Automatisation du calcul avec les sommes binomiales

Séminaire calculs et preuves
Inria Saclay, 25 janvier 2016

Alin Bostan
Inria

Pierre Lairez
TU Berlin

Bruno Salvy
Inria

Sommes binomiales multiples

Exemples

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^3 = (-1)^n \frac{(3n)!}{(n!)^3} \qquad \text{(Dixon)}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 = \sum_{k=0} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^3 \qquad \text{(Strehl)}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \binom{i+j}{i}^2 \binom{4n-2i-2j}{2n-2i} = (2n+1)\binom{2n}{n}^2$$

$$\sum_{r\geqslant 0} \sum_{s\geqslant 0} (-1)^{n+r+s} \binom{n}{r}\binom{n}{s}\binom{n+s}{s}\binom{n+r}{r}\binom{2n-r-s}{n} = \sum_{k\geqslant 0} \binom{n}{k}^4$$

Manipuler les suites

Des objets

Les suites discrètes, des fonctions $\mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}$.

Des opérations

- addition et multiplication terme à terme
- changements d'indices
- sommation définie ou indéfinie
- extrapolation
- **test d'égalité**

Représentation des suites par des récurrences

Suites ⇔ récurrences

C'est le cadre de la *création télescopique* :

- Petkovšek, Wilf et Zeilberger, *A=B*, 1996
- Wegschaider, 1997
- Chyzak, 2000
- Koutschan, 2010

De grands succès :

- De nombreux algorithmes de sommation dans des cas variés
- Formalisme des algèbres d'Ore

$\rightsquigarrow$ Portée très générale de la création télescopique

Les limites des récurrences

Suites $\Rightarrow$ récurrences | Suites $\Leftarrow$ récurrences

À la racine de tous les maux, quelques limitations importantes des récurrences :

- **Le problème des conditions initiales**
  Comment les spécifier ? Comment les faire perdurer ?
  Problème irrésolu en plusieurs variables.
- **L'utilisation d'opérateurs à coefficients rationnels**
  Mathématiquement injustifié : l'espace des suites n'est pas un espace vectoriel sur les fractions rationnelles.

  Pas plus justifié en pratique :

  ✗ $u_n = nu_{n-1} \;\Rightarrow\; u_n = 0$ pour $n \geqslant 0$.
  ✓ $nu_n = n^2 u_{n-1} \;\Rightarrow\; u_n = n!\,u_0$ pour $n \geqslant 0$.

Le fardeau de la création télescopique

Un obstacle à l'automatisation

La plupart des algorithmes de création télescopique calculent dans une algébre d'opérateurs rationnels.
Dès lors, comment faire confiance à la création télescopique ?
Jusqu'ici, c'est au prix de l'automatisation.

L'identité d'Andrews-Paule

$$u_{n,i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \binom{i+j}{i}^2 \binom{4n-2i-2j}{2n-2i}$$

(automatique) $$u_{n,i,j} = \Delta_i(R(n,i,j)\,u_{n,i,j}) + \Delta_j(S(n,i,j)\,u_{n,i,j})$$

(automatique) $$\sum_{i,j} u_{n,i,j} = 0 \quad ?!$$

(à la main) $$\sum_{i,j} u_{n,i,j} = (2n+1)\binom{2n}{n}^2.$$

Représentation des suites par des séries

$$u_{\underline{n}} \Leftrightarrow f(\underline{x}) = \sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} u_{\underline{n}} \underline{x}^{\underline{n}}$$

Un lexique intéressant

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} u_{\underline{n},k} \Leftrightarrow f(\underline{x}, 1)$
- $u_{\underline{n}} v_{\underline{n}} \Leftrightarrow \operatorname{diag}_{x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots}\big(f(\underline{x}) g(\underline{y})\big)$
- Egoritchev, 1984

Quelques défauts du lexique

Pour l'automatisation, on rencontre deux problèmes :

