SOMMES BINOMIALES MULTIPLES STRUCTURE ET CALCUL

JOURNÉES NATIONALES DE CALCUL FORMEL

3 novembre 2014, Luminy

ALIN BOSTAN
Inria

PIERRE LAIREZ
TU Berlin

BRUNO SALVY
Inria

EXEMPLES

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^3 = (-1)^n \frac{(3n)!}{(n!)^3} \qquad \text{(Dixon)}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 = \sum_{k} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^3 \qquad \text{(Strehl)}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \binom{i+j}{i}^2 \binom{4n-2i-2j}{2n-2i} = (2n+1)\binom{2n}{n}^2$$

$$\sum_{r\geqslant 0}\sum_{s\geqslant 0} (-1)^{n+r+s} \binom{n}{r}\binom{n}{s}\binom{n+s}{s}\binom{n+r}{r}\binom{2n-r-s}{n} = \sum_{k\geqslant 0} \binom{n}{k}^4$$

But — Prouver automatiquement ce type d'identités.

MOTIVATIONS

Arithmétique

$$n^3u_n + (n-1)^3u_{n-2} = (34n^3 - 51n^2 + 27n - 5)u_{n-1}$$

$$\text{avec } u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 \quad \text{(Apéry)}$$

Algorithmique

> *[50] Develop computer programs for simplifying sums that involve binomial coefficients.*
>
> Exercise 1.2.6.63
> *The Art of Computer Programming*
> Knuth (1968)

Et aussi — Combinatoire, physique théorique, etc

LA MÉTHODE

Somme binomiale

$$a_n = \sum (\ )(\ )$$

Encodage

Réprésentation intégrale rationnelle

$$\sum_n a_n t^n = \frac{1}{(2i\pi)^d} \int \cdots \int \mathrm{R}(t, \underline{z}) \mathrm{d}\underline{z}$$

Calcul de l'équation de Picard-Fuchs

équation différentielle

$$\sum_{i=0}^{r} p_i(t) y^{(i)} = 0$$

gfun

Test d'égalité, asymptotique, récurrence, calcul efficace, etc.

TRAVAUX PRÉCÉDENTS

- *Création télescopique*
  - Zeilberger (1990), sommes simples
  - Wilf-Zeilberger (1992), sommes multiples
  - Wegshaider (1997), améliorations et implémentation
  - Chyzak (2000), généralise Zeilberger
- Représentations intégrales
  - Egoritchev (1984)

L'ensemble va bien au delà des sommes binomiales.

SOMMES BINOMIALES

Définition par induction

- $\delta : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ est une somme binomiale. ($\delta_0 = 1$ et $\delta_n = 0$ si $n \neq 0$)
- $n \in \mathbb{Z} \mapsto a^n \in \mathbb{C}$ est une somme binomiale pour tout $a \in \mathbb{C}^\times$.
- $(n,k) \in \mathbb{Z}^2 \mapsto \binom{n}{k} \in \mathbb{C}$ est une somme binomiale.

- Si $u, v : \mathbb{Z}^p \to \mathbb{C}$ sont des s.b., alors $u + v$ et uv sont des s.b.
- Si $u : \mathbb{Z}^p \to \mathbb{C}$ est une s.b. et $\lambda : \mathbb{Z}^p \to \mathbb{Z}^q$ une application affine, alors $u \circ \lambda$ est une s.b.
- Si $u : \mathbb{Z}^p \to \mathbb{C}$ est une s.b., alors

$$(n_1, \ldots, n_p)\mathbb{Z}^p \mapsto \sum_{k=0}^{n_1} u_{k,n_2,\ldots,n_p} \in \mathbb{C}$$

est une s.b.

REPRÉSENTATION INTÉGRALE

Nombres de Delannoy

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k}$$

Coefficient binomial

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{2i\pi} \oint_\gamma \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}} \mathrm{d}z$$

Multiplication

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{2i\pi} \oint_\gamma \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}} \mathrm{d}z, \quad \binom{n+k}{k} = \frac{1}{2i\pi} \oint_\gamma \frac{(1+z)^{n+k}}{z^{k+1}} \mathrm{d}z$$

REPRÉSENTATION INTÉGRALE

Nombres de Delannoy

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k}$$

Coefficient binomial

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma} \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}} \mathrm{d}z$$

