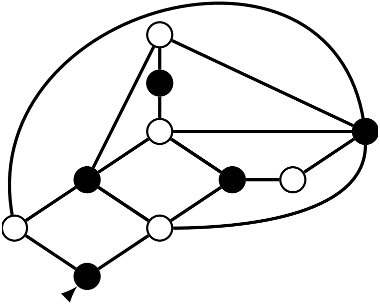
Constellations : mise en équation, résolution, rationalité

Wenjie Fang, LIAFA.
Travaux joints avec Guillaume Chapuy

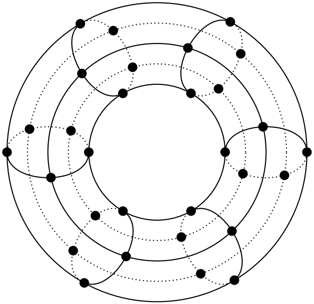
11 mai 2015, SpecFun, INRIA

Cartes combinatoires

Une **carte** = un plongement propre d'un graphe dans une surface
On se concentre sur les surfaces *orientables*.



Carte planaire et bipartie



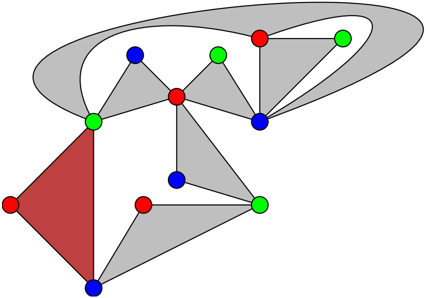
Carte sur un tore

Constellation

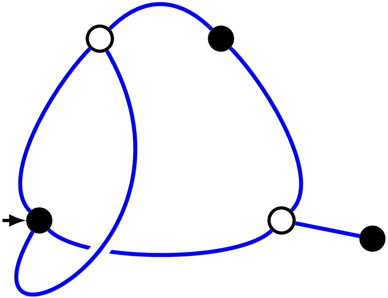
Une r-**constellation** est une carte spéciale.

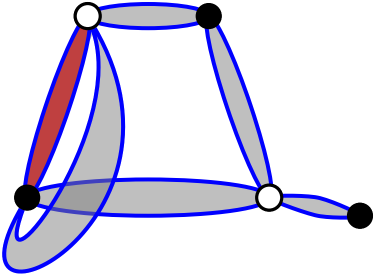
- Faces coloriées blanches ou noires
- Faces noires (**hyperarêtes**) : degré r
- Faces blanches (**hyperfaces**) : degré multiple de r
- Sommets en r couleurs en ordre autour de chaque face noire
- Une hyperarête **racine**

Aussi le dual d'une carte bipartie

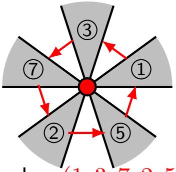


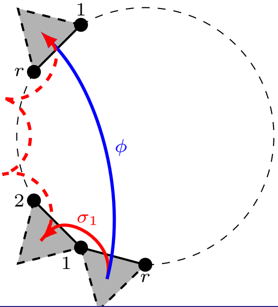
Carte bipartie = 2-constellation





Système de rotation





Constellation = factorisation dans S_n

Les *hyperarêtes* sont étiquetées de 1 à n.

- σ_i : hyperarêtes autour de chaque sommet de couleur i
- ϕ : hyperarêtes adjacentes à chaque hyperface par une arête 1 - r

$$\phi = \sigma_1 \ldots \sigma_r$$

Taille n : une r-constellation $\leftrightarrow$ $(n-1)!$ factorisations

Sous le tapis : connexité

Lien avec les nombres de Hurwitz

r-Constellations $\sim \phi = \sigma_1 \cdots \sigma_r$, $\sigma_i \in S_n$

$$G_0^r(\alpha) = \frac{d!}{|\operatorname{Aut}\alpha|} r\left((r-1)d - \ell(\alpha) + 2\right)^{\overline{\ell(\alpha)-2}} \prod_{j=1}^{\ell(\alpha)} \binom{r\alpha_j - 1}{\alpha_j}$$

Hurwitz classique $\sim \phi = \tau_1 \cdots \tau_k$, τ_i transposition, $k = n + 2g - \ell(\phi)$

$$H_0(\alpha) = \frac{d!}{|\operatorname{Aut}\alpha|} (d + \ell(\alpha) - 2)! d^{\ell(\alpha)-3} \prod_{j=1}^{\ell(\alpha)} \frac{\alpha_j^{\alpha_j}}{\alpha_j!}$$

Formules et notations prises de *Monotone Hurwitz Numbers in Genus Zero* de Goulden, Guay-Paquet, Novak

Ce que l'on sait déjà ...