- Qu'en est-il des suites à indices dans $\mathbb{Z}^d$? des changements d'indices ? $\sum_{n\in\mathbb{Z}} x^n$? $\sum_{n\leqslant 0} u_n x^n$?
- Problèmes de convergence : interversion intégration/spécialisation

Les nombres de Delannoy

$$v_{n,k} \overset{\text{def}}{=} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k}$$

$$\sum_{n,k\geqslant 0} v_{n,k} x^n y^k = \operatorname{diag}_{xu,yv}\left(\frac{1}{1-x(1+y)}\frac{1}{1-u-v}\right)$$

$$= \frac{1}{(2i\pi)^2}\oint \frac{1}{1-x(1+y)}\frac{1}{1-u-v}\frac{\mathrm{d}u}{u}\frac{\mathrm{d}v}{v}$$

$$\sum_{n\geqslant 0} x^n \sum_{k\geqslant 0} v_{n,k} \overset{!?}{=} \frac{1}{(2i\pi)^2}\oint \frac{1}{1-2x}\frac{1}{1-u-v}\frac{\mathrm{d}u}{u}\frac{\mathrm{d}v}{v}$$

Représentation en terme constant

$u_{\underline{n}} = [1] R_0 R_1^{n_1} \cdots R_d^{n_d}$

- R, $R_1, \ldots, R_d$, des fractions rationnelles en $x_1, \ldots, x_r$
- $[1] \cdots$, le terme constant, après développement par rapport à x_1, puis x_2, etc.

- Généralise les séries génératrices, avec $r = d$, $R_1 = 1/x_1$, $R_2 = 1/x_2$, etc.
- Généralise les séries diagonales, avec $d = 1$, $R_1 = 1/(x_1 \cdots x_r)$.
- Structure remarquée aussi par Rowland et Zeilberger.

Exemples et opérations de clôture

Exemples :

- $a^n = [1]a^n$
- $\binom{n}{k} = [1](1+x)^n x^{-k}$
- $\delta_n = [1]x^n$

$u_{\underline{n}} = [1]R_0(\underline{x})\underline{R}(\underline{x})^{\underline{n}}$ et $v_{\underline{n}} = [1]S_0(\underline{y})\underline{S}(\underline{y})^{\underline{n}}$

- $u_{\underline{n}}v_{\underline{n}} = [1](R_0S_0)(R_1S_1)^{n_1}\cdots(R_dS_d)^{n_d}$
- $u_{\lambda(\underline{n})} = [1]R_0R_1^{\lambda_1(\underline{n})}\cdots R_d^{\lambda_d(\underline{n})}$
- $\sum_{n_d=0}^{m} u_{\underline{n}} = [1]R_0R_1^{n_1}\cdots R_{d-1}^{n_{d-1}}\frac{1-R_d^{m+1}}{1-R_d}$

Définition — Les *sommes binomiales* forment le plus petit sous-espace de suites contenant les trois exemples et clos par les opérations ci-dessus.

Sommes binomiales et termes constants

Traduction à cout nul d'une somme binomial en sa représentation par terme constant.

```
sumtoct := proc(U, v :: name)
  local L, first, rest, i;
  if type(U, `+`) then
    return normal(map(sumtoct, U, v, num));
  elif type(U, `*`) then
    first := op(1, U);
    rest := subsop(1=1, U);
    return normal(sumtoct(first, v)*sumtoct(rest, v||rand()));
  elif type(U, specfunc(Delta)) then
    return v^op(U);
  elif type(U, specfunc(Binomial)) then
    return (1+v)^op(1, U)/v^op(2, U);
  elif type(U, specfunc(Sum)) then
    return normal(sum(expand(sumtoct(op(1, U), v, num)), op(2, U)));
  else
    return U;
  end if;
end proc;
```

