a'}^{b'} \tilde{f}(x,y)\,\mathrm{d}z$ ou $\sum_{y=a'}^{b'} \tilde{f}(x,y)$.

Sommations et intégrations itérées

(Chyzak, 2000) + (Bostan, Chyzak, Pech, van Hoeij, 2011) :

1. Remplacer $P = p_r(x)\partial_x^r + \cdots + p_0(x)$ par $P = \sum_{0 \le i+j \le r} p_{i,j}(x,y)\partial_x^i\partial_y^j$ permet de calculer ann $\tilde{f}$ pour :

$$\tilde{f}(x,y) = \int_a^b f(x,y,z)\,\mathrm{d}z, \qquad \tilde{f}_{x,y} = \sum_{z=a}^{b} f_{x,y,z}, \qquad \text{etc.}$$

2. Appliquer l'algorithme de base sur ann $\tilde{f}$ + Recombiner les certificats.

Sommations et intégrations itérées — Combinatoire des marches

(Chyzak, 2000) + (Bostan, Chyzak, Pech, van Hoeij, 2011) :

1. Remplacer $P = p_r(x)\partial_x^r + \cdots + p_0(x)$ par $P = \sum_{0\le i+j\le r} p_{i,j}(x,y)\partial_x^i\partial_y^j$ permet de calculer $\operatorname{ann}\tilde f$ pour :

$$\tilde f(x,y) = \int_a^b f(x,y,z)\,\mathrm{d}z, \qquad \tilde f_{x,y} = \sum_{z=a}^{b} f_{x,y,z}, \qquad \text{etc.}$$

2. Appliquer l'algorithme de base sur $\operatorname{ann}\tilde f$ + Recombiner les certificats.

Application (Bostan, Chyzak, Pech, van Hoeij, 2011)

La série génératrice des marches diagonales de tours sur échiquier 3D est

$$G(x) = 1 + 6\cdot\int_0^x \frac{{}_2F_1\left(\begin{matrix}1/3 & 2/3\\ & 2\end{matrix}\,\middle|\,\frac{27w(2-3w)}{(1-4w)^3}\right)}{(1-4w)(1-64w)}\,\mathrm{d}w.$$

Point de départ de la preuve : $G(x)$ est donnée par l'intégrale de contour

$$\frac{1}{(2i\pi)^2}\oint\oint \frac{f(s,t/s,x/t)}{st}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \quad \text{pour} \quad \frac{1}{f(s,t,u)} = 1-\left(\frac{1}{1-s}+\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1-u}\right).$$

Au-delà des fonctions ∂-finies (Chyzak, Kauers, Salvy, 2009)

Algorithmes pour $+$, $\times$, $\sum$, $\int$ pour des systèmes dont les solutions sont paramétrées par des fonctions arbitraires.

Principes

- Idéal télescopeur (= ensemble des télescopeurs) :

$$T_f = (\operatorname{ann} f + \Delta_y A_{x,y}) \cap A_x \quad \text{où } A_{x,y} = \mathbb{K}(x,y)\langle \partial_x, \partial_y \rangle \text{ et } A_x = \mathbb{K}(x)\langle \partial_x \rangle$$

- Dimension de Hilbert d'un idéal I :
  - mesure finie de l'espace vectoriel $\operatorname{vect}_{\mathbb{K}(x,y)}\{\partial_x^\alpha \partial_y^\beta f\}$ de dimension infinie
  - mesure du potentiel d'élimination polynomiale
- Nouvelle notion de « croissance polynomiale » p de l'algèbre $A_{x,y}$:
  - mesure la croissance des degrés des coefficients lors de réductions modulo I (cas classiques : $p = 1$)
- Borne sur l'idéal télescopique : $\dim T_f \leq \dim I + (p-1) \times \#\{y\}$

Exemples : nombres de graphes, nombres de Stirling, eulériens, de Bernoulli, fonctions dzêta d'Hurwitz, bêta, polylogarithmes, gamma incomplete, etc.

Facteur limitant : le certificat

Observations expérimentales

- certificats arbitrairement grands :
  les numérateurs sont solutions d'ÉDO/ÉRO, par ex. $(x+1)\,D_x - N$
- certificats en plus de variables que les télescopeurs :
  $P(x, D_x)$ d'ordre r et degré $d \gg r \;\longleftrightarrow\; Q(x,y,z)$ de taille d^3
- coefficients grossissent avec le degré :
  sous forme développée, $(x+1)^N$ a taille binaire $\Theta(N^2)$

$$\boxed{N = \text{degré de la sortie, « grand »}}$$

Deux solutions

- Certificat sous forme compacte pour la sommation :
  - factorisation des dénominateurs
  - numérateurs codés par des récurrences de taille « petite »