Cas planaire			
	Méthode	énumération	algébricité
Bijection	arbre bourgeonnant (Bousquet-Mélou et Schaeffer) mobile (Bouttier, Di Francesco et Guitter)	exact	✓
Eq. fct.	$r = 2$ (Bender et Canfield) $r = 3$ (Bousquet-Mélou et Jehanne)	$r = 2, 3$: exact	✓ (Bousquet-Mélou et Jehanne)
Cas en genre supérieur			
Bijection	variant de mobile (Chapuy)	asympt.	restriction de degré de face
Eq. fct. ($r = 2$)	récurrence topologique (Eynard ; Kazarian et Zograf)	exact pour nb de face fixé	—

..., ce que l'on sait de plus maintenant ...

Cas planaire			
	Méthode	énumération	algébricité
Bijection	arbre bourgeonnant (Bousquet-Mélou et Schaeffer) mobile (Bouttier, Di Francesco et Guitter)	exact	✓
Eq. fct.	**méthode de m-Tamari** (Bousquet-Mélou, Chapuy, Préville-Ratelle) (Chapuy et W.F.)	**exact**	✓ (Bousquet-Mélou et Jehanne)
Cas en genre supérieur			
Bijection	variant de mobile (Chapuy)	asympt.	restriction de degré de face
Eq. fct. ($r = 2$)	récurrence topologique (Eynard), (Kazarian et Zograf) (Chapuy et W.F.)	**exact**	✓

Nos résultats : cas $g=0$ et r général

$F_{g,r}$ = la série ordinaire des r-constellations en genre g, avec les poids

- t : hyperarêtes
- x : degré de l'hyperface racine, divisé par r
- p_k : hyperfaces non-racine de degré rk

Chgt. de var. $t, x \leftrightarrow z, u$:

$$t = z\left(1 + \sum_{k\geq 1} \binom{rk-1}{k} p_k z^k\right)^{-(r-1)}, \quad x = u(1+uz)^{-r}$$

Théorème (Bijection BMS, BDFG)

$$F_{0,r}(x,t) = (1+zu)\left(1 - \sum_{j\geq 1} p_j z^j \sum_{l=1}^{(r-1)j-1} z^l u^l \binom{rj-1}{j+l}\right).$$

Nous avons maintenant une preuve à partir de l'équation fonctionnelle.

Variables grecques

Pour exprimer les séries en genre supérieur, on introduit les "variables" suivantes.

$$\gamma = \sum_{k \geq 1} \binom{2k-1}{k} p_k z^k \qquad \text{(série des mobiles)}$$

$$\eta = \sum_{k \geq 1} (k-1) \binom{2k-1}{k} p_k z^k, \quad \eta_i = \sum_{k \geq 1} (k-1) k^i \binom{2k-1}{k} p_k z^k$$

$$\zeta = \sum_{k \geq 1} \frac{k-1}{2k-1} \binom{2k-1}{k} p_k z^k$$

$$\zeta_i = \sum_{k \geq 1} \frac{(-2)^{i+1} k(k-1) \cdots (k-i)}{(2k-1)(2k-3) \cdots (2k-2i-1)} \binom{2k-1}{k} p_k z^k$$

Soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell)$, notons $\eta_\alpha = \prod_{i=1}^{\ell} \eta_{\alpha_i}$. Idem pour ζ_β.

Nos résultats : cas $g \geq 1$ et $r = 2$ (biparti), enraciné

Théorème (Chapuy et F.)

La série ordinaire des 2-constellations en genre g a la forme

$$F_{g,2} = \sum_{c=1}^{6g-1} \sum_{\alpha,\beta,a\geq 0,b\geq 0} \frac{\eta_\alpha \zeta_\beta}{(1-\eta)^a (1+\zeta)^b} \left(\frac{d^{\alpha,\beta}_{a,b,c,g,+}}{(1-uz)^c} + \frac{d^{\alpha,\beta}_{a,b,c,g,-}}{(1+uz)^c} \right).$$

Ici, α, β sont des partitions, $d^{\alpha,\beta}_{a,b,c,\pm} \in \mathbb{Q}$, et $d^{\alpha,\beta}_{a,b,c,\pm} \neq 0$ implique

- $\lceil \frac{1+c}{2} \rceil + |\alpha| + |\beta| \leq (2 \pm 1)g$,
- $a + b = \ell(\alpha) + \ell(\beta) + 2g - 1$.

