# Lemme de Shidlovsky et irrationalité de valeurs de $\zeta$.

## I Résultats d'irrationalité

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad , \; s \geqslant 2$$

$s$ pair : $\zeta(s) = c_s \pi^s \notin \overline{\mathbb{Q}}$
$c_s \in \mathbb{Q}^*$

Conj : $\pi, \zeta(3), \zeta(5), \ldots$ sont algébriquement indep. sur $\mathbb{Q}$.

Th (Apéry, 1978) : $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$.

Th (Ball-Rivoal, 2000) : Pour $a$ impair $a \to +\infty$ :

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(1, \zeta(3), \zeta(5), \ldots, \zeta(a)) \geqslant \frac{1+o(1)}{1+\log 2} \log a$$

Caractère de Dirichlet modulo $N \geq 1$ : fonction $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ t.q.

$$\begin{cases} \chi(n+N) = \chi(n) \\ \chi(n) = 0 \iff \operatorname{pgcd}(n, N) \neq 1 \\ \chi(mn) = \chi(m)\chi(n) \end{cases}$$

pour tous $m, n$

$N = 1$

$\chi(n) = 1$ pour tout $n$

$L(\chi, s) = \zeta(s)$

$$\chi \rightsquigarrow \circledast\ L(\chi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \quad s \geq 2$$

$\circledast$ Conducteur $D_\chi$ : c'est un diviseur de $N$.

$\circledast$ Parité $p_\chi$ :
$$\begin{cases} p_\chi = 0 \text{ si } \chi(-1) = 1 \\ p_\chi = 1 \text{ si } \chi(-1) = -1 \end{cases}$$

Si $s$ et $\chi$ ont la même parité alors $\underbrace{L(\chi, s)}_{\text{donc transcendant}} = c_{\chi, s}\, \pi^s$ avec $c_{\chi, s} \in \overline{\mathbb{Q}}^*$

Notons $\delta_{\chi,a} = \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}\left(\{1\} \cup \{L(\chi,s),\ 2 \leq s \leq a,\ s \not\equiv p_\chi \bmod 2\}\right)$

<u>Th</u> (Nishimoto, 2011) : $\delta_{\chi,a} \geq \dfrac{1+o(1)}{D_\chi + \log 2} \log a, \quad a \to +\infty.$

$\chi$ provient toujours de $\chi_0$ modulo $D_\chi$ et $L(\chi,s) = \underbrace{c_{\chi,s}}_{\in \mathbb{Q}^*} L(\chi_0, s)$

⊛ $D_\chi = 1$ : Ball-Rivoal

⊛ $D_\chi = N = 4$ : $\chi(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 1 \ [4] \\ -1 & n \equiv 3 \ [4] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$L(\chi,s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^s}.$$

<u>Th 1</u> : Si $D_\chi$ est pair alors $\delta_{\chi,a} \geq \dfrac{1+o(1)}{(D_\chi/2) + \log 2} \log a, \quad a \to +\infty.$

# II La preuve classique du théorème de Ball-Rivoal

Fixons $a$ impair très grand et $r, r'$ entiers, $0 \leq r, r' < \frac{a}{2}$.

On prendra $r = r' = \left[ \frac{a}{(\log a)^2} \right]$

Notons $F_n(t) = d_n^a \, n!^{a-r-r'} \dfrac{(t-rn)_{rn} (t+n+1)_{r'n}}{(t)_{n+1}^a}$

où $d_n = \mathrm{ppcm}(1, 2, \ldots, n)$

$(\alpha)_p = \alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+p-1)$

$$S_n(z) = \sum_{t\geq 1}^{\infty} F_n(t)\, z^{-t} \quad \text{pour } |z| \geq 1 \quad \text{où}$$

$$F_n(t) = d_n^a\, n!^{a-r-r'} \frac{(t-rn)_{rn}\,(t+n+1)_{r'n}}{(t)_{n+1}^a}$$

$$S_n(z) = P_0(z) + \sum_{\ell=1}^{a} P_\ell(z)\, \mathrm{Li}_\ell\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{où } \mathrm{Li}_\ell(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^\ell} \quad \text{et } P_0, \dots, P_a \in \mathbb{Z}[X] \text{ de degré} \leq n$$

$$S_n(1) = P_0(1) + \sum_{\ell=2}^{a} P_\ell(1)\, \zeta(\ell).$$

4 propriétés :

$$\boxed{\int_\Omega f^n g}$$

1. $|S_n(1)| \leq \alpha^{n(1+o(1))}$ où $\alpha$ dépend de $a$ et $r, r'$ ; $0<\alpha<1$.
2. $|P_\ell(1)| \leq \beta^{n(1+o(1))}$ où $\beta > 1$ dépend aussi de $a, r, r'$.
3. Si $r = r'$ alors $P_\ell(1) = 0$ lorsque $\ell$ est pair.
4. Minoration de $|S_n(1)|$, par $\alpha^{n(1+o(1))}$.