  $\rightarrow$ complexité binaire $\tilde{\mathcal{O}}(N)$ (Bostan, Chyzak, Cluzeau, Salvy, 2006)
- Réduction de Hermite adaptée à l'intégration bivariée :
  - cas rationnel en complexité arithmétique polynomiale $\mathcal{O}(n^{\omega+4})$ (Bostan, Chen, Chyzak, Li, 2010)
  - cas hyperexponentiel (Bostan, Chen, Chyzak, Li, Xin, 2013)

Limitations du télescopage créatif

Algorithme de Zeilberger pour $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \rightsquigarrow$

$$(S_n - 2)\binom{n}{k} = \Delta_k\left(\frac{k\binom{n}{k}}{n+1-k}\right)$$

- sommation de 0 à $n+1$: comment éviter la division par 0 ?
- justification automatique a posteriori : pour quels n et k ?

Algorithme de Chyzak pour $F(x) = \int_0^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}t$ où $f(x,t) = xtJ_0(xt)J_0(t)^4$

$\rightsquigarrow$ P d'ordre 3, Q d'ordre 4 tels que $P\int_0^T f(x,t)\,\mathrm{d}t = [Qf]_{t=0}^{t=T}$

- mais pour chaque $x > 0$, $g = Qf$ oscille à l'∞ !
- F converge, mais chaque $\int_0^T D_t^i D_x f\,\mathrm{d}t$ oscille.

Limitations du télescopage créatif

Algorithme de Zeilberger pour $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \rightsquigarrow$

$$(S_n - 2)\binom{n}{k} = \Delta_k \left(\frac{k\binom{n}{k}}{n+1-k} \right)$$

- sommation de 0 à $n+1$: comment éviter la division par 0 ?
- justification automatique a posteriori : pour quels n et k ?

Algorithme de Chyzak pour $F(x) = \int_0^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}t$ où $f(x,t) = xtJ_0(xt)J_0(t)^4$

$\rightsquigarrow$ P d'ordre 3, Q d'ordre 4 tels que $P \int_0^T f(x,t)\,\mathrm{d}t = [Qf]_{t=0}^{t=T}$

- mais pour chaque $x > 0$, $g = Qf$ oscille à l'∞ !
- F converge, mais chaque $\int_0^T D_t^i D_x f\,\mathrm{d}t$ oscille.

$\boxed{\text{Il reste des choses à prouver } \textit{après} \text{ appel aux algorithmes.}}$

Le cas du théorème d'Apéry (1978) : $\zeta(3) = \sum_{m=1}^{\infty} 1/m^3 \notin \mathbb{Q}$

Lemme clé : Les suites $a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2$ et

$b_n = a_n \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^3} - \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^m \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2}{2m^3 \binom{n}{m} \binom{n+m}{m}}$ sont solutions de la même récurrence linéaire d'ordre 2

$\longrightarrow$ calculable par les algorithmes de Zeilberger et Chyzak

Formalisation dans (Chyzak, Mahboubi, Sibut-Pinote, Tassi, 2014)

- certification a posteriori en Coq des résultats de calculs Maple
- bases de Gröbner + préconditions

$\longrightarrow$ protocole systématique mais pas algorithmique

$$\begin{cases} n \neq -1 \text{ et } k \neq n+1 \implies c_{n+1,k} = \left(\frac{\cdots}{\cdots}\right) c_{n,k} \\ n \neq 0 \text{ et } k \neq -1 \implies c_{n,k+1} = \left(\frac{\cdots}{\cdots}\right) c_{n,k} \end{cases} \implies \left(n \geq 2 \implies a_{n+2} + \left(\frac{\cdots}{\cdots}\right) a_{n+1} + \left(\frac{\cdots}{\cdots}\right) a_n = 0\right)$$

Perspectives

- Complétion à la Verbaeten dans le cas non hypergéométrique
  - à commencer par le cas de dimension 2, mixte, par exemple
- Télescopage créatif par résolution rationnelle directe
- Télescopeurs non minimaux
- Bases de Gröbner
  - approches modernes (signatures) pour le non commutatif
  - coefficients polynomiaux et homogénéisation, aussi pour la sommation
- Preuve automatique d'identités sommatoires et intégrales
  - justifiées rigoureusement
  - décorées de préconditions analytiques
  - obtenues et justifiées automatiquement

Perspectives

- Complétion à la Verbaeten dans le cas non hypergéométrique
  - à commencer par le cas de dimension 2, mixte, par exemple
- Télescopage créatif par résolution rationnelle directe
- Télescopeurs non minimaux
- Bases de Gröbner
  - approches modernes (signatures) pour le non commutatif
  - coefficients polynomiaux et homogénéisation, aussi pour la sommation
- Preuve automatique d'identités sommatoires et intégrales
  - justifiées rigoureusement
  - décorées de préconditions analytiques
  - obtenues et justifiées automatiquement

SpecFun = Calcul formel + Preuves formelles