Example :

$$F_1 = \frac{(\eta - 2\eta_1 - 1)/16}{(1-uz)^2(1-\eta)^2} + \frac{4(1+\zeta)\eta_1 + 3\eta^2 - 6\zeta(1-\eta)+3}{96(1-uz)(1+\zeta)(1-\eta)^2} - \frac{1/2}{(1-uz)^5(1-\eta)} - \frac{5/4}{(1-uz)^4(1-\eta)}$$
$$- \frac{1/32}{(1+uz)(1+\zeta)} - \frac{(21\eta - 2\eta_1 - 21)/24}{(1-uz)^3(1-\eta)^2}$$

Nos résultats : cas $g \geq 2$ et $r = 2$ (biparti), factorisation

$L_{g,r}$ = la série exp. des factorisations de type r-constellations en genre g

Théorème (Chapuy et F.)

$$L_{1,2} = \frac{1}{24} \ln \frac{1}{1-\eta} + \frac{1}{8} \ln \frac{1}{1+\zeta}.$$

Théorème (Chapuy et F.)

$$L_{g,2} = \sum_{\alpha,\beta,a\geq 0,b\geq 0} c_{a,b,g}^{\alpha,\beta} \frac{\eta_\alpha \zeta_\beta}{(1-\eta)^a (1+\zeta)^b}.$$

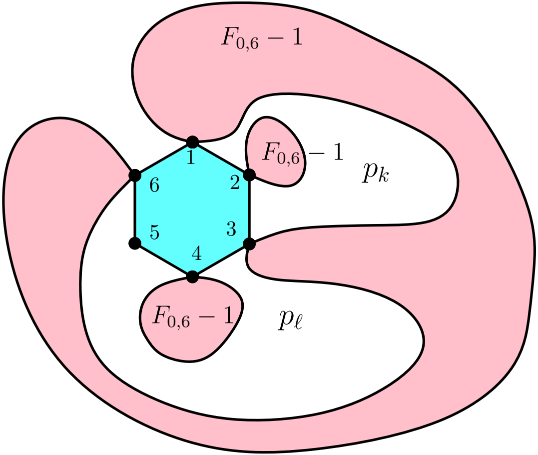
Ici $g \geq 2$, $c_{a,b}^{\alpha,\beta} \in \mathbb{Q}$, α, β sont des partitions vérifiant

- $|\alpha| + |\beta| \leq 3(g-1)$,
- $a + b = \ell(\alpha) + \ell(\beta) + 2g - 2$.

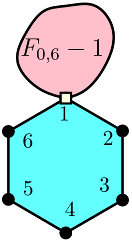
Mise en équation des constellations

Exemple : Autour de l'hyperarête racine ...

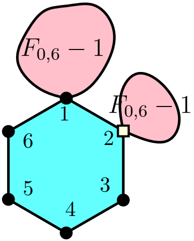
... d'une 6-constellation ...