Multiplication

$$\binom{n}{k}\binom{n+k}{k} = \frac{1}{(2i\pi)^2} \left(\oint_{\gamma} \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}} \mathrm{d}z\right) \left(\oint_{\gamma} \frac{(1+z)^{n+k}}{z^{k+1}} \mathrm{d}z\right)$$

REPRÉSENTATION INTÉGRALE

Nombres de Delannoy

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k}$$

Coefficient binomial

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma} \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}} \mathrm{d}z$$

Multiplication

$$\binom{n}{k}\binom{n+k}{k} = \frac{1}{(2i\pi)^2} \left(\oint_{\gamma} \frac{(1+x)^n}{x^{k+1}} \mathrm{d}x\right) \left(\oint_{\gamma} \frac{(1+y)^{n+k}}{y^{k+1}} \mathrm{d}y\right)$$

REPRÉSENTATION INTÉGRALE

Nombres de Delannoy

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k}$$

Coefficient binomial

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma} \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}}\mathrm{d}z$$

Multiplication

$$\binom{n}{k}\binom{n+k}{k} = \frac{1}{(2i\pi)^2}\oint_{\gamma\times\gamma} \frac{(1+x)^n(1+y)^{n+k}}{x^{k+1}y^{k+1}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

REPRÉSENTATION INTÉGRALE

Nombres de Delannoy

Sommation

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k} = \frac{1}{(2i\pi)^2} \oint_{\gamma\times\gamma} \sum_{k=0}^{n} \frac{(1+x)^n(1+y)^{n+k}}{x^{k+1}y^{k+1}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Série génératrice

REPRÉSENTATION INTÉGRALE

Nombres de Delannoy

Sommation

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}=\frac{1}{(2i\pi)^2}\oint_{\gamma\times\gamma}\sum_{k=0}^{n}\big((1+x)(1+y)\big)^n\left(\frac{1+y}{xy}\right)^k\frac{\mathrm{d}x}{x}\frac{\mathrm{d}y}{y}$$

Série génératice

REPRÉSENTATION INTÉGRALE

Nombres de Delannoy

Sommation

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k} = \frac{1}{(2i\pi)^2} \oint \left(\frac{(1+x)^n(1+y)^{2n+1}}{(1+y-xy)(xy)^{n+1}} - \frac{(1+x)^n(1+y)^n}{1+y-xy} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Série génératice

REPRÉSENTATION INTÉGRALE

Nombres de Delannoy

Sommation

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k} = \frac{1}{(2i\pi)^2} \oint \left(\frac{(1+x)^n(1+y)^{2n+1}}{(1+y-xy)(xy)^{n+1}} - \frac{(1+x)^n(1+y)^n}{1+y-xy} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Série génératice

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n = \frac{1}{(2i\pi)^2} \oint \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(1+x)^n(1+y)^{2n+1}}{(1+y-xy)(xy)^{n+1}} - \frac{(1+x)^n(1+y)^n}{1+y-xy} \right) t^n \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

REPRÉSENTATION INTÉGRALE

Nombres de Delannoy

Sommation

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} = \frac{1}{(2i\pi)^2} \oint \left(\frac{(1+x)^n (1+y)^{2n+1}}{(1+y-xy)(xy)^{n+1}} - \frac{(1+x)^n (1+y)^n}{1+y-xy} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Série génératice

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n = \frac{1}{(2i\pi)^2} \oint \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(xy - t(1+x)(1+y)^2\right)\left(1 - t(1+x)(1+y)\right)}$$

SOMMES BINOMIALES ET PÉRIODES

Proposition — Si $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ est une somme binomiale, alors il existe une fraction rationnelle $\mathrm{R}(t, x_1, \ldots, x_n)$ telle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n = \frac{1}{(2i\pi)^n} \oint \mathrm{R}(t, \mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x}$$
$$= \left[\tfrac{1}{x_1 \cdots x_n}\right] \mathrm{R}(t, \mathbf{x})$$

Corollaire — Il existe des algorithmes pour

- calculer une récurrence satisfaite par une somme binomiale ;
- tester l'égalité de deux sommes binomiales.

SOMMES BINOMIALES ET DIAGONALES

- $\mathrm{R}(x_1,\ldots,x_n)$ une fraction rationnelle, avec $\mathrm{R}(0,\ldots,0)$ fini.
- $\mathrm{R} = \sum_{i_1,\ldots,i_n \geqslant 0} a_{i_1,\ldots,i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$
- La diagonale de R est la série univariée des coefficients *diagonaux* :

$$\mathrm{diag}(\mathrm{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \geqslant 0} a_{i,\ldots,i} t^i.$$

Théorème (Bostan, Lairez, Salvy, 2014) — Une suite $u : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ est une somme binomiale si et seulement si sa série génératrice est la diagonale d'une fraction rationnelle.