Critère d'indép. linéaire (Nesterenko) : $\dim \mathrm{Vect}(1, \zeta(3), \zeta(5), \dots, \zeta(a)) \geq 1 - \frac{\log \alpha}{\log \beta}$

$$\geq \frac{1+o(1)}{1+\log 2} \log a \quad a \to +\infty$$

## III Une nouvelle preuve du théorème de Ball-Rivoal

Pour $k \geq 1$ on dérive : $S_n^{(k)} = P_{0,k}(z) + \sum_{l=1}^{a} P_{l,k}(z)\, Li_l(1/z)$

car $\frac{d}{dz} Li_1\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z(1-z)}$ et $\frac{d}{dz}\left(Li_l\left(\frac{1}{z}\right)\right) = \frac{-1}{z} Li_{l-1}\left(\frac{1}{z}\right)$, $l \geq 2$.

Ici $P_{l,k} \in \mathbb{Z}(X)$ avec pôles éventuels $\begin{cases} \text{en } 0 & \text{si } l \geq 1 \\ \text{en } 0 \text{ et en } 1 & \text{si } l = 0 \end{cases}$

Si $n$ assez grand par rapport à $k$ : $S_n^{(k)}(1) = P_{0,k}(1) + \sum_{l=2}^{a} P_{l,k}(1)\, \zeta(l)$.

**Th 2** : Il existe $k_1, \dots, k_a$ majorés indépendamment de $n$, tels que la matrice

$$\begin{bmatrix} P_{0,k_1}(1) & \cdots & P_{0,k_a}(1) \\ P_{2,k_1}(1) & \cdots & P_{2,k_a}(1) \\ \vdots & & \vdots \\ P_{a,k_1}(1) & \cdots & P_{a,k_a}(1) \end{bmatrix}$$

soit inversible.

$$T_n(z) = \sum_{t=n+1}^{+\infty} F_n(-t)\, z^t \quad \text{pour } |z| \leq 1$$

$$T_n(z) = \tilde{P}_0(z) + \sum_{l=1}^{a} P_l(z)\,(-1)^l\, \mathrm{Li}_l(z) \text{ avec } \tilde{P}_0 \in \mathbb{Z}[X]$$

$$T_n^{(k)}(z) = \tilde{P}_{0,k}(z) + \sum_{l=1}^{a} P_{l,k}(z)\,(-1)^l\, \mathrm{Li}_l(z) \text{ avec } \underline{\underline{\text{les mêmes}}}\ P_{l,k},\ l \geq 1$$

et $\underline{\text{les mêmes}}$ $P_l$, $1 \leq l \leq a$.

On prend $z = 1$ et on soustrait la relation sur $S_n^{(l)}(1)$ :

$$S_n^{(k)}(1) - T_n^{(k)}(1) = \Big(\underbrace{P_{0,k}(1) - \tilde{P}_{0,k}(1)}_{\in \mathbb{Z}}\Big) \cdot 1 + \sum_{l=2}^{a} \underbrace{P_{l,k}(1)}_{\in \mathbb{Z}}\, \xi_l$$

où $\xi_l = \zeta(l) - (-1)^l \zeta(l) = \begin{cases} 0 & \text{si } l \text{ pair} \\ 2\zeta(l) & \text{si } l \text{ impair} \end{cases}$

Critère d'indep. linéaire de Siegel : $\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \ldots, \xi_a) \geq \frac{1+o(1)}{1+\log 2} \log a$.

$$r \approx r' \approx \left[\frac{a}{(\log a)^2}\right]$$

# IV Lemme de multiplicité à la Shidlovsky

Soit $q \geq 1$, $A \in M_q(\mathbb{C}(X))$.