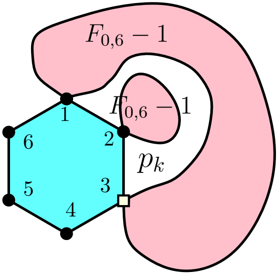
... par étape



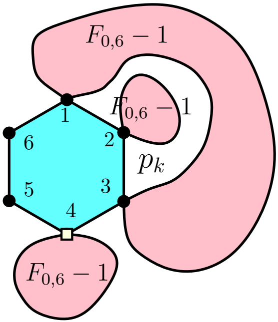
... par étape



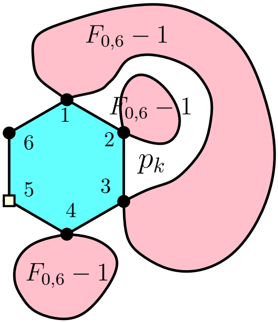
... par étape



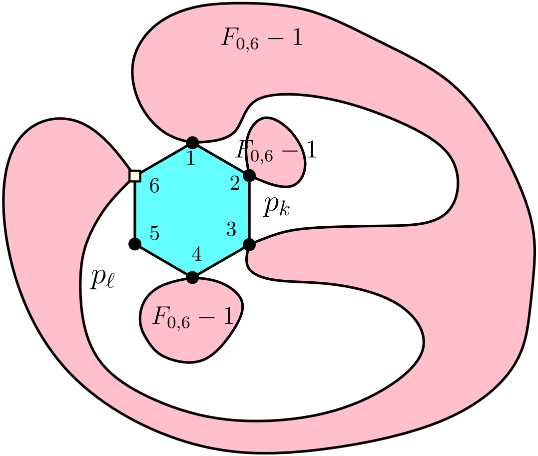
… par étape



... par étape

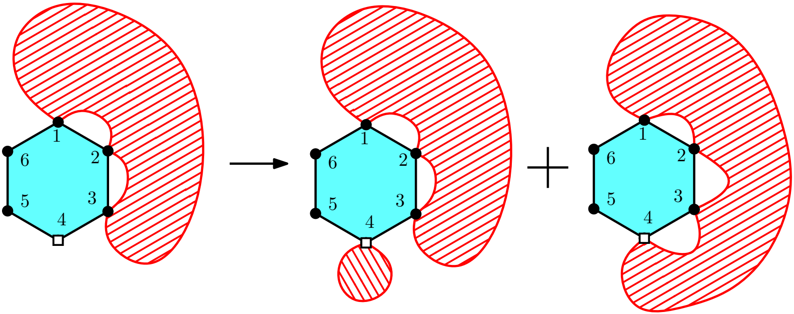


... par étape



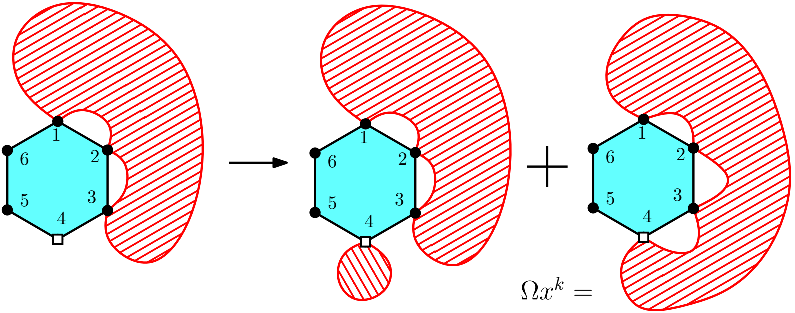
L'équation planaire

Deux façons d'attacher un coin de l'hyperarête racine



L'équation planaire

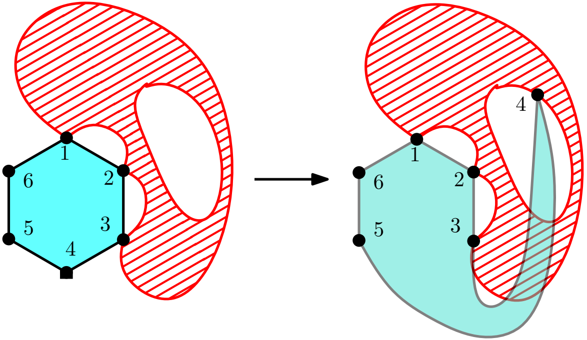
$x^k \leftrightarrow$ Hyperface exterieure de degré $r(k+1)$



x^k $\quad$ $x^k F_{0,r}$ $\quad$ $\Omega x^k = x^{k-1}p_1 + x^{k-2}p_2 + \ldots + xp_{k-1} + p_k$

Donc $F_{0,r} = 1 + xt(F_{0,r} + \Omega)^r(1)$.

Cas supplémentaire en genre supérieur



G $\qquad$ $\Gamma G = \sum_{k \geq 1} k x^k \frac{\partial}{\partial p_k} G$

L'équation devient

$$F_{g,r} = xt[y^g] \left(\sum_{h=0}^{g} y^h F_{h,r} + \Omega + y\Gamma \right)^r \ (1).$$

Troncature

Troncature avec un paramètre $\mathbf{K}$: $p_k = 0$ pour $k > K$.

C'est comme considérer les constellations dont le degré d'une hyperface *non-racine* est au plus rK.

L'opérateur Ω devient

$$\Omega = [x^{\geq 0}] \sum_{i=1}^{K} \frac{p_i}{x^i}$$

Dans la résolution suivante, on va résoudre avec la troncature, puis prendre la limite.