SOMMES BINOMIALES ET DIAGONALES

Conséquences de l'équivalence entre diagonales et sommes binomiales

Corollaire d'un théorème de Furstenberg — Si $\sum u_n t^n$ est une série algébrique, alors (u_n) est une somme binomiale.

Corollaire d'un théorème de Furstenberg — Si (u_n) est une somme binomiale, alors $\sum u_n t^n$ est une série algébrique modulo p.

Reformulation d'une conjecture de Christol — Si (u_n) est une suite d'entier P-récursive à croissance au plus exponentielle, alors c'est une somme binomiale.

INTÉGRALE PARTIELLE

$$\oint \mathrm{R}(t,x_1,\ldots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = \oint \underbrace{\left(\oint \mathrm{R}(t,x_1,\ldots,x_n)\mathrm{d}x_1\right)}_{\text{fonction rationnelle ?}} \mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

- Parfois rationnelle, parfois non
- Quand c'est le cas, on obtient une nouvelle intégrale de fraction rationnelle avec une variable de moins.
- Dépend du cycle d'intégration
- Le cycle est explicitement donné par un ordre monomial.
- Formulation purement symbolique possible (implémentation, preuve formelle ?)

RÉDUCTION GÉOMÉTRIQUE

Cas d'un seul paramètre

$\mathrm{R}(z,t) = a/f \in \mathbb{C}(z,t)$ et $\mathrm{S} = \{\rho(t) \in \mathbb{C}\{t\} \mid f(\rho(t),t) = 0\}$.

Formule de Cauchy

$$\oint_{|z|=r} \mathrm{R}(z,t)\mathrm{d}z = \sum_{\rho\in\mathrm{S}} \underbrace{[|\rho(t)| < r]}_{=0 \text{ ou } 1} \underbrace{\operatorname{res}_{z=\rho} \mathrm{R}}_{\text{algébrique}}$$

- $\rho(t) \sim \mathrm{C}t^{\alpha_\rho}$
- $[|\rho(t)| < r] = \left[\alpha_\rho > 0\right]$, quand $t \to 0$.
- Si $\left[\alpha_\rho > 0\right]$ ne dépend que de la classe de conjugaison de ρ, alors $\oint_{|z|=r} \mathrm{R}(z,t)\mathrm{d}z$ est une fonction rationnelle de t.

EXEMPLES

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 \rightsquigarrow \frac{1}{(2i\pi)^3} \oint \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1-x)(1-y)(1-z)xyz-t(x+yz-xyz)}$$

$$\sum_{r\geqslant 0} \sum_{s\geqslant 0} (-1)^{n+r+s} \binom{n}{r}\binom{n}{s}\binom{n+s}{s}\binom{n+r}{r}\binom{2n-r-s}{n}$$

$$\rightsquigarrow \frac{1}{(2i\pi)^3} \oint \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1-x)(1-y)(1-z)xyz+(y-z)(x-z)t}$$

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} (-4)^k \binom{k}{m} \frac{n}{n+k} \binom{n+k}{2k} = \sum_{k=n_1}^{n_2} (-4)^k \binom{k}{m} \left(\binom{n+k-1}{2k} + \frac{1}{2}\binom{n+k-1}{2k-1} \right)$$

$$\rightsquigarrow \frac{1}{2} \frac{(1-t_1)(1+t_1)}{t_1^2 + 4t_1t_2 + 2t_1 + 1}$$

EXEMPLES

Démonstration

$$\sum_{r\geqslant 0}\sum_{s\geqslant 0}(-1)^{n+r+s}\binom{n}{r}\binom{n}{s}\binom{n+s}{s}\binom{n+r}{r}\binom{2n-r-s}{n}=\sum_{k\geqslant 0}\binom{n}{k}^4$$

$$\sum_{j\geqslant 0}\sum_{k\geqslant 0}(-1)^{j+k}\binom{j+k}{k+l}\binom{r}{j}\binom{n}{k}\binom{s+r+n-j-k}{m-j} = (-1)^l\binom{n+r}{n+l}\binom{s}{m-n-l}$$