Des termes constants aux séries génératrices

$$
\begin{aligned}
u_{\underline{n}} &= [1] R_0 S_1^{n_1} \dots S_d^{n_d} \\
u_{\underline{n}} \underline{t}^{\underline{n}} &= [1_x] R_0 (t_1 S_1)^{n_1} \dots (t_d S_d)^{n_d} \\
\sum_{\underline{n} \in \mathbb{N}^d} u_{\underline{n}} \underline{t}^{\underline{n}} &= [1_x] \frac{R_0}{(1 - t_1 R_1) \cdots (1 - t_d R_d)} \\
&= \frac{1}{(2i\pi)^r} \oint \frac{R_0}{(1 - t_1 R_1) \cdots (1 - t_d R_d)} \frac{\mathrm{d}x_1}{x_1} \cdots \frac{\mathrm{d}x_r}{x_r} \\
&= \operatorname{diag} U(x_1, \dots, x_r), \quad \text{avec } U \in \mathbb{C}[\![x_1, \dots, x_r]\!] \text{ rationnel}
\end{aligned}
$$

Théorème

Les sommes binomiales sont solutions de récurrences linéaires.

Théorèmes d'équivalence

Théorème — Une suite $u : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}$ est une somme binomiale si et seulement si elle est une combinaison linéaire de termes constants $[1] R_0 R_1^{n_1} \cdots R_d^{n_d}$, avec des R_i rationnels.

Théorème — Une suite $u : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ est une somme binomiale si et seulement si elle est la diagonale d'une série entière rationnelle.

Sommation par spécialisation

- $u_{\underline{n},\underline{k}}$, une suite $\mathbb{Z}^{d+e} \to \mathbb{C}$
- $\Gamma \subset \mathbb{Z}^{d+e}$ un polyèdre rationnel
- Comment calculer $v_{\underline{n}} = \sum_{\underline{k}} u_{\underline{n},\underline{k}} \mathbb{1}_\Gamma(\underline{n}, \underline{k})$?

Via des séries génératrices : spécialisation

$$f(x,y) = \sum_{n,k} u_{n,k} x^n y^k, \quad \varphi_\Gamma(x,y) = \sum_{n,k} \mathbb{1}_\Gamma(n,k) x^n y^k$$

$$g(x,y) = f \star \varphi_\Gamma \quad \text{(produit d'Hadamard)}$$

$$\rightsquigarrow \sum_n v_n x^n = g(x,1)$$

Sommation par composition

- $u_{\underline{n},\underline{k}}$, une suite $\mathbb{Z}^{d+e} \to \mathbb{C}$
- $\Gamma \subset \mathbb{Z}^{d+e}$ un polyèdre rationnel
- Comment calculer $v_{\underline{n}} = \sum_{\underline{k}} u_{\underline{n},\underline{k}} \mathbb{1}_\Gamma(\underline{n},\underline{k})$?

Via des termes constants : composition

$$u_{n,k} = [1] R_0 R_1^{n_1} \cdots R_d^{n_d} S_1^{k_1} \cdots S_e^{k_e}, \qquad \varphi_\Gamma(x,y) = \sum_{n,k} \mathbb{1}_\Gamma(n,k) x^n y^k$$

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow \sum_n v_n t^n &= [1_{x,y}] \sum_{n,k} \mathbb{1}_\Gamma(\underline{n},\underline{k}) R_0 (t_1 R_1)^{n_1} \cdots (t_d R_d)^{n_d} S_1^{k_1} \cdots S_e^{k_e} \\
&= [1_{x,y}] R_0 \, \varphi_\Gamma(t_1 R_1, \dots, t_d R_d, S_1, \dots, S_e) \\
&= \frac{1}{(2i\pi)^{d+e}} \oint \varphi_\Gamma(t_1 R_1, \dots, t_d R_d, S_1, \dots, S_e) \frac{\mathrm{d}x_{1\smile d}}{x_{1\smile d}} \frac{\mathrm{d}y_{1\smile e}}{y_{1\smile e}}
\end{aligned}$$

Méthode générale

Entrée Une somme binomiale.

- Calculer sa représentation en terme constant.
- Passer aux séries génératrices.
- Diminuer le nombre de variables par la réduction géométrique.