Résolution de l'équation des r-constellations planaires

$\sim$

Comment la résolution des intervalles m-Tamari s'adapte aux r-constellations planaires

Etape 1 : linéarisation

$$F_{0,r}(x,t) = 1 + tx(F_{0,r}(x,t) + \Omega)^r(1)$$

Stratégie générale : guess-and-check (solution déjà connue).
Obstacle 1 : opérateurs itérés
Solution : linéarisation avec une autre variable catalytique.
Notons $A = F_{0,r} - 1$ la série **conjecturée**.

$$G(x,y,t) = tx(1 + y(A + \Omega))^r(1)$$

But : vérifier que la solution G admet $G(x,1,t) = A(x,t)$.
En dérivant par rapport à y, on a

$$(1 + y(A + \Omega))\frac{\partial G}{\partial y} = r(A + \Omega)G.$$

C'est *presque* une équation différentielle *linéaire*.

Etape 2 : séparation des restes

$$(1 + y(A + \Omega))\frac{\partial G}{\partial y} = r(A + \Omega)G$$

Obstacle 2 : opérateur Ω
Solution : remplacer Ω par un polynôme en x^{-1}, et gérer le reste

$$\Omega = [x^{\geq 0}]\sum_{k=1}^{K}\frac{p_k}{x^k},\ \theta = \sum_{k=1}^{K}\frac{p_k}{x^k}$$

Donc on peut écrire

$$(1 + y(A + \theta))\frac{\partial G}{\partial y} = r(A + \theta)G + S,$$

avec S la partie de puissance négative.
S est un polynôme en x^{-1} de degré au plus $K - 1$.

Etape 3 : “harmonisation”

Notons $N(x,t) = A + \theta$. On écrit

$$(1 + yN)\frac{\partial G}{\partial y} = rNG + S.$$

Avec $t, x \leftrightarrow z, u$, $u^K N(u,z)$ est un polynôme en u de degré $K+1$.
$N(u', z) = N(u, z)$ a $K+1$ solutions $u_0 = u, u_1, \ldots, u_K$. $u_i, z \leftrightarrow x_i, t$.

Considérons l’opérateur suivant.

$$F(x) \mapsto \widetilde{F}(x) = \sum_{i=0}^{K} \frac{F(x_i)}{\prod_{j \neq i}(x_i^{-1} - x_j^{-1})}$$

S polynôme de x^{-1} de degré $< K \Rightarrow \widetilde{S} = 0$. Donc on “harmonise” :

$$(1 + yN)\frac{\partial \widetilde{G}}{\partial y} = rN\widetilde{G}.$$

Etape 4 : reconstruction

$$(1 + yN)\frac{\partial \widetilde{G}}{\partial y} = rN\widetilde{G}$$

Sous-buts :

- Résoudre l'équation, vérifier que $\widetilde{G}(x, 1, t) = \widetilde{A}(x, t)$ (**validité**)
- Montrer que, dans notre cadre, $\widetilde{G}(x, 1, t) = \widetilde{A}(x, t) \Rightarrow G(x, 1, t) = A(x, t)$ (**unicité**)

La validité se fait avec un calcul.

Pour l'unicité, on peut "reconstruire" (pas facile !) la série $G(x, 1, t)$ en t avec coeffs polynomiaux en x (cette forme vient de la combinatoire).

C'est la même méthode pour les intervalles de m-Tamari.

Résolution de l'équation des 2-constellations en genre supérieur, et la **rationalité** de la solution

$\sim$

Comment nous avons adapté et formalisé la *récurrence topologique* d'Eynard pour les cartes biparties

L'équation pour $r = 2$ et $g \geq 1$

$$F_{g,r} = xt[y^g] \left(\sum_{h=0}^{g} y^h F_{h,r} + \Omega + y\Gamma \right)^r \quad (1)$$

Déjà c'est linéaire. Pour $r = 2$, c'est encore plus simple.

$$F_{g,2} = xt \left(\Gamma F_{g-1,2} + \Omega F_{g,2} + \sum_{h=0}^{g} F_{h,2} F_{g-h,2} \right)$$

On peut séparer le reste comme le cas planaire.

$$Y F_{g,2} = xtH_g + xtS_g$$

- $Y = 1 - xt(2F_{0,2} + \theta)$ (noyau, invariant par g)
- $H_g = \Gamma F_{g-1,2} + \sum_{h=1}^{g-1} F_{h,2} F_{g-h,2}$ (partie connue)
- S_g un polynôme en x^{-1} de degré $\leq K - 1$ (reste)

Fixons le domaine

On veut montrer par induction que $F_{g,2}$ est dans l'ev $\mathbb{A}$ engendré par les termes de la forme

$$\frac{\eta_\alpha \zeta_\beta}{(1-\eta)^a (1+\zeta)^b (1 \pm uz)^c}$$

avec coeffs rationnels, et des restrictions sur les indices.
Par calcul, Γ stabilise $\mathbb{A}$.

$$Y F_{g,2} = xtH_g + xtS_g$$

$H_1 \in \mathbb{A}$ se calcule.
Hypo. ind. $\Rightarrow H_g = \Gamma F_{g-1,2} + \sum_{h=1}^{g-1} F_{h,2} F_{g-h,2} \in \mathbb{A}$ pour $g \geq 2$

Il faut maintenant "éliminer" le reste S_g.