$n \geq 0$, $P_1, \dots, P_q \in \mathbb{C}[X]$ de degré $\leq n$.

A toute solution $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix}$ de $Y' = AY$ on associe un reste :

$$R_Y(z) = P_1(z)\, y_1(z) + \dots + P_q(z)\, y_q(z)$$

Ex : $Y = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{Li}_1(1/z) \\ \vdots \\ \mathrm{Li}_a(1/z) \end{bmatrix} \rightsquigarrow R_Y(z) = S_n(z)$ ; $Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\mathrm{Li}_1(z) \\ \vdots \\ (-1)^a \mathrm{Li}_a(z) \end{bmatrix} \rightsquigarrow R_Y(z) = T_n(z)$

$q = a + 2$

On dérive : $R_y^{(k)}(z) = P_{1,k}(z)\, y_1(z) + \dots + P_{q,k}(z)\, y_q(z)$

avec $\begin{pmatrix} P_{1,k} \\ \vdots \\ P_{q,k} \end{pmatrix} = \left( \dfrac{d}{dz} + {}^t A \right)^k \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_q \end{pmatrix} \in M_{q,1}(\mathbb{C}(z))$

<u>But</u> : inversibilité de $\left[ P_{l,k}(z) \right]_{1 \leq l, k \leq q}$

---

$$S_n(z) = O\left( z^{-rn-1} \right), \quad z \to \infty$$

$$T_n(z) = O\left( z^{(r'+1)n+1} \right), \quad z \to 0$$

En posant $R_n(z) = \sum_{l=1}^{a} P_l(z) (-1)^{l-1} \dfrac{(\log z)^{l-1}}{(l-1)!} = R_y(z)$ avec $Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\log z \\ \vdots \\ (-1)^{a-1} \dfrac{(\log z)^{a-1}}{(a-1)!} \end{bmatrix}$ on a $R_n(z) = O\left( (z-1)^{(a-r-r')n+a-1} \right)$ quand $z \to 1$

(F.-Rivoal, 2003)

Th3 : Soient $q \geqslant 1$, $A \in M_q(\mathbb{C}(X))$, $n \geqslant 0$, $P_1, \dots, P_q \in \mathbb{C}[X]$ de degré $\leq n$

Soit $\Omega$ une partie finie de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Pour tout $\omega \in \Omega$, soit $N_\omega \in \mathbb{N}$ et $Y_\omega$ une solution non nulle de $Y' = AY$, holomorphe en $\omega$, telle que :

$$\begin{cases} R_{Y_\omega}(z) = O\left((z-\omega)^{N_\omega}\right), \ z \to \omega, \text{ si } \omega \in \mathbb{C} \\ R_{Y_\omega}(z) = O\left(z^{n-N_\omega}\right), \ z \to \infty, \text{ si } \omega = \infty. \end{cases}$$

Alors le rang $r$ de la matrice $[P_{l,k}(z)]_{1 \leq l,k \leq q} \in M_q(\mathbb{C}(z))$

vérifie :
$$\sum_{\omega \in \Omega} N_\omega \leqslant (n+1)r + C_1$$

où $C_1$ dépend seulement de $A$ et de $\Omega$ mais pas de $n, P_1, \dots, P_q, N_\omega$.

$\Omega = \{0\}$ : Shidlovsky.

$\underline{\infty \notin \Omega}$ : $\left[\right.$ Bertrand (2012)

Bertrand - Beukers (1985) dans le cas

où $Y_\omega$ "ne dépend pas de $\omega$"

Théorie de Galois différentielle

Zudilin : $1, \zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$

en $z=1$

$$\sum_{t=1}^{\infty} G_n(t)\, z^{-t} = u_n + v_n\,\zeta(5)$$

$u_n, v_n \in \mathbb{Q}$

$\mathbb{Z}$

$$\left|u_n + v_n\,\zeta(5)\right| = \alpha^{n(1+o(1))}$$

avec $\alpha > 1$ : on n'en conclut rien

Siegel
Nesterenko ) ,   Formes linéaires $\sim \alpha^n$
Coeffs $\leq \beta^n$

$$\rightsquigarrow \underline{\dim \mathrm{Vect}} \geqslant \underbrace{1 - \frac{\log \alpha}{\log \beta}}_{\frac{1+o(1)}{1+\log 2} \log a}$$