? La représentation est-elle rationnelle ?

Oui C'est terminé.

Non Calculer une équation de Picard-Fuchs.

Des conjectures démontrées

Énoncées par Brent, Ohtsuka, Osborn et Prodinger

$$\sum_{i,j}\binom{2n}{n+i}\binom{2n}{n+j}|i^3-j^3| = \frac{2n^2(5n-2)}{4n-1}\binom{4n}{2n}$$

$$\sum_{i,j}\binom{2n}{n+i}\binom{2n}{n+j}|i^5-j^5| = \frac{2n^2(43n^3-70n^2+36n-6)}{(4n-1)(4n-3)}\binom{4n}{2n}$$

$$\sum_{i,j}\binom{2n}{n+i}\binom{2n}{n+j}|i^7-j^7| = \frac{2n^2(531n^5-1960n^4+2800n^3-1952n^2+668n-90)}{(4n-1)(4n-3)(4n-5)}\binom{4n}{2n}$$

$$\sum_{i,j}\binom{2n}{n+i}\binom{2n}{n+j}|ij(i^2-j^2)| = \frac{2n^3(n-1)}{2n-1}\binom{2n}{n}^2$$

$$\sum_{i,j}\binom{2n}{n+i}\binom{2n}{n+j}|i^3j^3(i^2-j^2)| = \frac{2n^4(n-1)(3n^2-6n+2)}{(2n-3)(2n-1)}\binom{2n}{n}^2$$

Des conjectures démontrées

Énoncée par Yvan Le Borgne

$$1 + F_n^{-1,-1} + 2F_n^{0,0} - F_n^{0,1} + F_n^{1,0} - 3F_n^{1,1} + F_n^{1,2} - F_n^{3,1} + 3F_n^{3,2} - F_n^{3,3} - 2F_n^{4,2} + F_n^{4,3} - F_n^{5,2} = \sum_{m=0}^{n} \frac{\binom{n+2}{m}\binom{n+2}{m+1}\binom{n+2}{m+2}}{\binom{n+2}{1}\binom{n+2}{2}},$$

où $F_n^{a,b} = \sum_{d=0}^{n-1}\sum_{c=0}^{d-a} \binom{d-a-c}{c}\binom{n}{d-a-c}\left(\binom{n+d+1-2a-2c+2b}{n-a-c+b} - \binom{n+d+1-2a-2c+2b}{n+1-a-c+b}\right).$

- L'automatisation complète est appréciable.

Démonstration !

Paquet Maple *BinomSums.*
github.com/lairez/binomsums

Idées en vrac pour traiter plus de suites

Sortir de la classe des rationnels

On peut considérer des termes constants $[1]R\underline{S}^{\underline{n}}$ avec des S rationnels mais des R plus généraux.

- Autoriser les exponentielles de formes linéaires, c'est ajouter $\frac{1}{n!}$ aux briques de bases.
- L'important est de toujours pouvoir intégrer efficacement.

Partir de ce qu'on sait intégrer

Imaginons qu'on sache intégrer efficacement les fraction rationnelles sur des domaines de la forme « cycle croix hypercube », qu'elle classe de suite peut-on traiter par termes constants ?

- On devrait avoir toutes les sommes hypergéométriques équilibrées.
- Ce serait génial !

Des analogues ?

- Fractions rationnelles : un anneau
- $f \otimes g \stackrel{\text{def}}{=} f(x)g(y)$: un produit
  satisfaisant $ff' \otimes gg' = (f \otimes g)(f' \otimes g')$
- $[1] \cdots$: une forme linéaire sur cet anneau, multiplicative pour $\otimes$

Un analogue moyennement intéressant

- L'anneau des matrices
- Le produit de Kronecker
- La trace

$\rightsquigarrow$ Suites de la forme $\operatorname{Tr}\left(AB_1^{n_1} \cdots B_d^{n_d}\right)$

D'autres idées ?

Merci

Des questions ?