Etude des pôles

On utilisera le résidu pour éliminer S_g, d'où l'étude des pôles.

$$F_{g,2}(u,z) = \frac{xt(H_g(u,z) + S_g(u,z))}{Y(u,z)}$$

Pôles en u possibles : 0, ∞, $\pm z^{-1}$, racines de Y.

Racines de Y : $-z^{-1}$, "petites" (convergent à $z = 0$) et "grandes".

$F_{g,2}(u)$ n'a pas de "petit" pôle (définition combinatoire), ni pôle à ∞ (analyse fine de degré).

L'involution $\mathcal{M} : u \to 1/z^2 u$ échange alors les petites et les grandes racines de Y, mais laisse les pôles de $F_{g,2}$ invariant.

Les pôles de $F_{g,2}$ sont $u = \pm z^{-1}$.

Expression en résidu

$$F_{g,2}(u,z) = \frac{xtH_g(u,z)}{Y(u,z)} + \frac{xtS_g(u,z)}{Y(u,z)}$$

Avec un préfacteur $P(u,z)$ bien choisi, et une notion de résidu algébrique pour les fractions rationnelles, on peut écrire

$$\begin{aligned} P(v,z)F_{g,2}(v,z) &= \mathrm{Res}_{u=v}\left[\frac{xtP(u,z)H_g(u,z)}{(u-v)Y(u,z)} + \frac{xtP(u,z)S_g(u,z)}{(u-v)Y(u,z)}\right] \\ &= -\mathrm{Res}_{u=\pm z^{-1}} \frac{xtP(u,z)H_g(u,z)}{(u-v)Y(u,z)} \end{aligned}$$

Les dérivées successives de Y = combin. lin. de $\gamma, \eta, (\eta_i)_{i\geq 1}, \zeta, (\zeta_i)_{i\geq 1}$.
Par calcul, $F_{g,2} \in \mathbb{A}$.

Les bornes viennent d'une analyse fine de degré.

Rationalité quand la racine est oubliée

Combinatoirement on a $F_{g,2} = \Gamma L_{g,2}$. Il suffit d'inverser Γ (pas facile !). Or, Γ est une "différentiation", et l'inverse c'est une "intégration", qui donne

$$L_{g,2} = R_1 + R_2 \ln \frac{1}{1-\eta} + R_3 \ln \frac{1}{1+\zeta},$$

avec R_1, R_2, R_3 rationnels en les var. grec. avec dénom. $(1-\eta)^a(1+\zeta)^b$.

On montre que $R_2 = R_3 = 0$ avec un résultat de rationalité moins fort de Chapuy.

Les bornes viennent encore d'une analyse fine de degré.

Comparaison avec les nombres de Hurwitz

Cartes biparties :

$$L_{g,2} = \sum_{\alpha,\beta,a\geq 0,b\geq 0} c_{a,b,g}^{\alpha,\beta} \frac{\eta_\alpha \zeta_\beta}{(1-\eta)^a (1+\zeta)^b}$$

avec $|\alpha| + |\beta| \leq 3(g-1)$ et $a + b = \ell(\alpha) + \ell(\beta) + 2g - 2$

Nombres de Hurwitz monotones (Goulden, Guay-Paquet et Novak) :

$$H_g = c_{g,2g-2}^{(0)} + \sum_{\alpha,a\geq 0} c_{g,a}^{\alpha} \frac{\eta'_\alpha}{(1-\eta')^a}$$

avec $|\alpha| \leq 3(g-1)$ et $a = \ell(\alpha) + 2g - 2$

Même forme avec les nombres de Hurwitz classiques (Goulden, Jackson et Vakil).

... et ce que l'on ne sait pas encore.

- D'autres exemples d'équations qui se résolvent avec la même méthode que l'équation planaire ? A quel type d'équation elle s'applique ?
- Rationalité en genre supérieur pour r général ? Preuve unifiée avec les nombres de Hurwitz ?

Merci de votre attention !